# 点支持された周辺自由 Mindlin 平板の自由振動解析への B-spline Ritz 法の適用性

Application of the B-spline Ritz method to free vibration analysis of point supported Mindlin plates with four free edges

名木野 晴暢\*・水澤 富作\*\*・三上 隆\*\*\* Harunobu Nagino, Tomisaku Mizusawa and Takashi Mikami

\*博(工) 大分工業高等専門学校助教 都市システム工学科 (〒870-0152 大分市大字牧 1666 番地) \*\*工博 大同大学教授 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40) \*\*\*工博 北海道大学大学院教授 工学研究科北方圏環境政策工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

In this paper, application of the B-spline Ritz method to free vibration analysis of point supported Mindlin plates with four free edges is described. A hybrid numerical approach combining the B-spline Ritz method and the Lagrange multiplier method is developed to solve the point supported Mindlin plate for free vibration problem. The B-spline Ritz method is formulated by the Ritz procedure with double series of the B-spline functions as the transverse amplitude displacement and rotations, and the Lagrange multiplier method is used to impose zero transverse displacement constraints at point supports. To demonstrate the convergence and accuracy of the proposed simple method, several examples are solved, and the results are compared with other published solutions and the finite element solutions. Rapid, stable convergence and excellent upper bound solution are obtained. Moreover, the effect of thickness-to-width ratio and aspect ratio on frequency parameters, amplitude displacement and stress resultant modes of point supported Mindlin plates with four free edges are also investigated. The present results are shown in tabular forms, and may serve as benchmark data for the finite element method and other numerical methods.

*Key Words:* free vibration analysis, Mindlin plate, point support, B-spline Ritz method キーワード: 自由振動解析, Mindlin 平板, 点支持, B-spline Ritz 法

### 1. まえがき

土木構造物や建築構造物では、溶接された平板構造や柱 に支持されたスラブ構造などが、局所的に変位拘束された (以下, 点支持)平板の問題として取り扱われる. 近年, 構 造物の大型化・長大化に伴い、比較的厚肉な平板が用いら れる機会が増えている. 板厚の大きな平板では、薄肉平板 理論
<sup>1)</sup>では無視される面外せん断変形と曲げによる回転慣 性の影響が顕著に現れてくるため、これらの影響を考慮し た1次せん断変形理論である Mindlin 平板理論<sup>2)</sup>や高次せ ん断変形理論 3-6などに基づく構造解析が必要になる.し たがって、地震動の影響を大きく受ける我が国における動 的な構造設計においては, 点支持された薄肉平板から中等 厚肉平板の自由振動特性(固有振動数と固有振動モード)を 所要の解析精度で把握することが重要な課題となる.しか しながら、点支持されたせん断変形理論2-6に基づく平板 の自由振動問題では、基礎方程式が多元連立偏微分方程式 の境界値問題に帰着されるため、数学的に閉じた解を求め ることが困難になるので、何らかの方法によって、解を解

### 析的又は近似的に評価しなければならない.

点支持された薄肉平板の自由振動問題 7-16は、古くから 種々の数値解析法による解析がなされているが、 Mindlin 平板理論に基づく平板を対象とした研究報告<sup>17)-22)</sup>は、比 較的少ない. 例えば, Aksu · Felemban<sup>17)</sup>は, finite difference energy 法を用いて, 隅角部が点支持された Mindlin 平板の 自由振動解析を行っている. Kitipornchai・Xiang・Liew<sup>18)</sup> は、べき級数の2重積を試行関数に採用した pb-2 Ritz 法と Lagrange 乗数法を用いて、隅角部が点支持された Mindlin 平板の自由振動解析を行っている. さらに, Liew・Xiang・ Kitipornchai · Lim<sup>19</sup>は, pb-2 Ritz 法と拘束関数(constraint function)を用いて、点支持された Mindlin 平板の自由振動 問題を解析しているが、変位拘束点数は、4 点以下に限定 されている.また、拘束関数を用いる利点などは言及され ておらず,自由振動問題の定式化は複雑化しており,あま り実用的ではないと思われる.内山・上田20%は、重ね合わ せ法を用いて級数解を提示し、 さらに、 試行関数にべき級 数を仮定した Ritz 法と Lagrange 乗数法を用いて, 点支持 された Mindlin 平板の自由振動問題を解析している.数値 計算では、級数展開を 31 項まで採用しているが、級数解 の収束状態が不明であるので、中等厚肉平板の結果がどの 程度の信頼性があるのかを判断することが難しい.また、 Gorman<sup>21)</sup>も重ね合わせ法を用いた級数解を提示しており、 点支持された Mindlin 平板の自由振動問題を解析している. 学術的にも実用的にも級数解の果たす役割は大きいが、文 献 21)では級数解と級数項の関係については言及されてい ない.また、この級数解は点支持数が少ない場合には有効 であるが、点支持の増加に伴い、定式は煩雑かつ複雑にな るため、やはり実用的には不向きであると思われる.

