

低次群中性子拡散方程式の時間領域境界要素法

Time-Domain Boundary Element Method for Neutron Diffusion Equation

山口潤*・福井卓雄**

Jun YAMAGUCHI and Takuo FUKUI

*学生会員 工修 福井大学大学院 工学研究科 (〒 910-8507 福井県福井市文京 3-9-1)

**正会員 工博 福井大学大学院教授 工学研究科 (〒 910-8507 福井県福井市文京 3-9-1)

This paper is concerned with the formulation of the time-domain operational quadrature boundary element method (TOQBEM) for the multi-group neutron diffusion problems. TOQBEM requires the Laplace transform of the fundamental solutions of the system of diffusion equations. The derivation of the fundamental solutions by Hörmander's method is shown, and the fundamental solution is expressed as a linear combination of the fundamental solutions of simple diffusion equations, say $(\nabla^2 - \kappa^2)\phi = 0$ with complex parameters κ . Numerical computation of 3-group and 4-group problems are performed and the result is compared with the numerical result of other numerical method to assure the validity of this method.

Key Words : operational quadrature boundary element method, multi-group neutron diffusion problems, fundamental solution

1. はじめに

近年、先進諸国のエネルギー利用の増加および後発国の急激な経済成長によるエネルギー需要の増大に伴って、石油をはじめとする化石燃料資源の枯渇が問題となってきた。それと同時に、これまでの化石燃料の多用によって生じた CO₂ などの温室効果ガスの大気中への大量放出により、地球の温暖化が問題になる程度にまで進行していることがわかってきた。これらの資源問題および環境問題の解決策の一つとして、原子力エネルギーの活用が大きく見直され、先進諸国におけるこれまでの原子力政策の見直し、中国・インドなどの急激な経済成長をしている国における原子力開発の急展開などが進んでいる。日本においても、今後の発電エネルギーの 30～40%を原子力によるものとするという政府方針が決定されている。

原子力利用を拡げる上で、現在もっとも大きな問題となっているのは、使用済燃料や原子炉の解体に伴って生じる核廃棄物の処理である。高レベルの核廃棄物は地下に埋設することになるが、埋設廃棄物の周辺環境への影響、あるいは原子炉解体作業におけるクリアランスレベルの評価など、土木工学においても重要な課題となっている。本研究の目的は、このような物質の放射化に関する基本的な知見を得るための手段の一つとして、中性子あるいは光子 (γ 線) の挙動を解析するための方法を開発することにある。

本論文では、多群中性子拡散問題の時間領域境界要素

法を Lubich の演算子積分法を適用して定式化する。とくに、基本解を求めることが困難なこの種の問題において、演算子積分法の適用によって必要となる、Laplace 変換域における基本解の具体的な導出法を提案する。

筆者らは、これまでに中性子拡散問題の解析手法の一つとして、時間領域境界要素法の開発を進めてきており、すでに、1 群および 2 群の問題についての成果を報告してきた¹⁾。これまでの研究においては、Lubich の演算子積分法²⁾を用いて境界要素法を定式化することにより、直接に拡散方程式の基本解を求めずに、その Laplace 変換解を用いて境界要素法を構成してきた。本研究では、この手法を多群中性子拡散問題に拡張する。

多群拡散問題における課題は、問題が多元連立偏微分方程式に支配されるので、どのようにしてその Laplace 変換域における解を決定するかである。ここでは、Laplace 変換域における連立拡散方程式の基本解を Hörmander の方法を用いて導出する。導出の過程を具体的に示し、最終的な基本解が単純な拡散問題の基本解の線形結合として表現できることを明らかにした。

本論文においては、第 2 節で中性子拡散問題について概説し、第 3 節で群中性子拡散問題の時間領域境界要素法を定式化する。第 4 節においては、具体的な計算を進めるために必要な基本解の導出法について述べる。第 5 節において、3 群および 4 群拡散問題における数値解析例を挙げ、簡単な問題における差分法と比較して、本手法の妥当性を確認する。

2. 中性子拡散問題

2.1 中性子輸送問題

ここでは、中性子や光子 (γ 線) などの中性粒子の輸送問題について概観し、ある条件のもとでは輸送問題を拡散問題として取り扱えることについて述べる。以下では、中性子の輸送問題について記述するが、光子の場合もほぼ同様の取り扱いができる。

中性子の挙動は、時刻 t に空間内の位置 x にあり、速度 v を持つ中性子の単位体積当たりの個数 $N(x, v, t)$ により表わされる。一般には、中性子速度 v の代わりに、中性子の運動エネルギー E と運動方向を表す単位方向ベクトル $\Omega = v/v$ ($v = |v|$) を変数とする中性子角密度 $N(x, E, \Omega, t)$ を用いることが多い。また、以下では中性子角密度の代わりに角度中性子束 $\psi = vN$ で式を表記する。中性子の移動は、次の微分型輸送方程式 (Boltzmann 方程式) で表わされる³⁾。

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \psi(r, E, \Omega, t)}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \psi(r, E, \Omega, t) \\ + \Sigma_t(r, E) \psi(r, E, \Omega, t) \\ = \int dv' \Sigma_t(r, E') f(r; E', \Omega' \rightarrow E, \Omega) \psi(r, E', \Omega', t) \\ + s(r, E, \Omega, t) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 Σ_t は全断面積、 $f(r; E', \Omega' \rightarrow E, \Omega)$ は全断面積に対する遷移率、 $s(r, E, \Omega, t)$ は中性子源である。左辺第 1 項は単位時間あたりの中性子角密度の変化、第 2 項は移流項、第 3 項は吸収と散乱による項である。また、右辺第 1 項は異なるエネルギーおよび運動方向の中性子角密度からの遷移分を表す。速さ v' についての積分は全エネルギー E' および全方向角 Ω' について積分するものと解釈する。(1) を正確に解くことは極めて難しく、現在は、モンテカルロ法を用いた粒子シミュレーションが広く用いられている。

