応用力学論文集 Vol.12, pp.155-162　（2009 年 8 月）　土木学会

自由界面問題に対する Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法の評価

Evaluation of Semi-Lagrange Galerkin (SLG) Method for Free Interface Problems

奥村　弘*・丸岡　晃**
Hiroshi OKUMURA and Akira MARUOKA

*正会員　博士（工学）　富山大学 講師　総合情報基板センター（〒 930-8555 富山市五福 3190 番地）
**正会員　博士（工学）　八戸工業高等専門学校 准教授　建設環境工学科（〒 039-1192 八戸市大字田面木字上野平 16–1）

For free interface problems in a framework of Eulerian approach, we present a new finite element scheme based on Semi-Lagrange Galerkin (SLG) method which allows us to solve a two-dimensional incompressible Navier–Stokes equation and a pure advection equation of VOF function on unstrunctured triangular meshes. In this scheme, the equation is divided into two phases which are advection and non-advection phases according to the semi-Lagrange procedure. The advection phase is computed by the semi-Lagrange procedure using the 10-DOF Hermitian triangular element which consists of complete cubic polynomials given by function values and first order derivatives on each vertex and a function value on barycenter of a triangle. The non-advection phase is calculated by the mixed Galerkin finite element procedure using the same Hermitian triangular element for velocity and VOF function. We also show how the SLG method can be very effectively applied to sloshing and dambreak problems.

Key Words : *Free interface problem, interface capturing, SLG, Hermite element, FEM*

1.　はじめに

本研究では，非構造格子を用いた界面捕捉法（Euler 的手法）に基づく自由界面流れ問題の高精度有限要素スキームを提案する．界面捕捉法としては，VOF 法[1),2)]を採用する．VOF 法は古典的な界面捕捉法であるが，界面追跡法と比較してロバスト性に優れている．その反面として，界面の挙動を追跡する計算スキームの精度と数値安定性が顕著に反映される．近年では，VOF 法よりも数値安定性に優れた Level Set 法[3),4)]が用いられるケースも多いが，VOF 法の枠組において高精度な有限要素スキームを構築することが，今後の自由界面問題の展開における一つの方向性を与えることができると著者らは考えている．

VOF 法による自由界面流れ問題では，流体の支配方程式を非圧縮 Navier–Stokes 方程式，また界面の支配方程式を移流方程式とした分離型方程式系 (segregated equation system) の数値解析に帰着する．一般的に，流れ問題の数値計算では，その特性に応じて適切な手法を選択する必要がある．特に移流が卓越する場合，移流項に対して中心差分的近似を行うと解が不安定になりやすく，これを解決するためにさまざまな手法が提案されている．これらの手法を大きく分類すると，風上法と特性法にわけられる．本論文では，近年さまざまな高精度な手法が開発されている特性法に着目する．

特性法に基づく代表的な手法には，風上側の物理量の分布を局所 Hermite 補間によって近似し，semi–Lagrange 法によって移流計算を行う CIP　(cubic–interpolated pseudoparticle/propagation）法[5)]がある．また，有限要素法では，時間微分項と移流項を Lagrange 微分の形で表し，その項を差分近似し，Galerkin 法によって離散化する特性有限要素法（characteristic/Lagrange Galerkin method）[6),7)]がある．本論文では，この二つの手法に着目し，移流計算と非移流計算を分離し，移流計算を事前に行う semi–Lagrange 法を特性有限要素法に組み込んだ semi–Lagrange Galerkin（SLG）法[8)]を用いる．SLG 法は，semi–Lagrange 法で必要となる物理量の補間を有限要素法における要素による内挿補間としてとらえ，物理量の導関数値を自由度に含む Hermite 型要素[9)]を semi–Lagrange 法による移流計算に適用する．さらに，非移流計算でも，同様の要素を適用し，Galerkin 法によって離散化する．なお，SLG 法は Semi–Lagrange 法と Galerkin 法を組み合わせた手法であることから，Semi–Lagrange Galerkin (SLG) 法と呼ばれる．

SLG 法では，Hermite 型要素を移流・非移流計算に適用することによって，CIP 法の考えを非構造格子に拡張でき，非移流計算でも高精度化が可能である．また，Hermite 型要素には自由度に導関数値が含まれることから，CIP 法[5)]および CIP 法から派生した手法（multi–moment 法）[10),11),12)]のように支配方程式を 1 階微分した 1 階導関数値に関する時間発展方程式を導出する必要がなくなる．なお，CIP 法を高精度展開した IDO（interpolated differential operator）法[11)]では，拡散項の高精度化のために 5 次補間を用いているが，非構造格子への適用は難しい．さらに，SLG 法では，semi–

Lagrange 法によって事前に移流計算による解を投影していることから，Galerkin 法によって非移流計算を行う段階で，特性有限要素法で必要になる合成関数の積分が現れないという特長がある．なお，SLG 法が与える 2 次元移流拡散問題の精度は，粗い非構造格子においても高い精度を持ち， CIP 法[5]から派生した不完全 3 次補間[9]を用いる CIVA 法[13),14]や三角形 1 次要素による SUPG 法と比較して，非常に高い精度であることが示されている[8]．

また，非圧縮 Navier–Stokes 方程式に対しても SLG 法を適用する．このとき，混合型有限要素近似として，流速場には移流計算と同じ Hermite 型の完全 3 次三角形要素, 圧力場には 1 次三角形要素を適用するものとする．これら要素の組合せにより，非圧縮条件の過拘束に起因する圧力の数値不安定性[9] を回避した．本論文では，自由界面流れの数値計算に対する SLG 法の定式化を導き，数値実験により本手法の有効性を検証する．なお，数値実験としては，スロッシング問題[15]とダムブレーク問題[16]を取り上げ, 実験結果との比較を行う．