Huang・Ma・Sakiyama・Matsuda・Morita<sup>22</sup>は、離散的な近 似解法を用いて、点支持された変厚 Mindlin 平板の自由振 動解析を行っているが、数値計算例では、薄肉平板しか取 り扱われていない.

ここで,比較的容易かつ簡便に取り扱うことができるエネルギー変分原理に基づく Ritz 法<sup>23,24</sup>に着目すると,全体基底関数であるべき級数を試行関数に採用する Ritz 法(以下, *p*-Ritz 法)では,べき級数の展開項数を大きく取り,

多項式を高次化すると、係数行列の悪条件(ill-condition)が 生じるため、数値解の収束状態及び高次の自由振動特性を 言及することができないという問題点がある.また、*p*-Ritz 法について内山・上田<sup>20)</sup>は、全体基底関数で表される単純 なべき級数等では、局所的な変形を伴う固有振動モードを 精度良く表現することに限界があることを指摘している. したがって、点支持問題のように局所的な変位拘束の影響 が大きく現れる問題には、局所基底関数のような区分多項 式を試行関数に採用することが望ましいと思われるが、有 限要素法を除けば、局所基底関数を試行関数に採用した Ritz 法により点支持された Mindlin 平板の自由振動問題を 解析した報告例は、著者らが文献調査した範囲では見当た らないことが現状である.

本論文では、著者らが提案している局所基底関数で表される B-spline 関数<sup>25)</sup>を Ritz 法の試行関数に採用した B-spline Ritz 法<sup>26)</sup>と Lagrange 乗数法<sup>11,14,18,20)</sup>を組み合わせた非常に単純で簡易的かつ容易に取り扱える数値解析法 (以下、本解析法)を用いて、点支持された周辺自由 Mindlin 平板の自由振動問題を定式化し、以下の3項目に焦点を絞 り、本解析法の適用性及び効果性を明らかにすることを大きな目的としている.

- (1) 本解析法の解の収束状態を確認し、また、有限要素法 の解の収束状態と比較することで、本解析法の解の収 束性と自由度数(未知数)の関係について整理する.
- (2) 本解析法による解と pb-2 Ritz 法及び有限要素法による数値解との比較を行い、本解析法の解の妥当性について検討する.
- (3) (1)と(2)の結果を踏まえて、本解析法の適用性及び効果性を明らかにする.

また、本解析法を用いて、点支持された周辺自由 Mindlin 平板の自由振動特性に与える平板厚と平板の平面形状及 び点支持の数の影響についても明らかにする.



# 2. B-spline Ritz 法と Lagrange 乗数法による自由振動問題 の定式化

ここでは、B-spline Ritz 法と Lagrange 乗数法を用いて、 点支持された周辺自由 Mindlin 平板の自由振動問題を定式 化する.B-spline Ritz 法は、x,yの2方向に任意の spline 次 数と区分点を設定できる正規化されたB-spline 関数を試行 関数に採用した区分的な Ritz 法であり、一種のメッシュフ リー法である.B-spline Ritz 法は、全体基底関数を試行関 数に採用する p-Ritz 法と異なり、任意に設定することがで きる spline 次数を一定に保ったまま(すなわち、局所基底関 数の最大値を一定に保ったまま)、区分点の数や配置を操 作することで、解の収束状態や解析精度を改善できるため、 p-Ritz 法で問題になる多項式の高次化に伴う数値不安定性 が生じることなく、安定した数値計算が可能である.

図-1 には、Mindlin 平板、座標系及び変位方向の定義が示してある. ここで、 $0 \le x \le a, 0 \le y \le b, -h/2 \le z \le h/2$ の範囲で定義される等質かつ等方的である Mindlin 平板は、微小ひずみかつ線形弾性体であると仮定する. また、aは平板の長さ、bは幅、hは厚さである.

Mindlin 平板理論における時間依存性のx, y, z方向の変 位成分は, tを時間の変数として, それぞれ, 面内変位u(x, y, z, t), v(x, y, z, t)及び面外変位w(x, y, 0, t)で定義され, 式(1) のように仮定される.

$$u(x, y, z, t) = z\phi_x(x, y)e^{i\omega t},$$
  

$$v(x, y, z, t) = z\phi_y(x, y)e^{i\omega t},$$
  

$$w(x, y, 0, t) = \overline{w}(x, y)e^{i\omega t}$$
(1)

ただし、 $\phi_i(x, y), \phi_i(x, y)$ は、それぞれ、y軸及びx軸まわりの曲げによる回転角、 $\overline{w}(x, y)$ は中央面からの面外振幅変位、 $\omega$ は円振動数であり、 $i^2 = -1$ は虚数単位である.