各中性子束 ψ を全方向にわたって積分した量

$$\phi(x, E, t) = \int_0^{4\pi} \psi(x, E, \Omega, t) d\Omega \quad (2)$$

を導入し、単に中性子束と呼ぶことにする。輸送方程式 (1) を全方向について積分し、拡散に対する近似を導入すれば、中性子束 ϕ に関する拡散方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(x, E, t)}{\partial t} = \nabla(D \nabla \phi(x, E, t)) \\ + \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(x, E', t) dE' \\ + \chi(E) \int_0^\infty \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(x, E', t) dE' \\ - \Sigma_t(E) \phi(x, E, t) + s(x, E, t) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 D は中性子の拡散係数、 χ は核分裂スペクトルである。 Σ_t 、 Σ_s 、 Σ_f は巨視的全断面積、巨視的散乱断面積、巨視的核分裂断面積である。また、 ν は核分裂あたりの平均中性子放出数である。また、この式

では、(1) の遷移項を散乱と核分裂の項に分解して表している。

2.2 群中性子拡散問題

中性子拡散方程式 (3) は、中性子の運動エネルギー $0 < E < \infty$ について成立する。断面積 Σ はエネルギー E の関数となるので、問題の対象とするエネルギー帯を分割して群にわけ、物理量の群平均を使ってこれを解析することとする。

N 群中性子拡散方程式について考える。 i 群の中性子束を ϕ_i とするとき、 i 群の群拡散方程式は

$$(\delta_{ij} \nabla^2 - A_{ij} + B_{ij}) \phi_j + s_i = \frac{1}{C_{ij}} \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \quad (4)$$

のように表現することができる^{4),5)}。ただし、群は中性子エネルギーの大きい方から番号付けされている。以下では、添字については総和規約を適用するものとする。すなわち、繰り返される添字については $j = 1, \dots, N$ の和を取る。それぞれの定数の物理的な意味は、次の通りである。 s_i は中性子源の i 群への寄与分である。 A_{ij} は対角行列であり、その対角項は

$$A_{ii} = A_i = \frac{1}{D_i} \left(\Sigma_{ai} + \sum_{j=i+1}^N \Sigma_{i \rightarrow j} \right) \quad (5)$$

により与えられる。ここに、 Σ_{ai} は i 群の巨視的吸収断面積、 $\Sigma_{i \rightarrow j}$ は i 群から j 群への巨視的群遷移散乱断面積である。ここでは、中性子が散乱されるとエネルギーを失うと仮定しているので、 $\Sigma_{i \rightarrow j} = 0$ ($i \geq j$) である。 D_i は群拡散係数である。 B_{ij} は群間の相互作用に関する係数で

$$B_{ij} = \frac{1}{D_i} \left(\Sigma_{j \rightarrow i} + \chi_i \nu \Sigma_f^j \right) \quad (6)$$

により与えられる。ここに、 Σ_f^i は i 群の群平均巨視的核分裂断面積、 χ_i は i 群にエネルギーを持って発生する核分裂中性子の平均個数である。 C_{ij} も対角行列であり、その対角項は

$$C_{ii} = C_i = v_i D_i \quad (7)$$

で与えられる。ここに、 v_i は i 群の中性子の速度である。また、上の定数定義式 (5)、(6)、(7) においては総和規約は適用しないものとする。

初期条件および境界条件は

$$\phi_i(x, 0) = \phi_i^0(x) \quad x \in B \quad (8)$$

$$\phi_i(x, t) = \hat{\phi}_i^0(x, t) \quad x \in \partial B_1 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n}(x, y) = \hat{J}_i(x) \quad x \in \partial B_2 \quad (10)$$

となる。ここに、 B および ∂B は与えられた領域およびその境界であり、 ϕ_i^0 は領域で与えられた初期の群中性子束、 $\hat{\phi}_i^0$ および $\hat{J}_i$ はそれぞれ境界上で与えられた群中性子束および群中性子流密度である。

3. 時間領域境界要素法

3.1 境界積分方程式

N 元連立偏微分方程式 (4) の初期値境界値問題の解 ϕ_i は、もし、方程式 (4) の基本解 $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ の存在を仮定することができれば、一般化 Green 公式

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x}, t) = & \int_B G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdot) * s_j(\mathbf{y}, t) dV_y \\ & + \int_B G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \phi_j(\mathbf{y}, 0) dV_y \\ & + \int_{\partial B} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdot) * \frac{\partial \phi_j(\mathbf{y}, t)}{\partial n} dS_y \\ & - \int_{\partial B} S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdot) * \phi_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (11) \end{aligned}$$

により表すことができる。ここに、 $f * g$ は繰り込み積である。 $C(\mathbf{x})$ は自由項であり、 $\mathbf{x}$ が領域内部にあるとき 1、滑らかな境界上にあるとき 1/2、境界外部にあるとき 0 の値をとる。また、添字 y は $\mathbf{y}$ についての積分であることを示す。 $S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は二重層核であり、基本解により

$$S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)}{\partial n_y} \quad (12)$$

で与えられる。(11) において、右辺第 1 項は中性子源による項、第 2 項は初期値による項、第 3 項は境界値 $\partial \phi_i / \partial n$ による項、第 4 項は境界値 ϕ_i による項である。

(11) は $\mathbf{x}$ が境界上にあるとき、未知の境界値に関する境界積分方程式である。

3.2 演算子積分法の適用

境界積分方程式 (11) は、基本解 G_{ij} が閉じた形で得られれば適切な離散化により近似的に解くことができる。しかしながら、方程式 (4) の基本解を閉じた形で得ることは通常は困難である。そこで、基本解決定の問題と時間域における積分方程式 (11) の近似とを同時に解決する手段として、Lubich による演算子積分法²⁾を積分方程式 (11) に適用する。

Lubich は、繰り込み積

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds \quad (t \geq 0) \quad (13)$$

の離散近似

$$f * g(t) \simeq \sum_{j=0}^N \omega_j(\Delta t) g(t-j\Delta t) \quad (14)$$

の重み ω_n を、関数 f の Laplace 変換 F を用いて

$$\omega_n = \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i(nl/L)} \quad (15)$$