2. 数理モデルと支配方程式

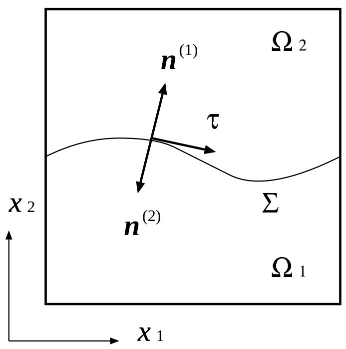
境界 $\Gamma = \partial\Omega$ を有する有界領域 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$ を考える．この領域 Ω は, 時間依存する 2 つの部分領域 $\Omega_\alpha = \Omega_\alpha(t)$ $(\alpha = 1,\, 2)$ により構成され以下を仮定する．

$$\begin{cases} \overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1(t) \cup \overline{\Omega}_2(t) \\ \Omega_1(t) \cap \Omega_2(t) = \emptyset \end{cases} \quad \text{for} \quad 0 \le t < T \tag{1}$$

ここで，T は時間，$\overline{\Omega}$ は補集合を表す．これら Ω_α は密度 $\rho = \rho_\alpha$ と粘性係数 $\mu = \mu_\alpha$ を有する非圧縮粘性流体により占められているものとする．そして, 各流体は混ざらなく, 密度と粘性係数は各流体で一定であるとする．また, これら 2 流体の界面 Σ は以下を満足し,

$$\Sigma = \Sigma(t) = \overline{\Omega_1(t)} \cap \overline{\Omega_2(t)} \quad \text{for } 0 \le t < T \tag{2}$$

界面 Σ 上の Ω_1 から Ω_2 へ向かう単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}^{(1)}$ とし $(\boldsymbol{n}^{(2)} = -\boldsymbol{n}^{(1)})$, 単位接線ベクトルを $\boldsymbol{\tau}$ とする（図 1）．



図–1 自由界面問題の数理モデル

このとき, 混ざらない 2 流体に対する非圧縮粘性流れは, $t > 0$ における流速 $\boldsymbol{u}^{(\alpha)}$ と圧力 $p^{(\alpha)}$ を見出す以下の非圧縮 Navier–Stokes 方程式により記述することができる．

$$\begin{cases} \rho_\alpha \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}^{(\alpha)}}{\partial t} + \boldsymbol{u}^{(\alpha)} \cdot \nabla \boldsymbol{u}^{(\alpha)} \right) & \\ \qquad = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)} + \rho_\alpha \boldsymbol{f}^{(\alpha)} & \text{in} \ \ \Omega_\alpha \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(\alpha)} = 0 & \text{in} \ \ \Omega_\alpha \\ \boldsymbol{u}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{on} \ \ \partial\Omega_\alpha \setminus \Sigma \\ (\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)} \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 & \text{on} \ \ \partial\Omega_\alpha \setminus \Sigma \\ \boldsymbol{u}^{(\alpha)}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0^{(\alpha)} & \text{in} \ \ \Omega_\alpha \end{cases} \tag{3}$$

ここで, 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^{(\alpha)},\, p^{(\alpha)})$ は変形速度テンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{(\alpha)})$ を用いて以下のように表現することができる．

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)} = -p^{(\alpha)} \boldsymbol{I} + 2\mu_\alpha \, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{(\alpha)}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)} = \dfrac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{u}^{(\alpha)} + (\nabla \boldsymbol{u}^{(\alpha)})^T) \end{cases} \tag{4}$$

式 (3) のおいて, 第 1 式は運動方程式, 第 2 式は連続式, 第 3, 4 式は free–slip 境界条件, 第 5 は divergence–free を満たす初期条件 $(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_0^{(\alpha)} = 0)$ である． また, $\boldsymbol{u}^{(\alpha)} = (u_1^{(\alpha)},\, u_2^{(\alpha)})$ は流速ベクトル, $p^{(\alpha)}$ は圧力, $\boldsymbol{f}^{(\alpha)} = (f_1^{(\alpha)},\, f_2^{(\alpha)})$ は単位体積当たりの外力である．そして, 界面 Σ において以下の条件を与える:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{u}^{(2)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \boldsymbol{n}^{(1)} = \sigma \, \kappa \, \boldsymbol{n}^{(1)} \end{cases} \text{on } \Sigma \tag{5}$$

ここで, σ は表面張力係数, κ は界面 Σ の曲率を表す．条件 (5) は界面における流速および応力の法線成分の連続性を示しており, 第 1 式は運動学的条件, 第 2 式は動力学的条件と呼ばれている．なお, 本研究では議論の煩雑さを避けるため, $\sigma = 0$ として表面張力は考慮しないものとする．一方, 界面の時間発展を表現するために, 界面 $\Sigma = \Sigma(t)$ は以下に定義する VOF 関数 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x},\, t)$ のレベルセットとして仮定する．

$$\Sigma = \{\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2) \mid \varphi(\boldsymbol{x},\, t) = 1/2 \ \ \text{for } 0 \le t < T\} \tag{6}$$

2 流体が混ざり合わない条件, つまり界面上の流体粒子が常に界面に留まり続けるため, 界面の挙動は VOF 関数 φ に関する以下の移流方程式で記述される．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \text{in } \Omega \\ \varphi|_{t=0} = \varphi^0 \end{cases} \tag{7}$$

ここで, $\boldsymbol{u}|_{\Omega_\alpha} = \boldsymbol{u}^{(\alpha)}$ である．VOF 関数の初期条件 φ^0 としては以下の関数を用いるものとする．

$$\varphi^0 = \begin{cases} 1 & \text{in} \ \ \Omega_1 \\ 1/2 & \text{on} \ \ \Sigma \\ 0 & \text{in} \ \ \Omega_2 \end{cases} \tag{8}$$

3.　特性法

時刻 t に位置 $\boldsymbol{x}$ にある仮想流体粒子の時刻 τ での位置を $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t; \tau)$ とすると，特性曲線上の軌跡は，以下のような常微分方程式によって表される．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\tau} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t; \tau), \tau), \quad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t; t) = \boldsymbol{x} \tag{9}$$

式 (3) における運動方程式の移流項 (第 1 項と第 2 項) は，以下のような Lagrange 微分の形で表すこともできる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t; \tau), \tau)\Big|_{\tau=t} \tag{10}$$

特性法[8]では，時間増分を Δt, 時間ステップを n として，移流項を次式に示す時間離散を行う．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} \approx \frac{\boldsymbol{u}^{n+1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x})}{\Delta t} \tag{11}$$