さて、自由振動問題の定式化にあたり、式(2)で表される 無次元座標系を導入し、また、3つの独立した2つの曲げ による回転角 $\phi_{\lambda}(\xi, \eta), \phi_{\lambda}(\xi, \eta)$ 及び無次元面外振幅変位 $W(\xi, \eta) = \overline{w}(x, y)/b$ は、正規化された B-spline 関数<sup>25)</sup>の2重積 を仮定する.

$$\xi(x) = x/a, \ \eta(y) = y/b \tag{2}$$

$$\begin{split} \phi_{x}(\xi,\eta) &= \sum_{m=1}^{i_{\xi}} \sum_{n=1}^{i_{\eta}} A_{mn} N_{m,k_{\xi}}(\xi) N_{n,k_{\eta}}(\eta) ,\\ \phi_{y}(\xi,\eta) &= \sum_{m=1}^{i_{\xi}} \sum_{n=1}^{i_{\eta}} B_{mn} N_{m,k_{\xi}}(\xi) N_{n,k_{\eta}}(\eta) ,\\ W(\xi,\eta) &= \sum_{m=1}^{i_{\xi}} \sum_{n=1}^{i_{\eta}} C_{mn} N_{m,k_{\xi}}(\xi) N_{n,k_{\eta}}(\eta) \end{split}$$
(3)

ここで、 $N_{\alpha,\beta}(\Xi)(\alpha=m,n;\beta=k_{5}k_{\eta};\Xi=\xi,\eta)$ は正規化された B-spline 関数<sup>25)</sup>、 $A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}$ は未定係数であり、 $i_{\xi}=m_{\xi}$ + $k_{\xi}-2, i_{\eta}=m_{\eta}+k_{\eta}-2$ である.ただし、 $m_{\xi}m_{\eta}$ と $k_{\xi}k_{\eta}$ は、それぞれ、 $\xi,\eta$ 方向に設けた区分点の数及び spline 階数である.この正規化された B-spline 関数は、 $(k_{l}-2; l=\xi, \eta)$ 階の導関数まで連続な区分的多項式関数である.

Mindlin 平板の最大ひずみエネルギー $U_{\max}$ は、次式で与えられる.

$$U_{\max} = \frac{D}{2} \left( \frac{a}{b} \right) \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left\{ \Lambda_{1} + \frac{1 - \nu}{2} \Lambda_{2} + 6(1 - \nu) \kappa \Lambda_{3} \right\} d\eta d\xi$$
$$= \frac{D}{2} \left( \frac{a}{b} \right) \{ \Delta \}^{T} [K] \{ \Delta \}$$
(4)

ただし,

$$\Lambda_{1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2} \left(\frac{\partial \phi_{x}}{\partial \xi}\right)^{2} + \left(\frac{\partial \phi_{y}}{\partial \eta}\right)^{2} + 2\nu \left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{\partial \phi_{x}}{\partial \xi}\right) \left(\frac{\partial \phi_{y}}{\partial \eta}\right),$$

$$\Lambda_{2} = \left\{ \left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{\partial \phi_{y}}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial \phi_{x}}{\partial \eta}\right) \right\}^{2},$$

$$\Lambda_{3} = \left(\frac{b}{h}\right)^{2} \left[ \left\{ \phi_{y} + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right) \right\}^{2} + \left\{ \phi_{x} + \left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right) \right\}^{2} \right]$$
(5)

であり、[K]は剛性マトリックス、 $D = Eh^3 / 12(1 - v^2)$ は平板の曲げ剛性、vはポアソン比であり、 $\kappa$ はせん断修正係数である.また、Mindlin 平板の最大運動エネルギー $T_{max}$ は、次式で与えられる.

$$T_{\max} = \frac{\rho \omega^2 a b^3 h}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{12} \left( \frac{h}{b} \right)^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) + W^2 \right\} d\eta \, d\xi$$
$$= \frac{\rho \omega^2 a b^3 h}{2} \{\Delta\}^T [M] \{\Delta\}$$
(6)

ここで, [M]は質量マトリックスであり, ρ は平板の密度 である.また,式(4)及び式(6)の{Δ}は未定係数ベクトルで あり,次のように構成されている.

