

3次元動弾性学における周期多重極法と Wood の anomaly に関する基礎的考察

A periodic FMM for three dimensional elastodynamics
with considerations related to Wood's anomaly

飯盛浩司*・大谷佳広**・吉川仁***・西村直志****

Hiroshi ISAKARI, Yoshihiro OTANI, Hitoshi YOSHIKAWA and Naoshi NISHIMURA

*学生会員 修(工) 京都大学大学院 学生 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C)

**正会員 博(情) 株式会社 IHI (〒 135-8710 江東区豊洲三丁目 1-1)

***正会員 博(工) 京都大学 助教 学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

****正会員 工博 京都大学大学院 教授 情報学研究科複雑系科学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

An FMM (fast multipole method) for periodic boundary value problems of three dimensional elastodynamics is investigated as an extension of studies on periodic FMMs in Helmholtz' and Maxwell's equations. The efficiency and accuracy of the proposed method are confirmed through a numerical test. The performance of the proposed method near Wood's anomaly is also investigated.

Key Words : FMM, BIEM, periodic boundary value problem, elastodynamics

1. 序論

境界積分方程式法は偏微分方程式の有力な数値解法の一つである。解析する領域の境界のみを離散化すればよいという著しい特徴を備える。また、放射条件を自然に扱えるため、波動問題に適している¹⁾。従来は、偏微分方程式を離散化して得られる代数方程式の係数行列が一般には密となるため、その求解にかかるコストが大きく、大規模問題には不向きであるとされてきたが、種々の高速解法の発展によりこの問題も解決しつつある。特に高速多重極法²⁾³⁾⁴⁾は、従来の方法では要素数 N に対して少なくとも $O(N^2)$ の計算量を要していた行列・ベクトル積の計算を $O(N(\log N)^\alpha)$ ($\alpha \geq 0$) で計算することを可能にする手法であり、盛んに研究されている。高速多重極法と組み合わせることにより、境界積分方程式法は大規模問題の高速解法へと発展しつつある。特に動弾性学においては、Fujiwara⁵⁾以来、高速多重極境界積分方程式法の研究が進められている。

一方、近年、フォトリック結晶やメタマテリアルといった、周期構造に起因して特徴的な性質を示す新しい材料に注目が集まっている。そのため主に光学や電磁気学においては、波動周期境界値問題を扱った研究が進められており、種々の興味深い現象が取り扱われている。例えば光学では、Wood の anomaly と呼ばれる現象が知られている。これは、周期的に配置された散乱体に波を入射する際に、入射角や波長のわずかな変化で場が劇的に変化する現象である。Wood の anomaly には Rayleigh type の anomaly と resonance type の anomaly の 2 種類があり、Rayleigh type の anomaly

は周期 Green 関数が発散することに由来するものであり、resonance type の anomaly は境界値問題の非自明解に由来するものである。Wood の anomaly 周辺では、数値計算の精度が悪化することが知られており、盛んに研究が行われている⁶⁾。

弾性波動においても、支配方程式の類似性から光学や電磁気学等と同様の現象が起こると考えられるが、このような現象を扱った研究は多くはない。例えば Maslov⁷⁾は、比較的波長の長い平面 P 波を周期的な散乱体の配置された面に対して垂直に入射した場合について、Wood の anomaly を実験的に検出し、さらに解析的な手法を用いたモデルを構築している。しかしながら、初等的な手法を用いたモデルであるため、例えば斜め入射の場合や、高周波な問題への適用は困難であると考えられる。より複雑な問題の解析のためには、周期弾性波動問題を効率的に解析できる数値解析手法の開発が不可欠である。

このように、周期境界値問題の重要性がますます高まってきている。そこで、著者らのグループは、Helmholtz 方程式⁸⁾ や Maxwell 方程式⁹⁾ の周期波動問題の解析に適した周期多重極法を近年開発し、2 次元周波数域動弾性学へと拡張した¹⁰⁾。本研究では、これを 3 次元周波数域動弾性学へと拡張した。具体的には、3 次元周波数域動弾性学の周期多重極法を開発し、その精度の検討を行った。また、先述の通り、数値計算の精度が悪化すると予想される Wood の anomaly を誘起する条件近辺において、その精度ならびに代数方程式の反復解法 (GMRES) の収束性についても検討を行った。

なお、本論文の基礎的な性格を考慮し、数値計算対

象はもっとも基本的な周期境界値問題であって、解析解が容易に得られる半無限領域への平面波入射問題に限定した。

2. 非周期境界値問題の算法

本論文の主題である周期多重極法の定式化を行うためには、周期的でない問題に対する多重極法の諸式が必要となる。したがって本節では、非周期問題の多重極法について、必要最小限の定式化を記し、周期多重極法の定式化の準備を行う。

2.1 周期的でない境界値問題

等方で均質な媒質に対する周波数域動弾性問題を考える。例えば図-1のような、 $\mathbb{R}^3$ 内の空孔による入射平面波 $\mathbf{u}^I$ の散乱問題を想定する。物体力は作用しないものとする。このとき、解くべき境界値問題は次のようである。