ここで，$\boldsymbol{u}^{n+1}(\boldsymbol{x})$ は時刻 $t^{n+1}(=(n+1)\Delta t)$ での流速 $\boldsymbol{u}$，また，$\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x})$ は時刻 $t^n(=n\Delta t)$ での位置 $\boldsymbol{x}$ を起点とした特性曲線上の上流点 $\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x})$ における流速数 $\boldsymbol{u}$ であり，合成関数として表される．

$$\boldsymbol{u}^{n+1}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t^{n+1}; t^{n+1}), t^{n+1}) \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t^{n+1}; t^n), t^n) \tag{13}$$

特性曲線上の上流点の位置 $\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x})$ は, 式 (9) を時間積分することによって求められる．Navier–Stokes 方程式のように移流項が非線形になる場合には, 反復法なしに移流速度を得ることができない．そこで, 本論文では, $t^{n+\frac{1}{2}}\ (\equiv (n+\frac{1}{2})\Delta t)$ での移流速度 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})\ (\equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t^{n+\frac{1}{2}}))$ を以下のような時間 2 次精度の Adams–Bashforth 法による近似を用いる多段法によって $\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x})$ を求める．

$$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}) \approx \frac{1}{2}\left(3\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}^{n-1}(\boldsymbol{x})\right) \tag{14}$$

上流点の位置を求めるには, まず, $\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x})}{2}, t^n+\frac{1}{2}\right)$ での移流速度を以下のような反復法によって求める．

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{(m)} = \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x} - \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{u}^{(m-1)}) \quad (m = 1, 2, \cdots) \\ \boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{15}$$

この方法の場合, $m=1$ でも時間 2 次精度となるため, m は少ない反復回数で十分である．本論文では $m=2$ としている．次に, 時間 2 次精度の上流点の位置を以下のように求める．

$$\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \Delta t\,\boldsymbol{u}^{(m)} + O(\Delta t^2) \tag{16}$$

4.　Semi–Lagrange Galerkin (SLG) 法

式 (3) の特性法による時間方向の離散化は, $\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x})}{2}, t^n+\frac{1}{2}\right)$ において式 (3) を評価するように Crank–Nicolson 法を適用することによって, 以下のように行われる．

$$\begin{cases} \rho\,\dfrac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{X}^n}{\Delta t} - \dfrac{\nu}{2}\left(\Delta\boldsymbol{u}^{n+1} + \Delta\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{X}^n\right) \\ \quad +\nabla p^{n+1} = \dfrac{\rho}{2}\left(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{X}^n\right) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

SLG 法では, 移流計算と非移流計算を分離する Semi–Lagrange 法を適用する．特性法による移流項の近似式 (11) の右辺を 0 とし，さらに移流計算による解の更新を $\tilde{\boldsymbol{u}}$ とすると，移流計算は式 (16) を用いて以下のように行われる．

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x}) \tag{18}$$

これは, $\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x})$ での値を $\boldsymbol{x}$ に投影していると考えられる．また, 式 (17) の外力項の $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{X}^n$ も同様に扱う．

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x}) \tag{19}$$

式 (17) の空間方向の離散化には, 次節以降で述べる混合型の Galerkin 法を適用する．

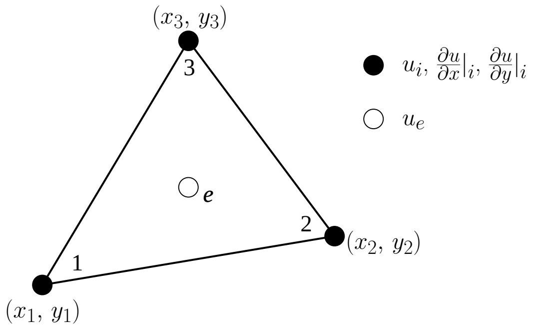
一方, VOF 関数に関する純移流方程式 (7) に対しても, 特性法に基づく SLG 法を適用した場合には, 式 (18) と同様の解の更新により移流計算が行うことができる:

$$\varphi^{n+1}(\boldsymbol{x}) = \varphi^n(\boldsymbol{x})\circ\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x}) \tag{20}$$

一般的に特性有限要素法を適用した場合, 有限要素法による定式化に必要な積分に合成関数が含まれ, 通常はこの積分に対して数値積分が行われる．SLG 法の場合, $\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x})$ での値を $\boldsymbol{x}$ に投影しているため, 合成関数の積分が現れない．このため, SLG 法では有限要素行列の作成に面積座標を用いた代数計算が可能である.3 次元問題においても，四面体要素の体積座標を用いて拡張することができる．また, 計算効率の面では, 連立 1 次方程式を解くのは非移流計算 (17) のみであり, さらに行列が対称となる点について優れている．また, 移流計算では, $\boldsymbol{X}^n(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ と大きく離れていても解の更新が可能である．よって, CFL 条件に制約されない Δt を選ぶことができ, 安定性の面でも優れているといえる．

5.　Hermite 型三角形 3 次要素

本研究では，図 2 に示すような Hermite 型三角形 3 次要素に基づいた有限要素近似を行う．Hermite 型三角形 3 次要素では，任意のスカラー関数 u に対して，三角形要素の頂点での関数値 u_i とその 1 階導関数値 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_i, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_i\right)$, さらに要素の重心での関数値 u_e を自由度とする 10 自由度の三角形要素を用いる．この要素は，完全 3 次補間となり，面積座標によって補間関数を陽的表示できる[8]．なお, CIP 法から派生した CIVA 法[13]では, 図 2 の要素から u_e を除いた 9 自由度の三角形要素を用いている．この要素は 3 次補間を行うには条件が一つ足らず, 不完全 3 次補間となる．



図–2 スカラー関数 u に対する Hermite 型三角形 3 次要素

計算領域 Ω は正則な三角形領域 K (要素 e) に分割するものとし, 式 (17) の Navier–Stokes 方程式に対しては, 混合型の有限要素近似を適用する. このとき, 流速 $\boldsymbol{u}$ の補間には完全 3 次三角形要素（図 2）, また圧力 p には 1 次三角形要素を用いる. また, VOF 関数の補間にも完全 3 次三角形要素を用いる.