$$\{\Delta\} = \{ \{\delta_A\} \ \{\delta_B\} \ \{\delta_C\} \}^{\mathrm{T}}$$
(7)

$$\{\delta_A\} = \{A_{11} \quad A_{12} \quad \cdots \quad A_{1i_{\eta}} \quad \cdots \quad A_{i_{\xi}1} \quad \cdots \quad A_{i_{\xi}i_{\eta}}\}^{\mathrm{T}},$$
  
$$\{\delta_B\} = \{B_{11} \quad B_{12} \quad \cdots \quad B_{1i_{\eta}} \quad \cdots \quad B_{i_{\xi}1} \quad \cdots \quad B_{i_{\xi}i_{\eta}}\}^{\mathrm{T}},$$
  
$$\{\delta_C\} = \{C_{11} \quad C_{12} \quad \cdots \quad C_{1i_{\eta}} \quad \cdots \quad C_{i_{\xi}1} \quad \cdots \quad C_{i_{\xi}i_{\eta}}\}^{\mathrm{T}}$$
(8)

任意の点( $\xi_p$ ,  $\eta_p$ )での面外振幅変位 Wを拘束する(W = 0) ために Lagrange 乗数 $\lambda_p$ を導入し、この付帯条件を  $U_L$ とす れば、次のように与えられる.

$$U_{L} = \sum_{p=1}^{PL} \lambda_{p} W(\xi_{p}, \eta_{p})$$

$$= \{\lambda\} [L] \{\delta_{C}\}$$
(9)

ただし、PLは付帯条件の数(点支持の数)であり、また、

$$\{\lambda\} = \{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_p\} \tag{10}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} N_{1,k_{\xi}}(\xi_{1})N_{1,k_{\eta}}(\eta_{1}) & \dots & N_{i_{\xi},k_{\xi}}(\xi_{1})N_{i_{\eta},k_{\eta}}(\eta_{1}) \\ N_{1,k_{\xi}}(\xi_{2})N_{1,k_{\eta}}(\eta_{2}) & \dots & N_{i_{\xi},k_{\xi}}(\xi_{2})N_{i_{\eta},k_{\eta}}(\eta_{2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{1,k_{\xi}}(\xi_{p})N_{1,k_{\eta}}(\eta_{p}) & \dots & N_{i_{\xi},k_{\xi}}(\xi_{p})N_{i_{\eta},k_{\eta}}(\eta_{p}) \end{bmatrix}$$
(11)

である.

Lagrange 乗数による付帯条件を付加した Mindlin 平板の 全ポテンシャルエネルギーПは,式(4),式(6)と式(9)を用い て,次式で与えられる.

$$\Pi = U_{\max} + U_L - T_{\max} \tag{12}$$

したがって,式(3)を式(12)に代入し,全ポテンシャルエネ ルギーΠを極値化すれば,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta\}^{\mathrm{T}}} = 0 , \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \{\lambda\}} = 0$$
(13)

であり、次式のような代数方程式が得られる.

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} K_{\phi_{x}\phi_{x}} & K_{\phi_{x}\phi_{y}} & K_{\phi_{x}W} & [0] \\ \begin{bmatrix} K_{\phi_{y}\phi_{x}} & K_{\phi_{y}\phi_{y}} & K_{\phi_{y}W} & [0] \\ \begin{bmatrix} K_{W\phi_{x}} & K_{W\phi_{y}} & K_{WW} & [L]^{\mathrm{T}} \\ [0] & [0] & [L] & [0] \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \begin{bmatrix} 0 & [0] & [L] & [0] \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \begin{bmatrix} 0 & [0] & [M_{\phi_{y}\phi_{y}} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [M_{WW} & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \{\delta_{A}\} \\ \{\delta_{B}\} \\ \{\delta_{C}\} \\ \{\delta_{C}\} \\ \{\delta_{C}\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{bmatrix}$$
(14)

ここで、 $\Delta^2 = \omega^2 b^4 (\rho h/D)$ 、 $[K_L] \geq [M_{II}] (I, J = \phi, \phi, W)$ は、 それぞれ、サブ剛性マトリックス及びサブ質量マトリック スであり、これらのサブマトリックスは、 $k_l (l = \xi, \eta)$ 点の Gauss-Legendre の数値積分により求めている.本解析法に より定式化されるサブマトリックスは、対称の帯行列で構 成され、また、剛性マトリックス及び質量マトリックスの





大きさは、 $3 \times (m_{\xi}+k_{\xi}-2) \times (m_{\eta}+k_{\eta}-2)+PL$ で表される. ここで、剛性マトリックスと質量マトリックスは対角要素 に零成分を含むため正値行列ではなくなる.よって、一般 固有値問題を標準固有値問題に変換し、実非対称行列を安 定化基本変換によって上 Hessenberg 行列に移し、これに double-QR 法を適用して固有値を求め、逆反復法を用いて 固有ベクトルを求めている.