によって与える方法を提案した。この離散化は、(13) を F の逆変換を用いて表現し、そこに現れる微分方程式の解を差分 (線形多段階法の解) として近似表現することによって導入される。上式の $\delta(\zeta_l) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \zeta^j$

は差分法 (線形多段階法) における生成多項式の商である。また、複素数 ζ_l は半径 $\rho < 1$ の円周上の点で、 $\zeta_l = \rho e^{2\pi i(l/L)}$ である。 ρ は要求される精度により決定される。

重みに関する近似表現 (15) を用いると、境界積分方程式 (11) に現れる繰り込み積の近似表現は

$$\begin{aligned} & G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdot) * f_j(\mathbf{y}, t) \\ & \simeq \sum_{k=1}^n G_{ij}^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, (n-k)\Delta t) f_j(\mathbf{y}, k\Delta t) \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdot) * \phi_j(\mathbf{y}, t) \\ & \simeq \sum_{k=1}^n S_{ij}^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, (n-k)\Delta t) \phi_j(\mathbf{y}, k\Delta t) \quad (17) \end{aligned}$$

と書くことができる。上式における重み $G_{ij}^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, m\Delta t)$ および $S_{ij}^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, m\Delta t)$ ($m = 0, \dots, L-1$) は、(15) を用いて

$$\begin{aligned} & G_{ij}^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, m\Delta t) \\ & = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{G}_{ij} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) e^{-2\pi i(ml/L)} \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & S_{ij}^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, m\Delta t) \\ & = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{S}_{ij} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) e^{-2\pi i(ml/L)} \quad (19) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $\hat{G}_{ij}$ および $\hat{S}_{ij}$ は基本解および二重層核の Laplace 変換である。

以上によって、基本解の Laplace 変換 $\hat{G}_{ij}$ を用いることによって、基本解 G_{ij} そのものを用いることなく、境界積分方程式 (11) を時間域において離散化することができた。

3.3 時間領域境界要素法

境界および領域を要素に分割し、境界関数および領域関数について近似を導入すると境界要素法を構成することができる。

離散化後の境界積分方程式 (11) は

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x}, n\Delta t) \simeq & \sum_J \sum_{k=1}^n \bar{A}_{ij,J}^{n-k}(\mathbf{x}) s_{j,J}(k\Delta t) \\ & + \sum_J \bar{A}_{ij,J}^n(\mathbf{x}) \phi_{j,J}(0) + \sum_J \sum_{k=1}^n A_{ij,J}^{n-k}(\mathbf{x}) J_{j,J}(k\Delta t) \\ & - \sum_J \sum_{K=1}^M B_{ij,J}^{n-k}(\mathbf{x}) \phi_{j,J}(k\Delta t) \quad (20) \end{aligned}$$

となる。ここに、 M 、 M_B はそれぞれ、境界の要素分割数および領域内の要素分割数である。ここで、一定要素を用い、境界要素および領域関数についての近似関数を

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in E_i \\ 0 & \text{other} \end{cases}, \quad \bar{\beta}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \bar{E}_i \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (21)$$

とする。ここに、 E_i 、 $\bar{E}_i$ はそれぞれ、 i 番目の境界要素および領域要素である。このとき、影響関数 $A_{ij,J}^m(\mathbf{x})$, $B_{ij,J}^m(\mathbf{x})$ および $\bar{A}_{ij,J}^m(\mathbf{x})$ は

$$\begin{aligned} A_{ij,J}^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{E_J} \hat{G}_{ij} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) dS_y \right] e^{-2\pi i(ml/L)} \\ B_{ij,J}^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{E_J} \hat{S}_{ij} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) dS_y \right] e^{-2\pi i(ml/L)} \\ \bar{A}_{ij,J}^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{\bar{E}_J} \hat{G}_{ij} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) dV_y \right] e^{-2\pi i(ml/L)} \end{aligned}$$

となる。

4. 多群拡散方程式の基本解

前節で述べたように、境界積分方程式 (11) は、基本解 G_{ij} を求めなくても、基本解の Laplace 変換 $\hat{G}_{ij}$ を求めることができれば、適切に離散化して近似的に解くことができる。ここでは、基本解の Laplace 変換を求める方法について述べる。

4.1 Laplace 像空間における群拡散方程式

群拡散方程式 (4) の基本解の Laplace 変換を、(4) の Laplace 変換の基本解として求める。

群拡散方程式 (4) の Laplace 変換は

$$\begin{aligned} L_{ij} \hat{\phi}_j &= \left[\delta_{ij} \nabla^2 - \left(A_{ij} + \frac{p}{C_{ij}} \right) + B_{ij} \right] \hat{\phi}_j \\ &= (\delta_{ij} \nabla^2 - \bar{A}_{ij} + B_{ij}) \hat{\phi}_j = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

と書くことができる。ここに、 p は Laplace 変換のパラメータである。また、中性子源の項は省略した。係数行列 $\bar{A}_{ij} = A_{ij} + p/C_{ij}$ は、対角行列であるが、Laplace 変換パラメータ p を含んでいるため複素行列となる。

4.2 Laplace 像空間における基本解

(1) 基本解の誘導手順

時間項を含まない方程式 (22) の基本解は

$$L_{ij} \hat{G}_{jk}(\mathbf{x}) = -\delta_{ik} \delta(\mathbf{x}) \quad (23)$$

の解として与えられる。 $\hat{G}_{ij}$ は Hörmander の方法によって求めることができる。すなわち、作用素 L_{ij} の行列式を U とし、余因子行列を N_{ij} とすれば、作用素 U の基本解

$$U \hat{G}(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \quad (24)$$

に対して、基本解 $\hat{G}_{ij}$ は

$$\hat{G}_{ij}(\mathbf{x}) = N_{ji} \hat{G}(\mathbf{x}) \quad (25)$$

により求めることができる。

基本解 $\hat{G}_{ij}$ を求める手順を具体的に示そう。作用素 U は $L_{ij} = \delta_{ij} \nabla^2 - \bar{A}_{ij} + B_{ij}$ の行列式であるから、