このとき, 三角形領域 K における完全 3 次三角形要素による有限要素近似された流速 $\boldsymbol{u}_h|_K$ および VOF 関数 $\varphi_h|_K$ は以下のように表される.

$$\boldsymbol{u}_h|_K = \sum_{i=1}^{3}\left(H_{0i}\,\boldsymbol{u}_i + H_{xi}\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\right|_i + H_{yi}\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right|_i \right) + H_{0e}\,\boldsymbol{u}_e \tag{21}$$

$$\varphi_h|_K = \sum_{i=1}^{3}\left(H_{0i}\,\varphi_i + H_{xi}\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_i + H_{yi}\left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_i \right) + H_{0e}\,\varphi_e \tag{22}$$

ここで, H_{0i}, H_{xi}, H_{yi} は補間関数であり, 面積座標 $(L_1,\,L_2,\,L_3)$ の関数によって次式のように表される.

$$\left\{\begin{aligned} H_{0i} &= L_i^2\,(3-2\,L_i) - 7\,L_1\,L_2\,L_3 \\ H_{xi} &= L_i^2\,(x_{ji}\,L_j - x_{ik}\,L_k) - (x_{ji}-x_{ik})\,L_1\,L_2\,L_3 \\ H_{yi} &= L_i^2\,(y_{ji}\,L_j - y_{ik}\,L_k) - (y_{ji}-y_{ik})\,L_1\,L_2\,L_3 \\ H_{0e} &= 27\,L_1\,L_2\,L_3 \end{aligned}\right. \tag{23}$$

ここで, $(i,\,j,\,k)$ は $(1,\,2,\,3)$ の偶置換であり, $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ である. また, 1 次三角形要素による圧力場の有限要素近似 $p_h|_K$ は以下のように表される.

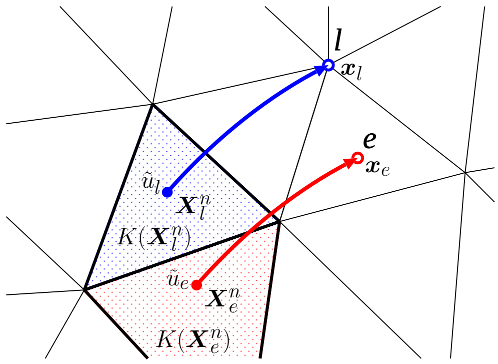
$$p_h|_K = \sum_{i=1}^{3} N_i\,p_i, \quad N_i = L_i \tag{24}$$

6. 数値計算法

具体的な SLG 法による数値計算法について, 移流計算と非移流計算に分けて説明する.

6.1 移流計算

図 3 に示すように, 節点 l の位置を $\boldsymbol{x}_l$, 要素 e の重心位置を $\boldsymbol{x}_e$, それぞれの上流点の位置を $\boldsymbol{X}_l^n$, $\boldsymbol{X}_e^n$, また, 上流点までの中間位置での移流速度を $\boldsymbol{u}_l^{(m)}$, $\boldsymbol{u}_e^{(m)}$ とする.



図–3 移流速度の計算法

上流点の位置を求めるには, まず, 式 (15) に基づき $\boldsymbol{u}_l^{(m)}$, $\boldsymbol{u}_e^{(m)}$ を式 (21) による補間によって以下のように求める.

$$\textit{Set initial guess}\quad \boldsymbol{u}_l^{(0)} = \boldsymbol{u}_l^*,\quad \boldsymbol{u}_e^{(0)} = \boldsymbol{u}_e^*$$

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{u}_l^{(m)} &= \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}_l - \tfrac{\Delta t}{2}\boldsymbol{u}_l^{(m-1)}) \\ \boldsymbol{u}_e^{(m)} &= \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}_e - \tfrac{\Delta t}{2}\boldsymbol{u}_e^{(m-1)}) \end{aligned}\right. \quad (m = 1,\,2,\,\cdots) \tag{25}$$

ここで, $\boldsymbol{u}_l^*$, $\boldsymbol{u}_e^*$ は $\boldsymbol{u}_h^*$ を構成する節点 l および要素 e での関数値である. 次に, 式 (16) に基づき $\boldsymbol{X}_l^n$, $\boldsymbol{X}_e^n$ を以下のように求める.

$$\boldsymbol{X}_l^n = \boldsymbol{x}_l - \Delta t\boldsymbol{u}_l^{(m)}, \boldsymbol{X}_e^n = \boldsymbol{x}_e - \Delta t\boldsymbol{u}_e^{(m)} \tag{26}$$

移流計算による式 (18) に基づく l および e での関数値の更新は, 式 (21) による補間によって以下のように行われる.

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_l = \boldsymbol{u}_h \circ \boldsymbol{X}_l^n, \varphi_e^{n+1} = \boldsymbol{u}_h \circ \boldsymbol{X}_e^n \tag{27}$$

$$\varphi_l^{n+1} = \varphi_h \circ \boldsymbol{X}_l^n, \varphi_e^{n+1} = \varphi_h \circ \boldsymbol{X}_e^n \tag{28}$$

また, l での 1 階導関数値の更新は, CIP 法のように支配方程式を 1 階微分した 1 階導関数値に関する時間発展方程式から求めるのではなく, 式 (21) による 1 階導関数値の補間により以下のように行うことができる.

$$\left.\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial x_i}\right|_l = \left(\delta_{ij} - \Delta t\left.\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right|_l\right)\frac{\partial u_h}{\partial x_j}\circ \boldsymbol{X}_l^n, \tag{29}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial x_i}\right|_l = \left(\delta_{ij} - \Delta t\left.\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right|_l\right)\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j}\circ \boldsymbol{X}_l^n \tag{30}$$

ここで, $\left.\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right|_l$ は $\boldsymbol{u}_h^*$ を構成する l での 1 階導関数値であり, ヤコビアンとも呼ばれる. これらの手順により, $\tilde{\boldsymbol{u}}_h$, φ^{n+1} が得られ, $\tilde{\boldsymbol{f}}_h$ も同様の手順により得られる.