#### 3. 数値計算例及び考察

ここでは、点支持された周辺自由 Mindlin 平板の自由振動解析への B-spline Ritz 法の適用性について検討し、また、 点支持された周辺自由 Mindlin 平板の自由振動特性の一部 を明らかにする.まず、本解析法による解の収束性に与える spline 次数及び区分点の数の影響について整理する.ま

|         |                           | widdes |          |      |      |      |          |      |            |      |
|---------|---------------------------|--------|----------|------|------|------|----------|------|------------|------|
| Method  | $m_{\xi} \times m_{\eta}$ | 1st    | 2nd, 3rd | 4th  | 5th  | 6th  | 7th, 8th | 9th  | 10th, 11th | 12th |
|         |                           | SS     | SA (AS)  | SS   | AA   | SS   | SA (AS)  | AA   | SA (AS)    | SS   |
| Present | 5                         | 0.707  | 1.54     | 1.97 | 3.73 | 4.31 | 4.96     | 6.78 | 7.78       | 8.94 |
|         | 11                        | 0.701  | 1.52     | 1.97 | 3.67 | 4.25 | 4.91     | 6.71 | 7.62       | 8.68 |
|         | 15                        | 0.700  | 1.52     | 1.97 | 3.66 | 4.24 | 4.90     | 6.71 | 7.60       | 8.65 |
|         | 21                        | 0.700  | 1.51     | 1.97 | 3.65 | 4.23 | 4.90     | 6.71 | 7.59       | 8.62 |
|         | 25                        | 0.699  | 1.51     | 1.97 | 3.64 | 4.23 | 4.89     | 6.71 | 7.58       | 8.61 |
|         | 31                        | 0.699  | 1.51     | 1.97 | 3.64 | 4.23 | 4.89     | 6.71 | 7.57       | 8.60 |
|         | 35                        | 0.699  | 1.51     | 1.97 | 3.63 | 4.22 | 4.89     | 6.71 | 7.57       | 8.59 |
|         | 41                        | 0.698  | 1.51     | 1.97 | 3.63 | 4.22 | 4.89     | 6.71 | 7.56       | 8.58 |
|         | 45                        | 0.698  | 1.51     | 1.97 | 3.63 | 4.22 | 4.88     | 6.71 | 7.56       | 8.58 |
| FEM     | 5                         | 0.772  | 1.64     | 2.10 | 4.65 | 4.94 | 6.47     | 8.01 | 9.56       | 13.4 |
|         | 11                        | 0.717  | 1.56     | 1.99 | 3.88 | 4.38 | 5.16     | 6.98 | 8.10       | 9.60 |
|         | 15                        | 0.710  | 1.54     | 1.98 | 3.79 | 4.33 | 5.04     | 6.85 | 7.89       | 9.16 |
|         | 21                        | 0.706  | 1.53     | 1.97 | 3.73 | 4.29 | 4.98     | 6.78 | 7.76       | 8.92 |
|         | 25                        | 0.705  | 1.53     | 1.97 | 3.71 | 4.28 | 4.95     | 6.76 | 7.72       | 8.84 |
|         | 31                        | 0.703  | 1.52     | 1.97 | 3.69 | 4.27 | 4.94     | 6.74 | 7.68       | 8.78 |
|         | 35                        | 0.703  | 1.52     | 1.97 | 3.69 | 4.26 | 4.93     | 6.74 | 7.66       | 8.75 |
|         | 41                        | 0.702  | 1.52     | 1.97 | 3.68 | 4.26 | 4.92     | 6.73 | 7.65       | 8.72 |
|         | 45                        | 0.702  | 1.52     | 1.97 | 3.67 | 4.25 | 4.92     | 6.73 | 7.64       | 8.71 |
|         | 51                        | 0.701  | 1.52     | 1.97 | 3.67 | 4.25 | 4.91     | 6.72 | 7.63       | 8.69 |
|         | 55                        | 0.701  | 1.52     | 1.97 | 3.66 | 4.25 | 4.91     | 6.72 | 7.62       | 8.68 |
|         | 71                        | 0.700  | 1.52     | 1.97 | 3.66 | 4.24 | 4.90     | 6.72 | 7.61       | 8.65 |
|         | 91                        | 0.700  | 1.51     | 1.97 | 3.65 | 4.23 | 4.90     | 6.72 | 7.59       | 8.63 |
|         | 101                       | 0.699  | 1.51     | 1.97 | 3.64 | 4.23 | 4.90     | 6.71 | 7.59       | 8.62 |
|         | 151                       | 0.699  | 1.51     | 1.97 | 3.63 | 4.23 | 4.89     | 6.71 | 7.57       | 8.60 |
|         | 201                       | 0.698  | 1.51     | 1.97 | 3.63 | 4.22 | 4.89     | 6.71 | 7.56       | 8.58 |