係数行列 $\bar{A}_{ij} - B_{ij}$ の固有値を κ_i^2 ($i = 1, \dots, N$) とすると

$$U = (\nabla^2 - \kappa_1^2) (\nabla^2 - \kappa_2^2) \cdots (\nabla^2 - \kappa_N^2) \quad (26)$$

と表わすことができる。すなわち、 U の基本解は (24) により、作用素 $\nabla^2 - \kappa_i^2$ の基本解 $g_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, \dots, N$) により構成される。

一方、(23) は

$$L_{ij} \hat{G}_{jk}(\mathbf{x}) = L_{ij} N_{kj} \hat{G}(\mathbf{x}) = -\delta_{ik} \delta(\mathbf{x}) \quad (27)$$

と書くことができるから、これを (24) と比較すれば、作用素間の関係として

$$L_{ij} N_{kj} = \delta_{ik} U \quad (28)$$

が得られる。(23), (26), (28) の Fourier 変換をとって考えれば、基本解 $\hat{G}_{ij}$ の Fourier 変換は作用素 L_{ij} の Fourier 変換の逆であるから、形式的に N_{ji}/U の Fourier 変換に等しい。作用素 N_{ji} の各成分は ∇^2 の高々 $N-1$ 次の作用素であるから、 N_{ji}/U の Fourier 変換は部分分数分解することができて、作用素 $\nabla^2 - \kappa_i^2$ ($i = 1, \dots, N$) の Fourier 変換の線形結合として表すことができる。すなわち、基本解 $\hat{G}_{ij}$ は、作用素 $\nabla^2 - \kappa_i^2$ の基本解 g_i を用いて

$$\hat{G}_{ij}(\mathbf{x}) = M_{ij}^{(1)} g_1(\mathbf{x}) + M_{ij}^{(2)} g_2(\mathbf{x}) + \cdots + M_{ij}^{(N)} g_N(\mathbf{x}) \quad (29)$$

と表わすことができる。

作用素 $\nabla^2 - \kappa^2$ の基本解

$$(\nabla^2 - \kappa^2) g(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \quad (30)$$

については良く知られており

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa|\mathbf{x}|) \quad (2 \text{ 次元}), \quad \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\kappa|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \quad (3 \text{ 次元}) \quad (31)$$

である。ここに、 K_0 は第 2 種変形 Bessel 関数である。

(2) 4 群拡散問題における基本解の例

少し冗長にはなるが、4 群拡散問題における具体例を挙げて、上の誘導法の確認をしておこう。まず、Laplace 変換域における 4 群拡散方程式を行列表現すると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 - \bar{A}_1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & \nabla^2 - \bar{A}_2 & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & \nabla^2 - \bar{A}_3 & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & \nabla^2 - \bar{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

左辺の作用素行列の行列式は以下のである。

$$\begin{aligned} U &= \nabla^8 - (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4) \nabla^6 \\ &\quad + (\bar{A}_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_4 + \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_2 \bar{A}_4 + \bar{A}_3 \bar{A}_4) \nabla^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -B_{12}B_{21} - B_{13}B_{31} - B_{14}B_{41} \\
& -B_{23}B_{32} - B_{24}B_{42} - B_{34}B_{43}) \nabla^4 \\
& + (-\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 - \bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4 - \bar{A}_3\bar{A}_4\bar{A}_1 - \bar{A}_4\bar{A}_1\bar{A}_2 \\
& + \bar{A}_1B_{23}B_{32} + \bar{A}_2B_{34}B_{43} + \bar{A}_3B_{41}B_{14} + \bar{A}_4B_{12}B_{21} \\
& + \bar{A}_2B_{31}B_{13} + \bar{A}_3B_{42}B_{24} + \bar{A}_4B_{13}B_{31} + \bar{A}_1B_{24}B_{42} \\
& + \bar{A}_3B_{12}B_{21} + \bar{A}_4B_{23}B_{32} + \bar{A}_1B_{34}B_{43} + \bar{A}_2B_{41}B_{14} \\
& + B_{12}B_{23}B_{31} + B_{23}B_{34}B_{42} \\
& + B_{34}B_{41}B_{13} + B_{41}B_{12}B_{24} \\
& + B_{32}B_{21}B_{13} + B_{43}B_{32}B_{24} \\
& + B_{14}B_{43}B_{31} + B_{21}B_{14}B_{42}) \nabla^2 \\
& + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4 \\
& - \bar{A}_1\bar{A}_2B_{34}B_{43} - \bar{A}_1\bar{A}_3B_{24}B_{42} - \bar{A}_1\bar{A}_4B_{23}B_{32} \\
& - \bar{A}_2\bar{A}_3B_{14}B_{41} - \bar{A}_2\bar{A}_4B_{13}B_{31} - \bar{A}_3\bar{A}_4B_{12}B_{21} \\
& - \bar{A}_1B_{23}B_{34}B_{42} - \bar{A}_2B_{34}B_{41}B_{13} \\
& - \bar{A}_3B_{41}B_{12}B_{24} - \bar{A}_4B_{12}B_{23}B_{31} \\
& - \bar{A}_1B_{43}B_{32}B_{24} - \bar{A}_2B_{14}B_{43}B_{31} \\
& - \bar{A}_3B_{21}B_{14}B_{42} - \bar{A}_4B_{32}B_{21}B_{13} \\
& - B_{12}B_{23}B_{34}B_{41} - B_{13}B_{34}B_{42}B_{21} - B_{14}B_{42}B_{23}B_{31} \\
& - B_{21}B_{14}B_{43}B_{32} - B_{31}B_{12}B_{24}B_{43} - B_{41}B_{13}B_{32}B_{24} \\
& + B_{12}B_{21}B_{34}B_{43} + B_{13}B_{31}B_{24}B_{42} + B_{14}B_{41}B_{23}B_{32} \\
& = (\nabla^2 - \kappa_1^2)(\nabla^2 - \kappa_2^2)(\nabla^2 - \kappa_3^2)(\nabla^2 - \kappa_4^2) \quad (33)
\end{aligned}$$