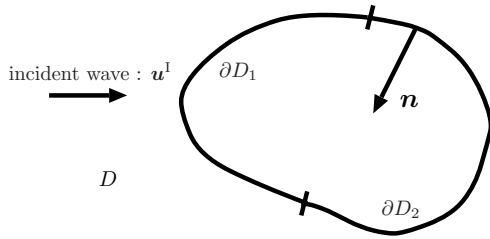


図-1 周期的でない境界値問題の一例

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad (1)$$

$$u_i = u_i^0 \quad \text{on } \partial D_1 \quad (2)$$

$$t_i := C_{ijkl} u_{k,l} n_j = t_i^0 \quad \text{on } \partial D_2 \quad (3)$$

$$\text{散乱場 } u_i - u_i^I \text{ に対する無限遠での放射条件} \quad (4)$$

ここに、 u_i は変位、 (λ, μ) は Lamé 定数であり、これを用いて弾性テンソル C_{ijkl} は次のように定義される。

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

また、 ρ は密度、 ω は周波数、 n_j は境界における外向き単位法線ベクトル、 u_i^0, t_i^0 はそれぞれ、 $\partial D_1, \partial D_2$ 上で与えられた関数である。

2.2 境界積分方程式

境界積分方程式法では、支配方程式 (1) を等価な境界積分方程式に変換し、これを適当な方法で離散化した代数方程式を解くことになる。

さて、式 (1) に対応する外部問題の境界積分方程式

は以下のとおりである。

$$\frac{1}{2} u_i(x) = u_i^I(x) + \int_{\partial D} \Gamma_{ij}(x, y, \omega) t_j(y) dS_y - \text{p.v.} \int_{\partial D} \Gamma_{Iij}(x, y, \omega) u_j(y) dS_y \quad (5)$$

ここに、 u_i^I は入射波、p.v. は主値、 $\Gamma_{ij}, \Gamma_{Iij}$ は各々、3次元周波数域動弾性学の放射条件 (式 (4)) を満たす基本解および二重層核であり、次式で表される。

$$\Gamma_{ij}(x, y, \omega) = \frac{1}{\mu} \left[G_T \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (G_T - G_L) \right] \quad (6)$$

$$\Gamma_{Iij}(x, y, \omega) = \frac{\partial}{\partial y_l} \Gamma_{ik}(x, y, \omega) C_{klmj} n_m(y) \quad (7)$$

G_L, G_T は Helmholtz 方程式の基本解で、次式で表される。

$$G_L = \frac{e^{ik_L |\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, G_T = \frac{e^{ik_T |\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad (8)$$

ここに、 k_L, k_T は各々、縦波および横波の波数であり、次式で表される。

$$k_L = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, k_T = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$$

なお、 k_L, k_T に関して同様の関係が成り立つため、次節以降では k_L, k_T を含む式について、

$$G_{L,T} = \frac{e^{ik_{L,T} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

などと書くことにする。

2.3 高速多重極法

高速多重極法は積分方程式に現れる積分を高速に計算する手法である。積分方程式を離散化して得られる代数方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ のソルバーに反復解法を用いることで、 $\mathbf{b}$ を高速に計算するだけでなく、代数方程式の求解 ($A\mathbf{x}$ の計算) にも高速多重極法を適用することができる。本小節では、高速多重極法に必要な諸式を示す。

周波数域波動問題の高速多重極法においては、基本解の展開方法が2種類存在し、各々、

- 級数展開型多重極法 (低周波数域に用いる)
- diagonal form (高周波数域に用いる)

と呼ばれる。以下、本研究で用いた級数展開型多重極法について概説する。詳細は Rokhlin²⁾³⁾, Nishimura⁴⁾ 等で解説されている。

動弾性学の高速多重極法は、Helmholtz 方程式に対するそれとほぼ同様にして定式化を行うことができる。従って、定式化の準備として、3次元 Helmholtz 方程式の基本解 $G_{L,T}$ に関連する諸式を示す。Gegenbauer の加法定理を用いると、3次元 Helmholtz 方程式の基

本解は次のように展開できる。

$$G_{L,T}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{ik_{L,T}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1)(-1)^m I_n^{-m}(\vec{Oy}) O_n^m(\vec{Ox})$$

ただし、 $|\vec{Ox}| > |\vec{Oy}|$

また、関数 I_n^m, O_n^m は各々、3次元 Helmholtz 方程式の全平面で正則な解、原点において特異な解を表しており、次式で表される。

$$I_n^m(\vec{Ox}, k_{L,T}) = j_n(k_{L,T}|\vec{Ox}|) Y_n^m\left(\frac{\vec{Ox}}{|\vec{Ox}|}\right)$$

$$O_n^m(\vec{Ox}, k_{L,T}) = h_n^{(1)}(k_{L,T}|\vec{Ox}|) Y_n^m\left(\frac{\vec{Ox}}{|\vec{Ox}|}\right)$$

j_n は n 次の球ベッセル関数、 $h_n^{(1)}$ は n 次の第一種球ハンケル関数である。また、 Y_n^m は球面調和関数である。本論文では、 Y_n^m の定義として次式を採用していることに注意されたい。

$$Y_n^m(\hat{x}) = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

ここに、 (r, θ, ϕ) は点 $\mathbf{x}$ の球座標、 $\hat{x} = \frac{\vec{Ox}}{r}$ である。また、 P_n^m はルジャンドル陪関数であり、次式で定義される。