表-1 B-spline Ritz 法と有限要素法による中等厚肉平板の振動数パラメータΩの収束状態の比較: h/a=0.05, b/a=1

た、有限要素法の解の収束状態と比較し、本解析法の解の 収束性と自由度数の関係について整理する.次に、本解析 法による解と pb-2 Ritz 法及び有限要素法による数値解と の比較を行い、本解析法の解の妥当性について検討する. さらに、点支持された周辺自由 Mindlin 平板の固有振動数 と固有振動モードに与える平板厚、平面形状及び点支持の 数の影響についても検討する.

ここで、幾何形状に関する無次元パラメータとして、平板の長さ*a*で基準化した板厚比h/aと辺長比b/aを定義する.また、柱に支持された平板構造を想定し、図-2 には、本論文で取り扱う解析モデルとして辺上に点支持を有する周辺自由 Mindlin 平板の形状が示してある.ここで、図中の破線は、 $\xi=0.5 \ge \eta=0.5$ を意味する.なお、境界条件に対称性のある Mindlin 平板の振幅変位振動モード*W*は、SS, SA, AS, AA で表す.ここで、最初の文字は $\xi$ 方向、2番目の文字は $\eta$ 方向に対して、面外振幅変位*W*が対称分布(S)または逆対称分布(A)を意味する<sup>20)</sup>.

数値計算は、32 bit personal computer を用い、Fortran による倍精度計算で行った.本論文では、実用上十分な解析精度を確保することを目的とし、また、報告例が少ない現状を考慮して、固有振動数と固有振動モード(振幅変位及び断面力モード)は有効数字 3 桁で整理し、固有振動モードは各成分の最大値で正規化した.なお、特に断りがない限り、数値計算では、ポアソン比v=0.3、せん断修正係数 $\kappa=\pi^2/12$ を用い、spline 次数( $k_{\varepsilon}-1$ )×( $k_n-1$ )は、断面力-ひず

み場まで連続になることを考慮し、2×2以上に設定している.また、平板の振動数パラメータΩは、次式で表す.

$$\Omega = \frac{\omega b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$$
(15)

#### 3.1 本解析法の解の収束性に与える spline 次数の影響

本解析法の解の収束状態は、spline 次数( $k_{\xi}$ -1)×( $k_{\eta}$ -1) と区分点の数 $m_{\xi}$ × $m_{\eta}$ に大きく依存する.ここでは、まず、 Model A を対象として、本解析法の解の収束性に与える spline 次数( $k_{\xi}$ -1)×( $k_{\eta}$ -1)と区分点の数 $m_{\xi}$ × $m_{\eta}$ の影響に ついて整理する.

図-3 には、薄肉正方形平板(h/a = 0.001, b/a = 1)の振動 数パラメータ $\Omega$ の収束性に与える spline 次数( $k_{\xi} - 1$ )×( $k_{\eta} - 1$ )の影響が示してある. ここで、区分点は等間隔に配置し、 区分点の数 $m_{\xi} \times m_{\eta}$ は5×5から51×51まで単調に増加さ せており、spline 次数( $k_{\xi} - 1$ )×( $k_{\eta} - 1$ )を2×2から5×5ま で変化させている.

これより, 基本振動数パラメータ $\Omega_{lst}$ から 12 次の振動数 パラメータ $\Omega_{l2h}$ の値は,  $(k_{\xi}-1) \times (k_{\eta}-1)$ に係わらず,  $m_{\xi} \times m_{\eta}$ を増大させれば, 一定値へ向かう上からの一様な収束 状態が示されている. ここで,  $(k_{\xi}-1) \times (k_{\eta}-1)$ の影響につ いて整理すると,まず,最も低次の $(k_{\xi}-1) \times (k_{\eta}-1)=2 \times 2$ では,振動次数に係わらず,  $\Omega$ の収束が極めて遅く, (a), (c),