また, 密度 ρ と粘性係数 μ は要素 $K \in \mathcal{T}_h$ において区分一定となるよう以下のように求める.

$$\left\{\begin{aligned} \rho|_K &= \hat{\varphi}_K\,\rho_1 + (1-\hat{\varphi}_K)\,\rho_2 \\ \mu|_K &= \hat{\varphi}_K\,\mu_1 + (1-\hat{\varphi}_K)\,\mu_2 \end{aligned}\right. \tag{31}$$

ここで, $\hat{\varphi}_K = \frac{1}{3}\{H_c(\varphi_{1,K}) + H_c(\varphi_{2,K}) + H_c(\varphi_{2,K})\}$ とし, $\varphi_{i,K}\ (1 \le i \le 3)$ は三角形要素 $K_e \in \mathcal{T}_h$ の節点値である．また, $H_c(\cdot)$ は以下に定義する *cut–off* 関数である．

$$H_c(\varphi) = \begin{cases} 1 & (\varphi \ge 1), \\ \varphi & (0 < \varphi < 1), \\ 0 & (\varphi \le 0). \end{cases} \tag{32}$$

移流計算による解の更新を一つのベクトル $\tilde{\boldsymbol{U}}$ にまとめると，以下のようになる．

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \left[\tilde{\boldsymbol{u}}_l,\quad \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial x}\Big|_l,\quad \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial y}\Big|_l,\quad \tilde{\boldsymbol{u}}_e\right]^T \quad \begin{cases} l = 1, 2, \cdots, N_{nd} \\ e = 1, 2, \cdots, N_{el} \end{cases} \tag{33}$$

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \left[\tilde{\boldsymbol{f}}_l,\quad \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}}{\partial x}\Big|_l,\quad \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}}{\partial y}\Big|_l,\quad \tilde{\boldsymbol{f}}_e\right]^T \quad \begin{cases} l = 1, 2, \cdots, N_{nd} \\ e = 1, 2, \cdots, N_{el} \end{cases} \tag{34}$$

なお，N_{nd} は総節点数，N_{el} は総要素数としている．

6.2　非移流計算

式 (17) に対する混合型の有限要素近似を導くため，問題を同値な弱形式に変換しておく．V を流速の境界条件を満たす完全 3 次三角形要素の有限要素空間とし，Q を 1 次三角形要素の有限要素空間とする．このとき，以下の $(\boldsymbol{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in (V_h)^2 \times Q_h$ を見出す近似問題を得る．

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \rho\, \boldsymbol{w}_h \cdot \frac{\boldsymbol{u}_h^{n+1} - \boldsymbol{u}_h \circ \boldsymbol{X}^n}{\Delta t}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{w}_h)\, p_h^{n+1}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \displaystyle + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu \nabla \boldsymbol{w}_h : \nabla (\boldsymbol{u}_h^{n+1} + \boldsymbol{u}_h \circ \boldsymbol{X}^n)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \displaystyle = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\, (\boldsymbol{f}_h^{n+1} + \boldsymbol{f}_h \circ \boldsymbol{X}^n)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{w}_h \in (V_h)^2 \\ \displaystyle \int_\Omega q_h\, (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h^{n+1})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall q_h \in Q_h \end{cases} \tag{35}$$

なお，式 (35) の時間積分を完全 2 次精度にするには，付加項[7),8)]が必要となるが，本研究では計算コストの観点から Crank-Nicolson 法を用いた．

上式の有限要素方程式は以下のようになる．

$$\begin{cases} \displaystyle \boldsymbol{M}\, \frac{\boldsymbol{U}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{U}}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\, (\boldsymbol{U}^{n+1} + \tilde{\boldsymbol{U}}) \\ \displaystyle \quad - \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{p}^{n+1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}\, (\boldsymbol{F}^{n+1} + \tilde{\boldsymbol{F}}) \\ \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{36}$$

ここで，$\boldsymbol{U}^{n+1}$ は式 (33) と同じように表され，各係数行列は以下のようになる．

$$\begin{cases} \displaystyle \boldsymbol{M} = \Sigma_{e=1}^{N_{el}} \int_K \rho\, \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{H}^T\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \displaystyle \boldsymbol{D} = \Sigma_{e=1}^{N_{el}} \int_K \mu\, \nabla \boldsymbol{H}\, (\nabla \boldsymbol{H})^T\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \displaystyle \boldsymbol{C} = \Sigma_{e=1}^{N_{el}} \int_K (\nabla \cdot \boldsymbol{H})\, \boldsymbol{N}^T\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{37}$$

$\Sigma_{e=1}^{N_{el}}$ は要素ごとの係数行列の全体系への重ね合わせを示し，$\boldsymbol{H}$ は補間関数 (23) を一列に並べたものである．

$$\boldsymbol{H} = [H_{0i},\ H_{xi},\ H_{yi},\ H_{0e}]^T \quad (i = 1, 2, 3) \tag{38}$$

非移流計算では，高次の補間関数を適用しているため，複雑な積分計算が係数行列の作成に要求されるが，本研究では，面積座標公式は用いずに積分計算に数式処理システム Maxima (数式を記号的に代数処理するソフトウェア)[18)]を利用し，代数的に積分を行っている．さらに，Maxima では，出力結果を Fortran 形式変換する機能を有するので，コーディングを比較的容易に行うことができる[8)]．

7.　数値実験

本手法の数値精度を検証するために，密度比がおよそ千倍に達する気液 2 相流問題としてスロッシング問題[15)]とダムブレーク問題[16)]を選び数値実験を行った．これら数値実験には実測データ（実験値）があるため，本手法の近似精度のみならず，実問題への適用性とロバスト性を検証できる．なお，VOF 関数の微係数の初期値は全てゼロとした．