根 $z_1 = \kappa_1^2$ 、 $z_2 = \kappa_2^2$ 、 $z_3 = \kappa_3^2$ 、 $z_4 = \kappa_4^2$ は複素係数の 4 次方程式として、数値的に求めることができる。

次に、余因子行列 N_{ij} を求めると、その一般形は

$$a\nabla^6 + b\nabla^4 + c\nabla^2 + d \quad (34)$$

となる。ここに、 N_{ij} の対角項について $a = 1$ 、非対角項に対して $a = 0$ である。ここで、形式的に N_{ij}/U と書いて、その部分分数分解

$$\begin{aligned}
& \frac{a\nabla^6 + b\nabla^4 + c\nabla^2 + d}{(\nabla^2 - \kappa_1^2)(\nabla^2 - \kappa_2^2)(\nabla^2 - \kappa_3^2)(\nabla^2 - \kappa_4^2)} \\
& = \frac{A}{\nabla^2 - \kappa_1^2} + \frac{B}{\nabla^2 - \kappa_2^2} + \frac{C}{\nabla^2 - \kappa_3^2} + \frac{D}{\nabla^2 - \kappa_4^2} \quad (35)
\end{aligned}$$

を行おう。係数 A 、 B 、 C 、 D を決定する条件は連立方程式

$$A + B + C + D = a \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
& -(\kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2)A - (\kappa_3^2 + \kappa_4^2 + \kappa_1^2)B \\
& -(\kappa_4^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2)C - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)D = b \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\kappa_2^2\kappa_3^2 + \kappa_3^2\kappa_4^2 + \kappa_4^2\kappa_2^2)A \\
& + (\kappa_1^2\kappa_3^2 + \kappa_3^2\kappa_4^2 + \kappa_4^2\kappa_1^2)B \\
& + (\kappa_1^2\kappa_2^2 + \kappa_2^2\kappa_4^2 + \kappa_4^2\kappa_1^2)C \\
& + (\kappa_1^2\kappa_2^2 + \kappa_2^2\kappa_3^2 + \kappa_3^2\kappa_1^2)D = c \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\kappa_2^2\kappa_3^2\kappa_4^2A - \kappa_3^2\kappa_4^2\kappa_1^2B \\
& -\kappa_4^2\kappa_1^2\kappa_2^2C - \kappa_1^2\kappa_2^2\kappa_3^2D = d \quad (39)
\end{aligned}$$

となる。この方程式は次のように考えると簡単に解くことができる。 (i, j, k, l) を $(1, 2, 3, 4)$ の任意の組み合わせと考える。(36)、(37)、(38)、(39) の 4 式に、それぞれ、 κ_i^6 、 κ_i^4 、 κ_i^2 、1 を乗じて加え合わせると、 A 、 B 、

C 、 D の係数は

$$\begin{aligned}
& \kappa_i^6 - (\kappa_j^2 + \kappa_k^2 + \kappa_l^2) \kappa_i^4 \\
& + (\kappa_j^2\kappa_k^2 + \kappa_k^2\kappa_l^2 + \kappa_l^2\kappa_j^2) \kappa_i^2 - \kappa_j^2\kappa_k^2\kappa_l^2 \\
& = (\kappa_i^2 - \kappa_j^2)(\kappa_i^2 - \kappa_k^2)(\kappa_i^2 - \kappa_l^2) \quad (40)
\end{aligned}$$

となる。もし、 $i = j$ 、 $i = k$ 、 $i = l$ のいずれかの条件を満足すると、この値は 0 である。すなわち、(36)、(37)、(38)、(39) に $i = 1, \dots, 4$ の κ_i^6 、 κ_i^4 、 κ_i^2 、1 を乗じて加え合わせるにより、 A 、 B 、 C 、 D は決定できて

$$\begin{aligned}
A &= \frac{a\kappa_1^6 + b\kappa_1^4 + c\kappa_1^2 + d}{(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)(\kappa_1^2 - \kappa_3^2)(\kappa_1^2 - \kappa_4^2)} \\
B &= \frac{a\kappa_2^6 + b\kappa_2^4 + c\kappa_2^2 + d}{(\kappa_2^2 - \kappa_3^2)(\kappa_2^2 - \kappa_4^2)(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)} \\
C &= \frac{a\kappa_3^6 + b\kappa_3^4 + c\kappa_3^2 + d}{(\kappa_3^2 - \kappa_4^2)(\kappa_3^2 - \kappa_1^2)(\kappa_3^2 - \kappa_2^2)} \\
D &= \frac{a\kappa_4^6 + b\kappa_4^4 + c\kappa_4^2 + d}{(\kappa_4^2 - \kappa_1^2)(\kappa_4^2 - \kappa_2^2)(\kappa_4^2 - \kappa_3^2)} \quad (41)
\end{aligned}$$

となる。

したがって、余因子 N_{ij} に対応する係数を A_{ij} 、 B_{ij} 、 C_{ij} 、 D_{ij} とすると、4 群拡散問題の Laplace 変換域の基本解 $\hat{G}_{ij}$ は

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{ij}(r) &= A_{ji}g(\kappa_1 r) + B_{ji}g(\kappa_2 r) \\
&+ C_{ji}g(\kappa_3 r) + D_{ji}g(\kappa_4 r) \quad (42)
\end{aligned}$$

となる。

5. 数値解析例

本手法の妥当性を確認するために数値解析を行った。

5.1 手法の妥当性の確認

本手法による数値解が正解を近似するものであることを確認した。一般に、この種の問題の解析解を得ることは困難なため、代用として差分法を用いることとした。ここでは、簡単な 1 次元問題を 2 次元解析する。以下の解析では、係数等はすべて無次元化している。