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (m \geq 0)$$

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \quad (m \geq 0)$$

P_n はルジャンドル多項式である。

I_n^m および O_n^m は次のように展開できる。

$$I_n^m(\vec{Ox}) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) U_{n,n'}^{m,m'}(\vec{OO'}) I_{n'}^{m'}(\vec{O'x}) \quad (9)$$

$$O_n^m(\vec{Ox}) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) T_{n,n'}^{m,m'}(\vec{OO'}) I_{n'}^{m'}(\vec{O'x}) \quad (10)$$

ただし、式 (10) においては $|\vec{OO'}| > |\vec{O'x}|$ を仮定して

いる。ここに、

$$E_{n,n',n''}^{m,m',m''} = \frac{i^{n'+n''-n}}{4\pi} (-1)^{m'} (-1)^{m''} \int_{|\hat{x}|=1} Y_n^m(\hat{x}) Y_{n'}^{-m'}(\hat{x}) Y_{n''}^{-m''}(\hat{x}) dS_{\hat{x}} \quad (11)$$

$$U_{n,n'}^{m,m'}(\vec{Ox}, k_{L,T}) = \sum_{n''=0}^{\infty} \sum_{m''=-n''}^{n''} (2n''+1) E_{n,n',n''}^{m,m',m''} I_{n''}^{m''}(\vec{Ox}, k_{L,T}) \quad (12)$$

$$T_{n,n'}^{m,m'}(\vec{Ox}, k_{L,T}) = \sum_{n''=0}^{\infty} \sum_{m''=-n''}^{n''} (2n''+1) E_{n,n',n''}^{m,m',m''} O_{n''}^{m''}(\vec{Ox}, k_{L,T}) \quad (13)$$

である。

以上で準備された諸式を用いて、次の積分 $V_i(\mathbf{x})$ 、すなわち、式 (5) の積分の $S \subset \partial D$ 上での評価を行う。

$$V_i(x) = \int_S \Gamma_{ij}(x, y, \omega) t_j(y) dS_y - \text{p.v.} \int_S \Gamma_{Iij}(x, y, \omega) u_j(y) dS_y \quad (14)$$

S は x から十分離れた ∂D の部分であるとする。 X を x の近傍の点、 Y を S の近傍の点として、 $|\vec{YX}| > |\vec{Xx}|$ 及び $|\vec{Yy}| < |\vec{Yx}| (y \in S)$ が成立するとき、次の局所展開を得る。

$$V_i(\mathbf{x}) = \frac{i}{4\pi\mu k_T^2} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} I_{n'}^{m'}(\vec{Xx}, k_L) k_L L_{n',m'}^L(X) + e_{ipr} \frac{\partial}{\partial x_p} I_{n'}^{m'}(\vec{Xx}, k_T) k_T L_{r,n',m'}^T(X) \right\} \quad (15)$$

ここに、 $L_{n,m}^L, L_{r;n,m}^T$ は局所展開係数であり、次式で表される (M2L 公式)。

$$L_{n',m'}^L(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) T_{n,n'}^{m,m'}(\vec{YX}, k_L) M_{n,m}^L(Y) \quad (16)$$

$$L_{r;n',m'}^T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) T_{n,n'}^{m,m'}(\vec{YX}, k_T) M_{r;n,m}^T(Y) \quad (17)$$

また、 $M_{n,m}^L$ および $M_{r;n,m}^T$ は多重極モーメントであ

り、次式で表される。

$$M_{n,m}^L(Y) = \int_S (-1)^m \left\{ t_j(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} - u_j(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) \left(\lambda \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial y_l} + 2\mu \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \right\} I_n^{-m}(\vec{Y}\mathbf{y}, k_L) dS_y \quad (18)$$

$$M_{r;n,m}^T(Y) = \int_S (-1)^m \left\{ t_j(\mathbf{y}) e_{jqr} \frac{\partial}{\partial y_q} - u_j(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) \mu \left(e_{kqr} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_q} + e_{jqr} \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_q} \right) \right\} I_n^{-m}(\vec{Y}\mathbf{y}, k_T) dS_y \quad (19)$$

M2M 公式および L2L 公式は、多重極モーメント (式 (18),(19))、局所展開 (式 (15)) において I_n^m を展開することにより得られる。

$$M_{n,m}^L(Y) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) U_{n',n}^{m',m}(\vec{Y}'\mathbf{Y}, k_L) M_{n',m'}^L(Y') \quad (20)$$

$$M_{r;n,m}^T(Y) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) U_{n',n}^{m',m}(\vec{Y}'\mathbf{Y}, k_T) M_{r;n',m'}^T(Y') \quad (21)$$

$$L_{n,m}^L(X) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) U_{n',n}^{m',m}(\vec{X}'\mathbf{X}, k_L) L_{n',m'}^L(X') \quad (22)$$

$$L_{r;n,m}^T(X) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (2n'+1) U_{n',n}^{m',m}(\vec{X}'\mathbf{X}, k_T) L_{r;n',m'}^T(X') \quad (23)$$