|         |                           | widues |          |      |      |      |          |      |            |      |
|---------|---------------------------|--------|----------|------|------|------|----------|------|------------|------|
| Method  | $m_{\xi} \times m_{\eta}$ | 1st    | 2nd, 3rd | 4th  | 5th  | 6th  | 7th, 8th | 9th  | 10th, 11th | 12th |
|         | 5 1                       | SS     | SA (AS)  | SS   | AA   | SS   | SA (AS)  | AA   | SA (AS)    | SS   |
| Present | 5                         | 0.677  | 1.43     | 1.92 | 3.37 | 3.93 | 4.56     | 6.16 | 6.87       | 7.74 |
|         | 11                        | 0.668  | 1.40     | 1.92 | 3.29 | 3.86 | 4.50     | 6.14 | 6.74       | 7.51 |
|         | 15                        | 0.666  | 1.40     | 1.92 | 3.26 | 3.85 | 4.49     | 6.14 | 6.71       | 7.46 |
|         | 21                        | 0.664  | 1.39     | 1.92 | 3.24 | 3.83 | 4.47     | 6.14 | 6.68       | 7.41 |
|         | 25                        | 0.663  | 1.39     | 1.92 | 3.23 | 3.82 | 4.47     | 6.14 | 6.66       | 7.38 |
|         | 31                        | 0.661  | 1.38     | 1.92 | 3.21 | 3.81 | 4.46     | 6.14 | 6.64       | 7.36 |
|         | 35                        | 0.661  | 1.38     | 1.92 | 3.20 | 3.81 | 4.45     | 6.14 | 6.64       | 7.34 |
|         | 41                        | 0.660  | 1.38     | 1.92 | 3.19 | 3.80 | 4.45     | 6.14 | 6.62       | 7.32 |
|         | 45                        | 0.659  | 1.38     | 1.92 | 3.19 | 3.80 | 4.44     | 6.14 | 6.62       | 7.31 |
| FEM     | 5                         | 0.748  | 1.56     | 2.04 | 4.29 | 4.48 | 5.86     | 7.24 | 8.47       | 8.93 |
|         | 11                        | 0.689  | 1.45     | 1.94 | 3.53 | 4.02 | 4.76     | 6.36 | 7.21       | 8.27 |
|         | 15                        | 0.682  | 1.44     | 1.93 | 3.44 | 3.96 | 4.65     | 6.26 | 7.01       | 7.96 |
|         | 21                        | 0.676  | 1.42     | 1.93 | 3.37 | 3.92 | 4.58     | 6.20 | 6.89       | 7.75 |
|         | 25                        | 0.674  | 1.42     | 1.92 | 3.35 | 3.91 | 4.56     | 6.18 | 6.85       | 7.68 |
|         | 31                        | 0.672  | 1.41     | 1.92 | 3.32 | 3.89 | 4.54     | 6.17 | 6.81       | 7.61 |
|         | 35                        | 0.671  | 1.41     | 1.92 | 3.31 | 3.88 | 4.53     | 6.16 | 6.79       | 7.58 |
|         | 41                        | 0.669  | 1.41     | 1.92 | 3.30 | 3.87 | 4.52     | 6.16 | 6.76       | 7.55 |
|         | 45                        | 0.669  | 1.40     | 1.92 | 3.29 | 3.87 | 4.51     | 6.15 | 6.75       | 7.53 |
|         | 51                        | 0.668  | 1.40     | 1.92 | 3.28 | 3.86 | 4.50     | 6.15 | 6.74       | 7.50 |
|         | 55                        | 0.667  | 1.40     | 1.92 | 3.27 | 3.86 | 4.50     | 6.15 | 6.73       | 7.49 |
|         | 71                        | 0.665  | 1.39     | 1.92 | 3.25 | 3.84 | 4.49     | 6.15 | 6.70       | 7.45 |
|         | 91                        | 0.664  | 1.39     | 1.92 | 3.24 | 3.83 | 4.48     | 6.15 | 6.68       | 7.41 |
|         | 101                       | 0.663  | 1.39     | 1.92 | 3.23 | 3.83 | 4.47     | 6.15 | 6.67       | 7.40 |
|         | 151                       | 0.661  | 1.38     | 1.92 | 3.20 | 3.81 | 4.46     | 6.14 | 6.64       | 7.34 |
|         | 201                       | 0.659  | 1.38     | 1.92 | 3.19 | 3.80 | 4.44     | 6.14 | 6.62       | 7.31 |

表-2 B-spline Ritz 法と有限要素法による中等厚肉平板の振動数パラメータΩの収束状態の比較: h/a=0.1, b/a=1

(d)の結果では、収束値が得られていない.しかしながら、 ( $k_{\xi}-1$ )×( $k_{\eta}-1$ )=3×3を用いると、 $\Omega$ の収束状態はかなり 改善され、振動次数に係わらず、収束値を得ている. さら に、( $k_{\xi}-1$ )×( $k_{\eta}-1$ )=4×4,5×5に設定すれば、 $\Omega$ の収束 はさらに早まり、少ない区分点の数で収束値が得られてい る.以上の結果より、以後の数値計算では、spline 次数( $k_{\xi}-1$ )×( $k_{\eta}-1$ )=4×4を統一して用いる.