7.1　スロッシング問題

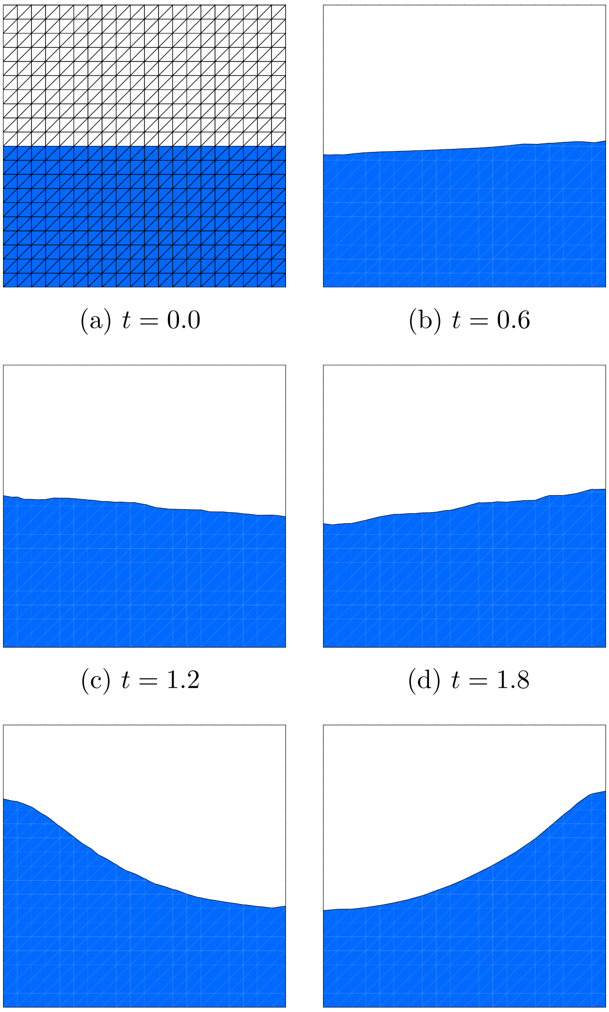
一つ目の数値実験として，矩形貯槽内スロッシング解析[15)]を行う．計算条件として，図 4(a) のような幅 1 m，高さ 1 m の貯水槽に 50 % 貯まった流体（初期条件）に次式で表される水平加速度 f_1 および鉛直加速度 f_2 を与える．

$$f_1 = A\omega^2 \sin \omega t, \quad f_2 = -g \tag{39}$$

ここで，振幅 A は 0.0093 m，角速度 ω は 5.311 rad/s，そして重力加速度 $g = 9.81\mathrm{m/s^2}$ である．なお，気液 2 相流体の密度と粘性係数の値は，液体には水（密度 $\rho_1 = 1000.0\mathrm{kg/m^3}$，粘性係数 $\mu_1 = 0.01\mathrm{kg/m\,s}$），気体には空気（密度 $\rho_2 = 1.0\mathrm{kg/m^3}$，粘性係数 $\mu_2 = 0.0001\mathrm{kg/m\,s}$）の物性値を与えた．時間増分量は $\Delta t = 0.02\mathrm{s}$ とし，有限要素分割は図 4(a) に示す軸非対称となる 20×20 の三角形分割を与えた．今回与えた有限要素分割は他の論文での同数値解析[13),14)]と比較して倍程度粗くした．粗い要素分割を与えることにより本手法の特徴がより明瞭になるからである．また，時間増分量に関しても，他の論文[13),14)]で選ばれるものよりも倍から 1 オーダー程度大きな値を選ぶことで，特性法に基づいた本手法の上流点検索の有効性を示す．なお，境界条件は壁面でスリップ条件とした．

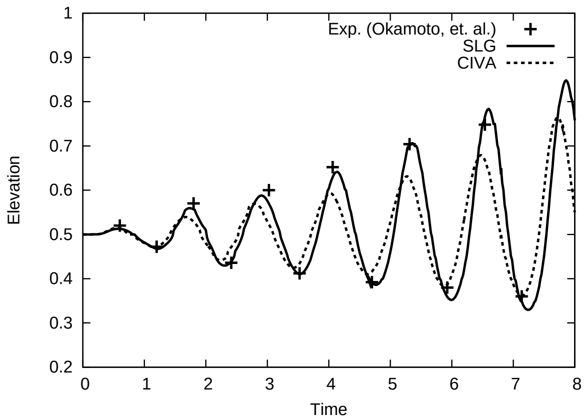
図 4 は，時刻 $t = 0, 0.6, 1.2, 1.8, 4.0, 8.0\mathrm{s}$ における界面の形状である．図 4(b), (c), (d) より，静止状態の界面が sin 関数型の水平加速度に揺すられて発生する微小振幅波を伴いながら徐々に壁面左右端での界面の鉛直振幅が周期的に増していくことが分かる．

図 5 は，界面振幅（壁面右端）の時刻歴を表している．界面の移流方程式の数値計算法として CIVA 法[10] により得られた界面の時刻歴も掲載した．CIVA 法では，実験値[15] よりも減衰した計算結果となっている．一方，本手法は実験値[15] と良い一致を示している．



(a) $t = 0.0$　(b) $t = 0.6$　(c) $t = 1.2$　(d) $t = 1.8$　(e) $t = 4.0$　(f) $t = 8.0$

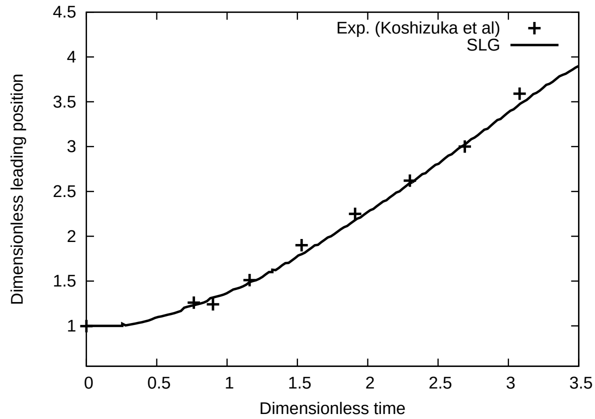
図–4 矩形貯水槽内スロッシング解析結果: 時刻 t における界面のスナップショット（時間単位は秒 (s)）