ただし、公式 (15)-(23) における無限級数を p 項で打ちきったとすると、仮に $U_{n,n'}^{m,m'}, T_{n,n'}^{m,m'}$ をあらかじめ計算して記憶したとしても、計算量は $O(p^4)$ となる。そこで本研究では回転変換を用いて $U_{n,n'}^{m,m'} = T_{n,n'}^{m,m'} = 0 (m \neq m')$ とし、計算量を $O(p^3)$ に抑えている。また、 $U_{n,n'}^{m,m'}, T_{n,n'}^{m,m'}$ は漸化式を用いることにより $O(p^3)$ の計算量で計算している¹¹⁾。

3. 周期境界値問題の算法

本節では前節で示した高速多重極境界積分方程式法を周期多重極法へと拡張する方法について述べる。

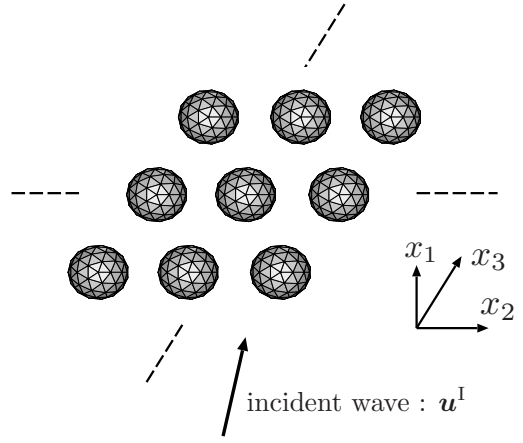


図-2 3次元2周期境界値問題の一例

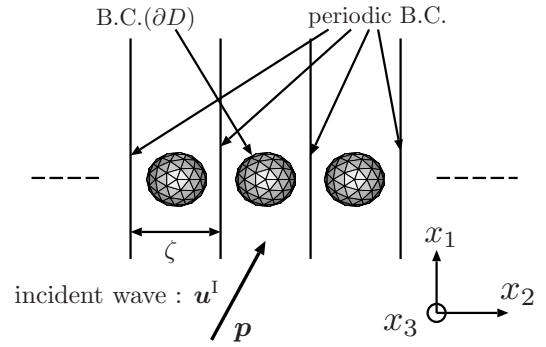


図-3 境界条件

3.1 周期的な境界値問題

図-2 のように、 $\mathbb{R}^3$ において円孔が周期的に並んでいる領域や、表面形状が周期的な半無限領域等を考える。散乱体は x_2, x_3 方向に周期的であるとする。なお、本論文では等方周期問題を考え、 x_2, x_3 方向の周期は等しいものとする。 $x_2 - x_3$ 平面に対し入射角 θ で平面波 $\mathbf{u}^I$ を入射する。3次元動弾性学の周期境界値問題は、Navier-Cauchy の式を次の周期境界条件の下で解くものである (図-3)。

$$u_i(x_1, \frac{\zeta}{2}, x_3) = e^{i\beta_2} u_i(x_1, -\frac{\zeta}{2}, x_3) \quad (24)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2}(x_1, \frac{\zeta}{2}, x_3) = e^{i\beta_2} \frac{\partial u_i}{\partial x_2}(x_1, -\frac{\zeta}{2}, x_3) \quad (25)$$

$$u_i(x_1, x_2, \frac{\zeta}{2}) = e^{i\beta_3} u_i(x_1, x_2, -\frac{\zeta}{2}) \quad (26)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, \frac{\zeta}{2}) = e^{i\beta_3} \frac{\partial u_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, -\frac{\zeta}{2}) \quad (27)$$

ここに、 β_2, β_3 は位相差であり、入射波の縦波、横波に応じて、

$$\beta_i = k_{L,T} \zeta p_i$$

と書ける。ここに、 ζ は周期長、 $\mathbf{p}$ は入射波の伝播方向を表す単位ベクトルである。

3.2 境界積分方程式

3次元動弾性学の周期境界値問題に対応する外部問題の境界積分方程式は次のように書ける。

$$\frac{1}{2}u_i(x) = u_i^I(x) + \int_{\partial D} \Gamma_{ij}^P(x, y, \omega) t_j(y) dS_y - \text{p.v} \int_{\partial D} \Gamma_{ij}^P(x, y, \omega) u_j(y) dS_y \quad (28)$$

ここに、 Γ_{ij}^P は周期境界条件を満たす Green 関数であり、動弾性学の基本解 (式 (6)) を用いて次の格子和で表される。

$$\Gamma_{ij}^P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\omega \in \mathcal{L}(R)} \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \omega) e^{i\beta \cdot \omega} \quad (29)$$

ここに、 $\mathcal{L}$ は次式で表される格子点である。

$$\mathcal{L}(R) = \{(0, \omega_2, \omega_3) | \omega_2 = p\zeta, \omega_3 = q\zeta, |p|, |q| \leq R, p, q \in \mathbb{Z}\} \quad (30)$$

3.3 周期多重極法

動弾性学の周期多重極法は、Helmholtz 方程式や Maxwell 方程式の場合と共通点が多く、Maxwell 方程式の周期多重極法については Otani and Nishimura⁹⁾ に詳しい。したがって本論文ではその概略のみを記す。

まず、周期 Green 関数の格子和表現式 (29) より、周期境界値問題はユニットセルのレプリカ (レプリカセル) が 3 次元空間に無限に繰り返し配置されている問題ととらえることができる (図-4)。