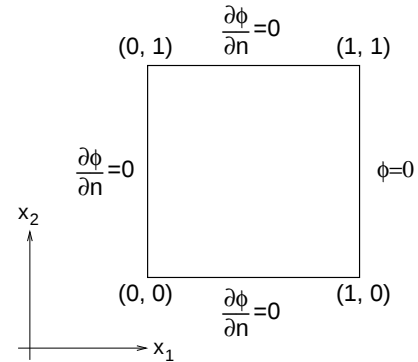


図-1 解析領域

解析対象領域および境界条件を図-1 に示す。領域は 1 辺の長さが 1 の正方形領域とし、図に示すように境

界条件を与えた。ただし、群ごとの境界値を与えることは一般に困難であるので、すべての群において、境界値を 0 としている。解析は 3 群拡散問題および 4 群拡散問題で行い、中性子源 $s_1 = 1$ を全領域で与えている。初期値はすべての群において $\phi_i = 0$ である。解析に用いた定数を、3 群拡散問題については表-1 に、4 群拡散問題については表-2 に示す。

表-1 3 群拡散解析の材料定数

	1	2	3
A	3.2	1.3	1.8
B	0.0	1.2	0.8
	1.4	0.0	0.5
	2.2	1.3	0.0
C	1.0	1.5	1.0

表-2 4 群拡散解析の材料定数

	1	2	3	4
A	3.2	1.3	1.0	0.5
B	0.0	1.2	0.5	0.3
	1.4	0.0	0.3	0.2
	1.2	0.5	0.0	0.1
	1.0	0.8	0.2	0.0
C	1.0	1.5	1.0	1.0

境界の各辺は 10 分割して要素とし、全部で 40 要素とした。時間増分は単位時間 T に対して、3 群拡散問題については $\Delta t = T/128$ 、4 群拡散問題については $\Delta t = T/256$ とした。解析期間は $(0, 4T]$ である。単位時間は、拡散に関する係数 C_i の最小値によって決定している。

参照解は 1 次元問題の解を以下に示す差分法により求めた。3 群拡散問題では (4) により、1 次元拡散方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A_{11} \right) \phi_1 + B_{12} \phi_2 + B_{13} \phi_3 + s_1 &= \frac{1}{C_{11}} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\ B_{21} \phi_1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A_{22} \right) \phi_2 + B_{23} \phi_3 + s_2 &= \frac{1}{C_{22}} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \\ B_{31} \phi_1 + B_{32} \phi_2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A_{33} \right) \phi_3 + s_3 &= \frac{1}{C_{33}} \frac{\partial \phi_3}{\partial t} \end{aligned} \quad (43)$$

となる。区間 (a, b) を M 分割し、その増分を Δx とし、時間増分を Δt とする。格子点は $x_i = a + i\Delta x$ 、 $t_j = j\Delta t$ となる。時間に関する導関数を前進差分で表現し、(43) の格子点 (i, j) における差分表現を $\phi_1^{i,j+1}$ 、 $\phi_2^{i,j+1}$ 、 $\phi_3^{i,j+1}$ について解けば

$$\begin{aligned} \phi_1^{i,j+1} &= \phi_1^{i,j} + C_{11} \Delta t \left(\frac{\phi_1^{i-1,j} - 2\phi_1^{i,j} + \phi_1^{i+1,j}}{\Delta x^2} \right. \\ &\quad \left. - A_{11} \phi_1^{i,j} + B_{12} \phi_2^{i,j} + B_{13} \phi_3^{i,j} + s_1^{i,j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{i,j+1} &= \phi_2^{i,j} + C_{22} \Delta t \left(\frac{\phi_2^{i-1,j} - 2\phi_2^{i,j} + \phi_2^{i+1,j}}{\Delta x^2} \right. \\ &\quad \left. - B_{21} \phi_1^{i,j} + A_{22} \phi_2^{i,j} + B_{23} \phi_3^{i,j} + s_2^{i,j} \right) \\ \phi_3^{i,j+1} &= \phi_3^{i,j} + C_{33} \Delta t \left(\frac{\phi_3^{i-1,j} - 2\phi_3^{i,j} + \phi_3^{i+1,j}}{\Delta x^2} \right. \\ &\quad \left. - B_{31} \phi_1^{i,j} + B_{32} \phi_2^{i,j} + A_{33} \phi_3^{i,j} + s_3^{i,j} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

となり、これを j について逐次的に解いていくことで近似解を得る。

ここでは、参照解として十分な精度を持った解を得るために、離散条件は厳しくしている。区間 $[0, 1]$ を 200 分割し、時間増分は $\Delta t = T/160,000$ である。多群問題の場合には、安定解を得るための時間増分の条件が厳しくなり、今回の条件では $\Delta t \leq T/80,000$ 程度となるが、解析では相当小さめにとっている。

表-3 3 群拡散解析における本手法の解析結果と参照解との比較

	時刻 t	1	2	4
1 群	BEM	0.23343	0.25093	0.25654
	FDM	0.24045	0.25767	0.26297
	差 (%)	3.01	2.69	2.51
2 群	BEM	0.10694	0.11669	0.12604
	FDM	0.10713	0.11668	0.12556
	差 (%)	0.48	0.01	0.38
3 群	BEM	0.11710	0.16393	0.17968
	FDM	0.11782	0.16404	0.17913
	差 (%)	0.57	0.07	0.31

表-4 4 群拡散解析における本手法の解析結果と参照解との比較

	時刻 t	1	2	4
1 群	BEM	0.23347	0.24563	0.24809
	FDM	0.23718	0.24926	0.25160
	差 (%)	1.59	1.48	1.41
2 群	BEM	0.084819	0.10833	0.11370
	FDM	0.085123	0.10851	0.11330
	差 (%)	0.36	0.17	0.00
3 群	BEM	0.088990	0.10758	0.11121
	FDM	0.089259	0.10771	0.11115
	差 (%)	0.30	0.12	0.05
4 群	BEM	0.094116	0.12126	0.12721
	FDM	0.094401	0.12135	0.12698
	差 (%)	0.30	0.07	0.18