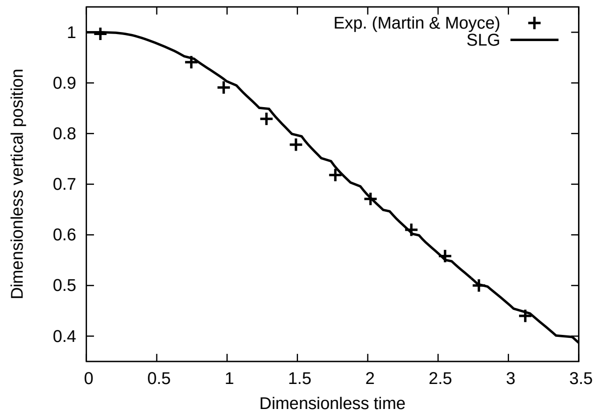
図–5 界面振幅（壁面右端）の時刻歴

7.2 ダムブレーク問題

二つ目の数値実験として，ダムブレーク解析[16),17] を行う．計算条件は文献[16),17] と同じく，代表長さ $a = 0.146\mathrm{m}$ とし，幅 $4a$，高さ $2.4a$ の貯水槽の左下部に，幅 a，高さ $2a$ の水柱を初期条件を与えたとき，重力加速場 $(f_1, f_2) = (0, -g)$ における気体との界面を有するこの水柱が時間経過に伴い崩壊していく挙動を数値解析により再現計算する．気液 2 相流体の密度と粘性係数は上記スロッシング問題と同じ物性値を与えた．時間増分量は $\Delta t = 0.002\mathrm{s}$ とし，有限要素分割は図 8(a) に示す軸非対称となる 40×24 の三角形分割を与えた．上記スロッシング問題と同様に粗い有限要素分割である．なお，境界条件は壁面でスリップ条件とした．



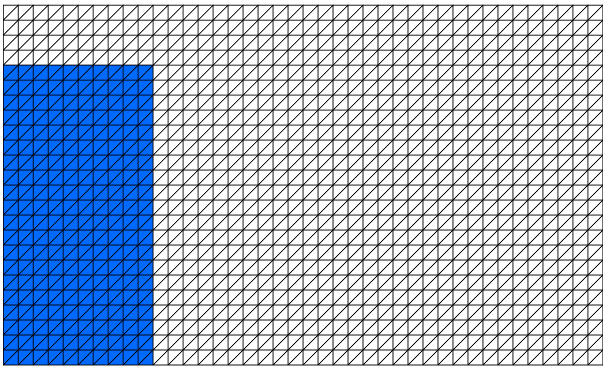
図–6 壁部下端での水際線 x_1/a の無次元時刻歴



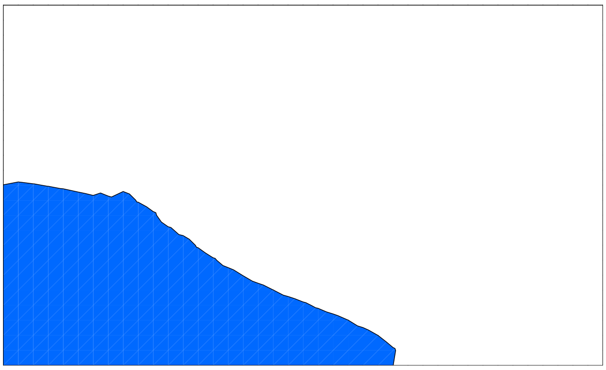
図–7 壁部左端での水際線 $x_2/2a$ の無次元時刻歴

図 6 は，壁部下側の水際線の無次元時刻歴 $\tilde{t} = t(2g/a)^{1/2}$ について，既存の実験結果[16),17] と本手法による計算結果を比較したものである．また，図 7 は，壁部左側の水際線の無次元時刻歴 $\tilde{t}$ であり，本手法の計算結果は，どちらの実験値とも良い一致を示している．

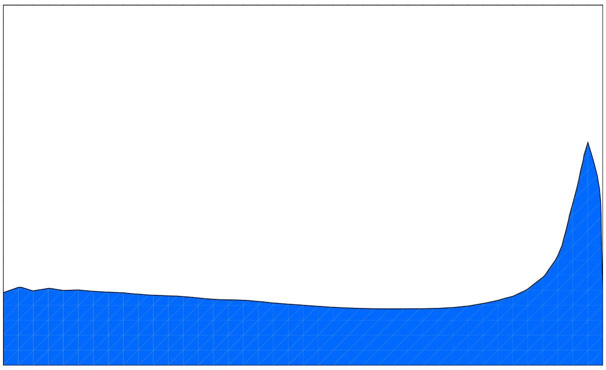
さらに，図 8 は本手法により得られた計算結果から時刻 t における界面を可視化したものである．一方，図 9 は Koshizuka らの実験[16] による時刻 t でのスナップショットである．本手法の計算結果は実験結果と十分に近い界面形状が得られていることがわかる．