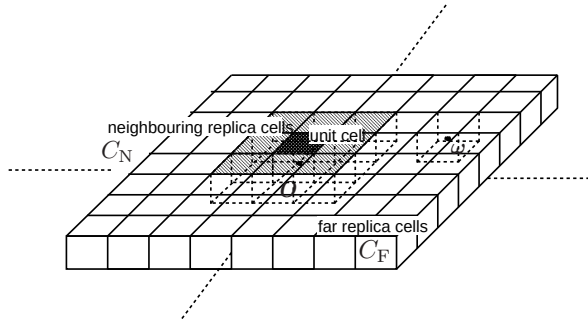


図-4 レプリカセル

いま、図-4 のように無限個のレプリカセルを、ユニットセルの近傍にあるセル C_N と遠方にある C_F に分ける。ここで、近傍とは、ユニットセルと少なくとも一辺を共有することを言う。これに対応して、周期 Green 関数 (式 (29)) を次式のように分解する。

$$\Gamma_{ij}^P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \Gamma_{ij}^{\text{PN}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \Gamma_{ij}^{\text{PF}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (31)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{\text{PN}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \sum_{\omega \in \mathcal{L}'} \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \omega) e^{i\beta \cdot \omega} \\ \Gamma_{ij}^{\text{PF}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \sum_{\omega \in \mathcal{L}''} \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \omega) e^{i\beta \cdot \omega} \end{aligned}$$

である。ここに $\mathcal{L}'$ はセル C_N の中心の集合であり、 $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}'$ である。この様に定義した $\Gamma_{ij}^{\text{PN}}, \Gamma_{ij}^{\text{PF}}$ を用いると、式 (28) の右辺の積分の評価は次のようにできる。

• Γ_{ij}^{PN} からの寄与

近傍レプリカセル C_N の内部にもユニットセルと同様のセル・ツリー構造を導入することにより、通常の多重極法とほぼ同様に計算できる。

1. ユニットセル内部の各セルの interaction list の定義を図-5 のように変更する。すなわち、近傍レプリカセル内部のセルも含むことにする。
2. ユニットセルにおいて、通常の upward pass を最深 level から level 0 まで実行する。
3. 次に、ユニットセルにおいて、通常の downward pass を level 0 から最深 level まで実行する。

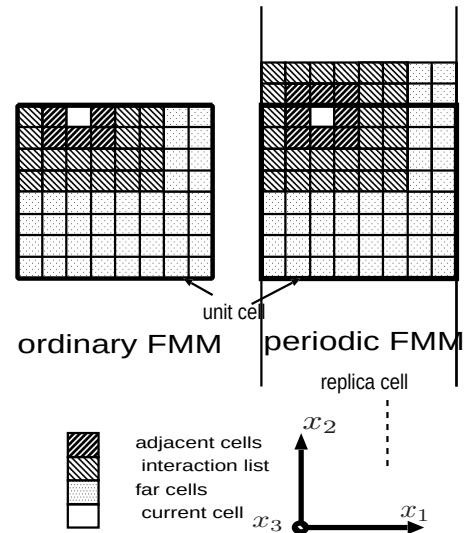


図-5 周期多重極法における interaction list

• Γ_{ij}^{PF} からの寄与

level 0 において、無限個の遠方レプリカセルからの寄与を計算する公式 (periodised M2L 公式) を用いる。periodised M2L 公式は次のように書ける。

$$L_{n,m}^L(O) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) T_{n',n}^{\text{Pm}',m}(k_L) M_{n',m'}^L(O) \quad (32)$$

$$L_{r,n,m}^T(O) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) T_{n',n}^{\text{Pm}',m}(k_T) M_{r,n',m'}^T(O) \quad (33)$$

ここに、 $M_{n',m'}^L(O), M_{r,n',m'}^T(O)$ は level 0 のセルの多重極モーメント、 $L_{n',m'}^L(O), L_{r,n',m'}^T(O)$ は level 0 のセルの局所展開係数である。 $T_{n,n'}^{\text{Pm},m'}(k_{L,T})$ は periodised M2L 公式の係数

であり、

$$T_{n,n'}^{Pm,m'}(k_{L,T}) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}''} T_{n,n'}^{m,m'}(-\omega, k_{L,T}) e^{i\beta \cdot \omega}$$

と定義される。 $T_{n,n'}^{Pm,m'}(k_{L,T})$ は、式 (34) を初期値とする漸化式を用いて求めることができる。

$$T_{0,n'}^{P0,m'}(k_{L,T}) = (-1)^{n'+m'} \left(\sum_{\omega \in \mathcal{L}''} O_{n'}^{m'}(-\omega, k_{L,T}) \right) \quad (34)$$

しかしながら、式 (34) の右辺に現れる格子と $\sum_{\omega \in \mathcal{L}'} O_{n'}^{m'}(-\omega, k_{L,T})$ は収束が非常に遅く、直接的方法で和を取ることは実用的でない。このため、Otani and Nishimura⁹⁾に従い、フーリエ解析によって格子和の積分・級数表示を導くことにより、効率的に和の値を評価する。