数値解析結果を、3 群拡散問題については表-3 に、4 群拡散問題については表-4 に示す。この結果は、点 $(0, 0.5)$ における数値解を参照解と比較したものである。3 群拡散問題、4 群拡散問題ともに、第 1 群の値の差がやや大きいものの、その他の群の差は 1% 以内である。第

1 群の差は中性子源の存在によるものであるのか、本手法によるものであるのかどうかは不明である。これらの結果より、本手法による解析精度が満足のいくものであることが確認できた。

5.2 一様中性子源をもつ正方形領域

応用例として、一様中性子源をもつ正方形領域の解析を行った。図-2 に示すように、境界条件を、一对の隣り合う 2 辺が $\partial\phi/\partial n = 0$ 、他の辺で $\phi = 0$ とし、対称軸が x_1, x_2 -軸と一致するような解析領域 2 において解析を行った。

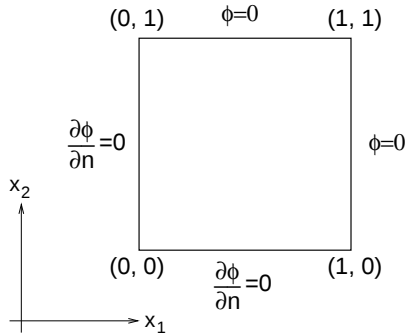


図-2 解析領域 2

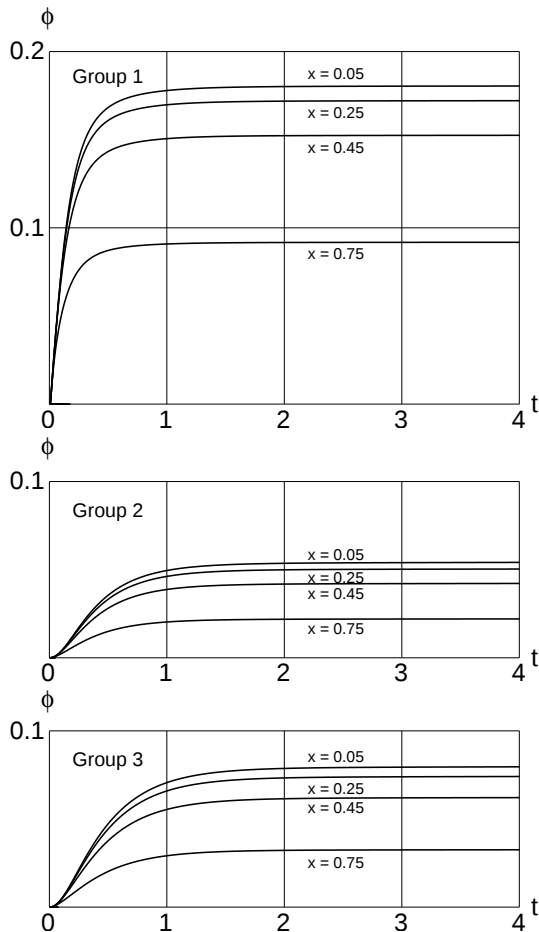


図-3 3 群拡散解析の x_1 -軸上の代表点における各群の中性子束の時間変化

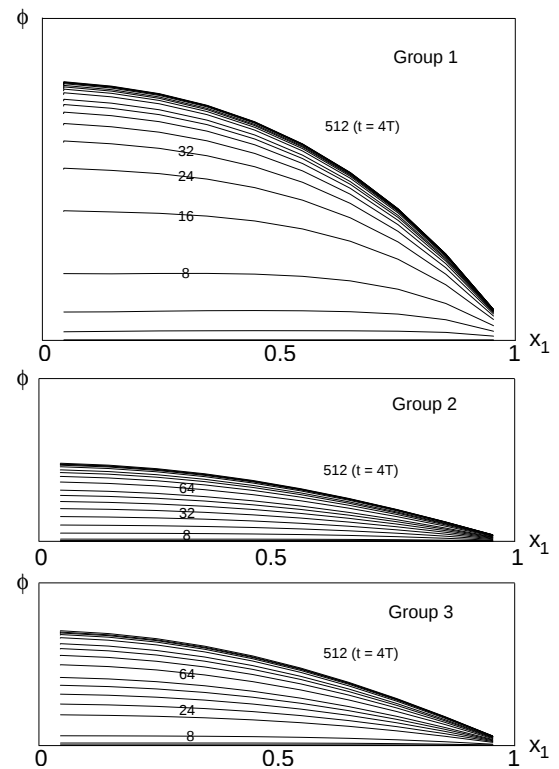


図-4 3 群拡散解析の x_1 -軸上における各群の中性子束の分布の変化

解析に用いた定数は先程の例と同様に、3 群拡散問題については表-1 に、4 群拡散問題については表-2 に示したものを、要素数、時間増分も同じ値を用いている。

図-3 に 3 群拡散問題の場合の x_1 -軸上の代表点における各群の中性子束の時間変化を示す。また、図-4 に 3 群拡散問題の場合の x_1 -軸上における各群の中性子束の分布の変化を示す。中性子源を 1 群においた解析を行っているため、中性子束の増加は 1 群から始まっているが、時間とともに 2、3 群にも広がって、定常状態に近づく様子がわかる。

図-5 に、4 群拡散問題の場合の x_1 -軸上の代表点における各群の中性子束の時間変化を示す。また、図-6 に 4 群拡散問題の場合の x_1 -軸上における各群の中性子束の分布の変化を示す。こちらも 3 群拡散問題と同様に、中性子源を 1 群においた解析を行っているため、中性子束の増加は 1 群から始まっているが、時間とともに 2、3、4 群にも広がって、定常状態に近づく様子がわかる。

6. おわりに

群中性子拡散方程式の時間領域境界要素法を演算子積分法を用いて定式化した。とくに、時間領域における基本解を求めることが難しい群拡散方程式において、演算子積分法を用いることにより、基本解の Laplace 変