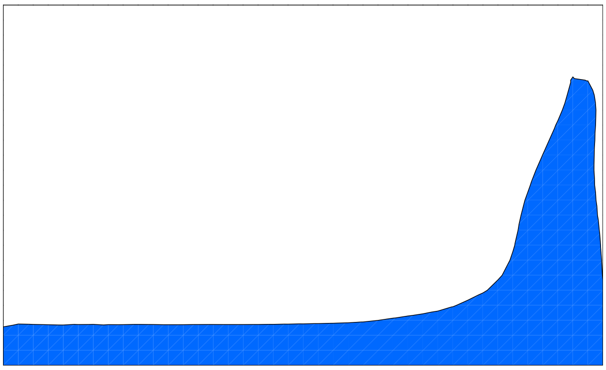
$t = 0.0$ $(\tilde{t} = 0.0)$



$t = 0.2$ $(\tilde{t} = 2.318)$

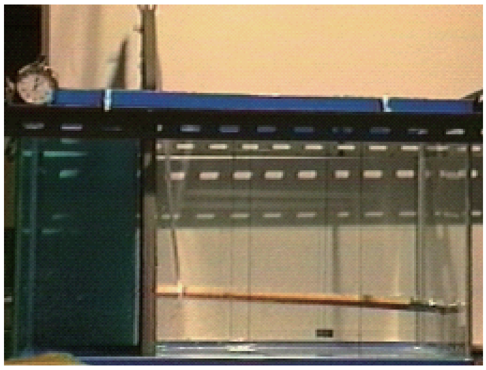


$t = 0.4$ $(\tilde{t} = 4.637)$

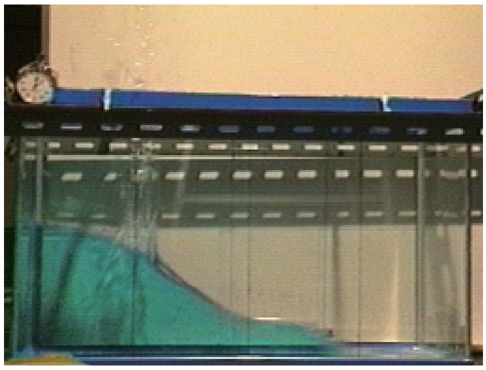


$t = 0.6$ $(\tilde{t} = 6.955)$

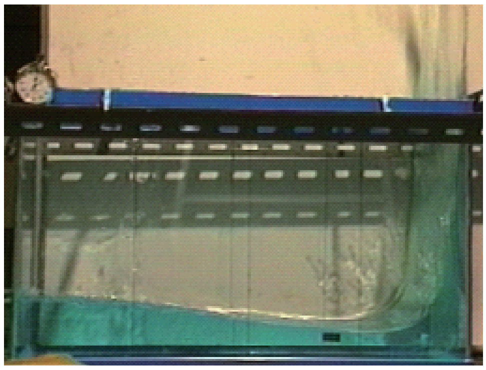
図–8 計算結果: 時刻 t 秒（無次元時刻 $\tilde{t}$）ごと界面の形状



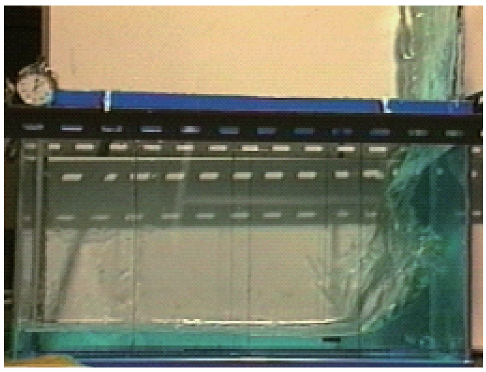
$t = 0.0$



$t = 0.2$



$t = 0.4$



$t = 0.6$

図–9 実験結果[16]: 時刻 t 秒ごとのスナップショット

8. おわりに

本論文では, SLG (Semi–Lagrange Galerkin) 法に基づく自由界面問題の有限要素スキームを開発した．実データを備えた数値実験との比較により本手法の実問題への適用性を示すことができた．特にスロッシング問題では，CIVA 法よりも精度が高いことが示された．今後，SLG 法の有する計算精度，ロバスト性および数値安定性について詳細に検討し，3 次元問題への適用を試みたい.

謝辞

本研究の数値実験では東京大学大学院工学系研究科教授の越塚誠一先生から貴重な実験データとご意見を頂きました．ここに感謝の意を表します.

参考文献

1) C.W. Hirt & B.D. Nichols: Volume of fluid method for the dynamics of free boudaries, *J. Comp. Phys.*, 39 (1981) 201-225.
2) T. Yabe, F. Xiao & P. Wang: Descripiton of complex and sharp interface uring shock wave interraction with liquid drop, *J . Phys. Soc. of Japan*, 62, No.8 (1993) 2537-2549.
3) M. Sussman, P. Smereca & S. Osher: A Level Set Approach for Computing Solutions for Incompressible Two-Phase Flow, *J. of Comput. Physics*, 144, (1994) 146-159.
4) 姫野武洋，渡辺紀徳：微小重力下で気液境界を有する流れの数値解析，日本機械学会論文集（B 編），65/635 (1999) 2333-2340.
5) 矢部 孝 他編: CIP 法 –原子から宇宙までを解くマルチスケール解法–, 森北出版 (2003) など
6) O. Pironneau: Finite Element Methods for Fluids, John Wiley & Sons, Chichester (1989)
7) H. Rui & M. Tabata: A second order characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems, Numer. Math. (2002) 92: 161-177 .
8) 丸岡，小保内，奥村，移流拡散問題における Semi-Lagrange Galerkin 法, ながれ, 27, 2008, pp.143–152.
9) P.G.Ciarlet: The Finite Element Method for Elliptic Problems, SIAM (2001)
10) 田中 伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 機論 (B), 64-620, 1071-1078 (1998)
11) T.Aoki: Interpolated Differential Operator (IDO) Scheme for Solving Partial Differential Equations, Comput. Phys. Commun., 102, 132-146 (1997)
12) S.Ii, M.Shimuta and F.Xiao: A 4th-order and Single-Cell-Based Advection Scheme on Unstructured Grids using Multi-Moments, Comput. Phys. Commun., 173, 17-33 (2005)
13) 桜庭 雅明, 弘崎 聡, 樫山 和男: 自由表面流れのための CIVA/VOF 法に基づく高精度界面捕獲法の構築, 応用力学論文集, Vol.6, pp.215-222 (2003)
14) Renoto N. Elias & Alvaro L.G.A. Coutinho: Stabilized edge–based finite element simulation of free–surface flows, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 54, pp.965–993 (2007)
15) T. Okamoto & M. Kawahara: Tow-dimensional sloshing analysis by the arbitrary Lagrangian-Eulerian finite elment methods, *Proceeding of JSCE*, 441, I-18 (1992) 39-48.
16) S. Koshizuka & Y. Oka: Moving-Particle Semi-implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid, Nucl. Sci. Eng. 123, 421-434 (1996)
17) J. C. Martin & Moyce. W.J. : An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Phil. Trans. Roy. Soc. London A, Vol. 244, pp.312-324, 1952.
18) Maxima, A Computer Algebra System, (http://maxima.sourceforge.net)

(2009 年 4 月 9 日 受付)