4. 数値解析例

本節では、本研究で開発した 3 次元動弾性学の周期多重極法による計算例をいくつか示す。

4.1 誤差の定義

本研究で開発した解法の妥当性を検証する指標として、誤差を次のように定義しておく。

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 |u_{j;i}^{\text{ref}} - u_{j;i}^{\text{FMM}}|^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 |u_{j;i}^{\text{ref}}|^2}} \quad (35)$$

ここに、 i 番目の要素における解析解の変位の第 j 成分を $u_{j;i}^{\text{ref}}$ 、本研究で開発した Periodic FMM でえられた解の変位の第 j 成分を $u_{j;i}^{\text{FMM}}$ とおいた。 N は全要素数である。

4.2 半無限弾性体の自由表面で反射される平面波

解析解の容易に得られる半無限弾性体 ($x_1 < 0$) の自由表面に平面波を入射する問題 (図-6) を扱う。解析解と数値解の比較を行い、本手法が妥当な解を与えることを示す。なお、ここでは、面内の波動について考える。面内問題は本質的には 2 次元問題であるが、本研究ではこれを 3 次元問題として取り扱う。この際、離散化する境界は半無限境界のうち、1 周期内に入る部分である。

(1) 解析解について

形成される波動場 $\mathbf{u}$ は入射波 $\mathbf{u}^I$ と反射 P 波 $\mathbf{u}^L$ 、反射 SV 波 $\mathbf{u}^T$ の和となる。

$$u_i = u_i^I + u_i^L + u_i^T \quad (36)$$

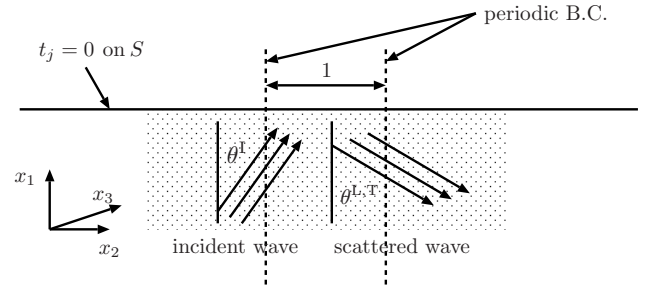


図-6 解析領域 (半無限弾性体)

$\mathbf{u}^I$ 、 $\mathbf{u}^L$ 、 $\mathbf{u}^T$ は、振幅 A^I の SV 波を入射した場合、次のように書ける¹²⁾。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^I &= A^I \mathbf{d}^I \exp(ik_T \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^I) \\ \mathbf{u}^L &= A^L \mathbf{d}^L \exp(ik_L \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^L) \\ \mathbf{u}^T &= A^T \mathbf{d}^T \exp(ik_T \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^T) \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{d}^{I,L,T}$ は運動の方向を表す単位ベクトル、 $\mathbf{p}^{I,L,T}$ は波の進行方向を表す単位ベクトル、 $A^{L,T}$ は自由表面において反射した平面波の振幅である。運動の方向を表す単位ベクトル $\mathbf{d}^{I,L,T}$ 、波の進行方向を表す単位ベクトル $\mathbf{p}^{I,L,T}$ 、平面波の振幅 $A^{L,T}$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^I &= {}^T(\sin \theta^I, -\cos \theta^I, 0), \quad \mathbf{p}^I = {}^T(\cos \theta^I, \sin \theta^I, 0) \\ \mathbf{d}^L &= {}^T(-\cos \theta^L, \sin \theta^L, 0), \quad \mathbf{p}^L = \mathbf{d}^L \\ \mathbf{d}^T &= {}^T(\sin \theta^T, \cos \theta^T, 0), \quad \mathbf{p}^T = {}^T(-\cos \theta^T, \sin \theta^T, 0) \\ \theta^L &= \theta^I, \quad \sin \theta^L = \frac{k_T}{k_L} \sin \theta^I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^L &= \frac{-\mu k_T \sin 4\theta^I}{k_L \mu \sin 2\theta^I \sin 2\theta^T + k_L \cos 2\theta^I (\lambda + 2\mu \cos^2 \theta^T)} \\ A^T &= \frac{\mu \sin 2\theta^I \sin 2\theta^T - \cos 2\theta^I (\lambda + 2\mu \cos^2 \theta^T)}{\mu \sin 2\theta^I \sin 2\theta^T + \cos 2\theta^I (\lambda + 2\mu \cos^2 \theta^T)} \end{aligned}$$

P 波入射の場合にも、同様に解析解を計算することができる。

(2) 解析条件

諸定数は適当に無次元化を行い、Lamé 定数 λ, μ はそれぞれ $\lambda = 1.0, \mu = 1.0$ 、周波数 ω は 23.8、密度 ρ は 1.0、入射波の振幅 A^I は 1.0 とした。積分方程式の離散化においては選点法、一定要素を採用した。要素数 N は、せん断波 1 波長あたり 40 個の一定要素とした ($N = 12800, 38400 \text{DOF}$)。線形方程式の反復解法は GMRES(300) を使い、収束判定は 10^{-5} とした。入射角 θ^I は 0° から 89° まで 1° ごとに計算を行った。なお、前処理は使用していない。