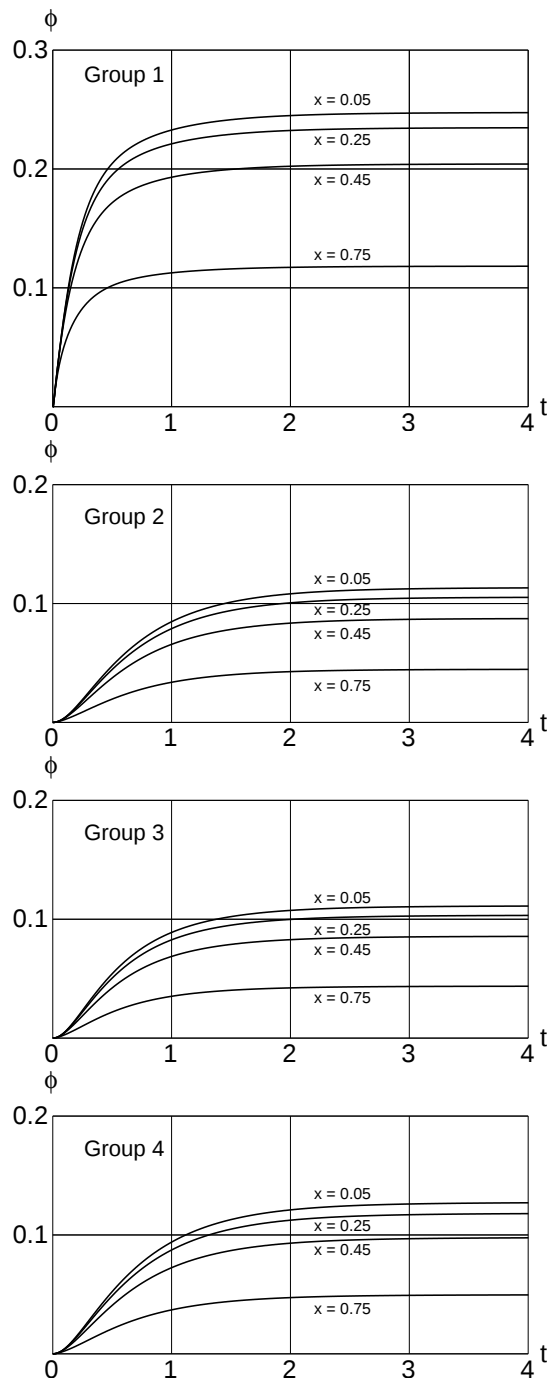


図-5 4群拡散解析の x_1 -軸上の代表点における各群の中性子束の時間変化

換を用いて境界要素法が定式化できることを示し、具体的に基本解の Laplace 変換を導出する方法を提案し、4群拡散問題において基本解の導出の課程を示した。さらに、3群および4群拡散問題について数値解析を行い、本手法が妥当であることを確認した。

多群中性子拡散解析問題においてはまだまだ課題が多い。一つは、群の数が多くなったときの基本解の一般的な導出法を開発することである。これについては、現在研究が進行中であり、原理的には群の数に制約さ

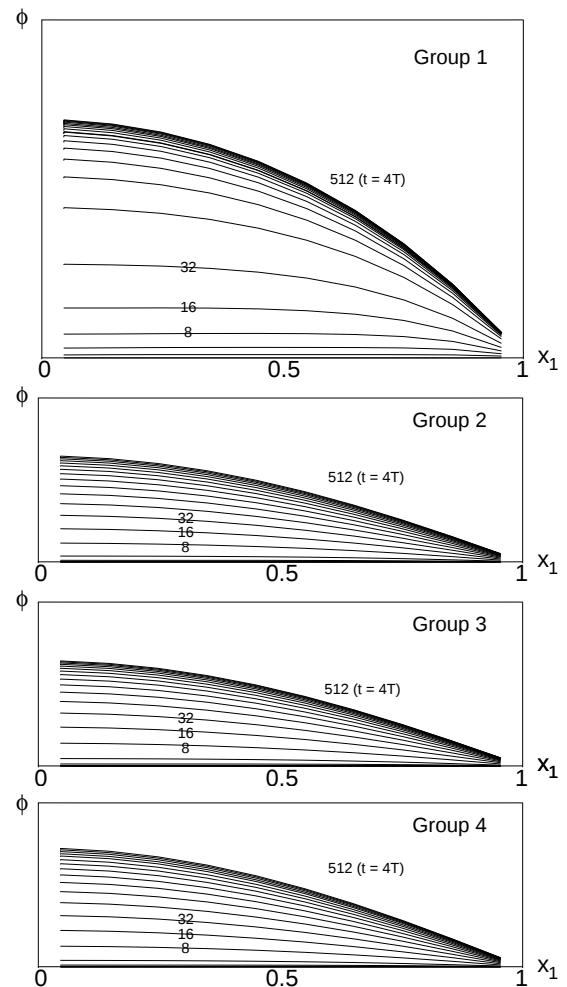


図-6 4群拡散解析の x_1 -軸上における各群の中性子束の分布の変化

れない手法を開発中である。いま一つは、適切な時間増分を決定するための条件を見つけ出すことである。これまでの経験によれば、群の数が増えるほど時間増分の制約が大きくなり、場合によっては数値解が発散することが知られている。解析の安定のための条件が是非必要である。

参考文献

- 1) 福井卓雄：演算子積分法による中性子拡散問題の時間領域境界要素法，計算工学講演会論文集，12，pp.861-864，2007.
- 2) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I and II, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129-145, pp. 413-425, 1988.
- 3) Bell, G.I. and S. Glasstone : *Nuclear Reactor Theory*, Van Nostrand, 1970.
- 4) Lamarsh, J.R. and A.J. Baratta, *Introduction to Nuclear Engineering*, 3rd ed., Pearson Education Inc., 2001.
- 5) Stacey, W.M., *Nuclear Reactor Physics*, 2nd ed., Wiley-VHC, 2007.

(2009年4月9日 受付)