(3) 数値計算結果

図-7,8 に式 (35) に定義した誤差を示す。Rayleigh の anomaly に相当する入射角 ($k_{L,T} = \pm \beta_2 + 2n\pi (n: \text{整数})$) となる。 $n = 0$ でこの条件をみたすのは P 波入射

では $\theta^I = 90^\circ$ であり、S 波入射では $\theta \sim 35.26^\circ$, すなわち critical angle である。) 周辺では精度がやや悪化しているものの、それ以外では $\epsilon \sim 0.01$ 程度の精度で解を得ていることが分かる。

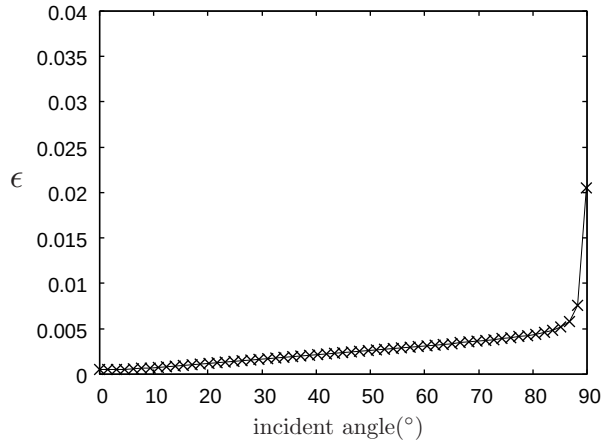


図-7 P 波入射の場合の誤差

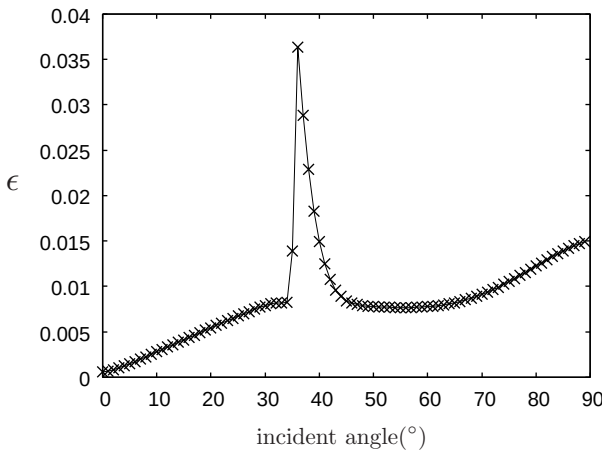


図-8 S 波入射の場合の誤差

4.3 Rayleigh 波を誘起した場合の波動場

Maxwell 方程式における resonance type の anomaly は、導波管モードの存在に関連して発生し、Maxwell 方程式の周期多重極法においては、resonance type の anomaly 周辺で、数値解の精度が悪化することが知られている⁶⁾。動弾性学における Rayleigh 波は半無限領域の応力境界値問題の非自明解であり、Maxwell 方程式の resonance type の anomaly に対応する。したがって本小節では、Rayleigh 波を誘起する条件周辺での提案手法の精度および収束性について検討を行う。

	せん断波 1 波長 あたりの要素数	要素数	DOF
mesh 1	40	12800	38400
mesh 2	20	3200	9600

表-1 解析に用いたメッシュ

(1) Rayleigh 波を誘起する条件

次式で表される x_1 軸方向に減衰する evanescent 波を半無限弾性体 (図-6) の自由表面に入射する。

$$\mathbf{u}^I = A^I \mathbf{d}^I \exp(i(\xi x_2 + q(\xi)x_1)) \quad (37)$$

$$\mathbf{d}^I = {}^T \left(\frac{q(\xi)}{k_L}, \frac{\xi}{k_L}, 0 \right) \quad (38)$$

$$q(\xi) = \sqrt{k_L^2 - \xi^2} \quad (39)$$

ここに、 $\xi > k_L, \text{Im } q > 0$ とする。 ξ が次の Rayleigh の式を満たすとき、半無限弾性体の自由表面問題には非自明解が存在し (Rayleigh 波)、入射波 (37) に対する解は存在しない。

$$\left(2 - \frac{k_T^2}{\xi^2}\right)^2 - 4 \left(1 - \frac{k_L^2}{\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{k_T^2}{\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (40)$$

(2) 解析条件

解析に用いた諸定数、離散化の手法、線型方程式の反復解法は平面波入射の場合と同一のものである。メッシュは表-1 に示した二種類のものを用いた。

平面波入射と同一の諸定数の時、式 (40) を満たす ξ を Ξ と書くと、 $\Xi \sim 1.088k_T \sim 25.89$ となる。したがって本研究では $k_T < \xi < 1.2k_T$ の範囲の ξ に対して数値計算を行った。

(3) 数値計算結果

図-9 に、 ξ を変化させた時の解析解からの誤差 (式 (35)) を示す。mesh 1、mesh 2 いずれの場合においても $\xi \sim 25.89$ 付近で誤差が増大していることが分かる。また、 $\xi \sim 25.89$ において解析解は発散するが、数値解の誤差も発散していることが分かる。

次に、図-10 に、mesh 1 の場合における ξ と GMRES の反復回数の関係を示す。 $\xi \sim 25.89$ 付近で反復回数が増大している。

5. 結言

本研究では、3次元周波数域動弾性学における周期境界値問題の解析に適した周期多重極法の数値解析コードを開発した。また実際に最も簡単な周期境界値問題である、半無限弾性体内の波動問題を解いた。誤差は Rayleigh の anomaly を除いて $\epsilon \sim 0.01$ 程度であり、本手法の妥当性を示すことができた。また、Rayleigh 波を誘起する条件周辺 (resonance type の anomaly) における解法の検討を行った。その結果、Rayleigh 波が発

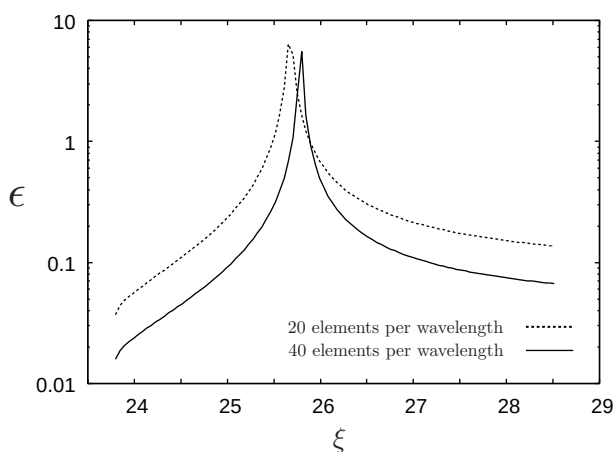


図-9 相対誤差

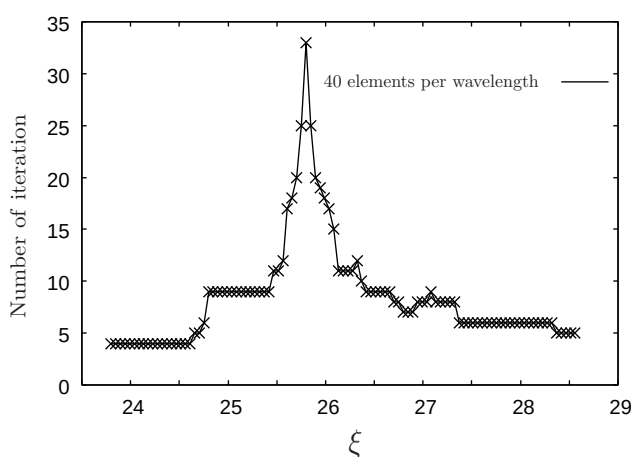


図-10 GMRES の反復回数

生する場合には解の精度が悪化すること、反復解法の収束性が悪くなることを確認した。

本研究では、内部共振を起こさないような問題に対する動弾性学の周期多重極法の開発に成功した。より一般の波動散乱問題に本手法を適用するためには、見かけの固有値問題に注意しなければならない。すなわち、外部問題の境界積分方程式の解の一意性を保障するため、Burton-Miller の方法¹³⁾等の手法を実装する必要がある。また、より大規模な問題や広帯域の問題への適用のため、

- 代数方程式の求解の際に用いる前処理の検討
- diagonal form による高周波問題への対応
- 並列計算の実装

などを行い、より汎用性の高い数値計算コードの開発を行う予定である。その上で、大規模問題、フォノンニック結晶内部の波動問題等に適用範囲を拡大する予定である。さらには、Rayleigh 波に伴った共鳴 anomaly に関わる精度の低下に対する改善も、今後の検討課題であると考えている。

参考文献

- 1) 小林昭一他. 波動解析と境界要素法. 京都大学学術出版会, 2000.
- 2) Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *Journal of Computational Physics*, Vol. 60, pp. 187–207, 1985.
- 3) Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of scattering in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, Vol. 86, pp. 414–439, 1990.
- 4) Nishimura N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 55, pp. 299–322, 2004.
- 5) Fujiwara H. The fast multipole method for integral equations of seismic scattering problems. *Geophysical Journal International*, Vol. 133, pp. 773–782, 1998.
- 6) 大谷佳広, 西村直志. Wood の異常回折周辺における周期高速多重極法の挙動について. 計算数理工学論文集, Vol. 7-2, pp. 303–308, 2008.
- 7) Maslov K, Kinra VK, Henderson BK. Elastodynamic response of a coplanar periodic layer of elastic spherical inclusions. *Mechanics of Materials*, Vol. 32, pp. 785–795, 2000.
- 8) Otani Y, Nishimura N. An FMM for periodic boundary value problems for clacs for Helmholtz' equation in 2D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 381–406, 2007.
- 9) Otani Y, Nishimura N. A periodic FMM for Maxwell's equations in 3D and its applications to problems related to photonic crystals. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 4630–4652, 2008.
- 10) 坂本和穂, 大谷佳広, 西村直志. 2次元弾性波動問題における周期多重極境界積分方程式法について. 計算数理工学論文集, Vol. 8, pp. 77–82, 11 2008.
- 11) Gumerov NA, Duraiswami R. *Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions*. Elsevier, 2005.
- 12) Achenbach JD. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland, 1973.
- 13) Burton AJ, Miller GF. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boudary-value problems. *Proceedings of the Royal society of London. Ser A, A mathematical and physical sciences*, Vol. 323, pp. 201–210, 1971.

(2009 年 4 月 9 日 受付)