# 3.2 本解析法と有限要素法の解の収束性の比較と自由度 数との関係及び解の精度比較

ここでは、本解析法の解の収束状態と有限要素法による 解の収束状態を自由度数(未知数)との関係を考慮して比較 し、また、解の妥当性について検討する.なお、点支持さ れた Mindlin 平板の自由振動問題を取り扱った既往の研究 報告<sup>17-29</sup>では、薄肉平板(h/a=0.001 又は 0.01)を例に取り、 解の収束性が議論されている.他方、中等厚肉平板を取り 扱った報告例としては、文献 18) があるが、全体基底関数 であるべき級数を試行関数に採用した *pb*-2 Ritz 法を用い ているため、解の収束状態が言及できず、文献 18) では、 解の収束が遅くなる、と結論付けられている.そこで、本 論文では、中等厚肉平板( $h/a=0.05 \ge 0.1$ )の振動数パラメ ータ $\Omega$ の収束状態について言及することを試みる.

表-1 と表-2 には、それぞれ、本解析法(Present)と有限要素法(FEM)による h/a が 0.05 と 0.1 である点支持された中等厚肉正方形平板(b/a=1)の基本振動から 12 次までの振



図-4 FEM<sub>DOF</sub> / Present<sub>DOF</sub> と区分点の数(節点数)の関係

動数パラメータ $\Omega$ の収束状態が示してある.ここで、区分 点は等間隔に配置し、区分点の数 $m_{\xi} \times m_{\eta}$ は5×5から45× 45 まで変化させている.また、有限要素解析には、汎用 有限要素コード Abaqus 6.8-2 を用いた.使用した要素は、 4 節点シェル要素である.なお、有限要素解析では、要素 分割はx,y方向に等分割とし、4×4から200×200(節点数 で表すならば、5×5から201×201)まで変化させている.

表-1 より、本解析法による基本振動数パラメータ $\Omega_{lst}$ から 12 次の振動数パラメータ $\Omega_{l2th}$ の値は、区分点の数 $m_{\xi} \times m_{\eta}$ の増大に伴い、一定の値へ収束している.また、有

| h/a | h/a                 | Modes  |        |        |        |        |        |        |        |       |       |       |       |
|-----|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| 0/u | n/u                 | 1st    | 2nd    | 3rd    | 4th    | 5th    | 6th    | 7th    | 8th    | 9th   | 10th  | 11th  | 12th  |
| 1   | 0.001               | SS     | SA     | AS     | SS     | AA     | SS     | SA     | AS     | AA    | SA    | AS    | SS    |
|     | Present             | 0.720  | 1.60   | 1.60   | 1.99   | 3.89   | 4.50   | 5.10   | 5.10   | 7.02  | 8.14  | 8.14  | 9.34  |
|     | Ritz <sup>18)</sup> | 0.721  | 1.60   | 1.60   | 1.99   | 3.89   | 4.50   | 5.10   | 5.10   | -     | -     | -     | -     |
|     | 0.1                 | SS     | SA     | AS     | SS     | AA     | SS     | SA     | AS     | AA    | SA    | AS    | SS    |
|     | Present             | 0.659  | 1.38   | 1.38   | 1.92   | 3.19   | 3.80   | 4.44   | 4.44   | 6.14  | 6.62  | 6.62  | 7.31  |
|     | Ritz <sup>18)</sup> | 0.672  | 1.42   | 1.42   | 1.92   | 3.33   | 3.89   | 4.53   | 4.53   | -     | -     | -     | -     |
|     | Error               | (2.0)  | (2.9)  | (2.9)  | (0.0)  | (4.4)  | (2.4)  | (2.0)  | (2.0)  | -     | -     | -     | -     |
|     | FEM <sup>a)</sup>   | 0.669  | 1.40   | 1.40   | 1.92   | 3.29   | 3.87   | 4.51   | 4.51   | 6.15  | 6.75  | 6.75  | 7.53  |
|     | Error               | (1.5)  | (1.4)  | (1.4)  | (0.0)  | (3.1)  | (1.8)  | (1.6)  | (1.6)  | (0.2) | (2.0) | (2.0) | (3.0) |
|     | FEM <sup>b)</sup>   | 0.659  | 1.38   | 1.38   | 1.92   | 3.19   | 3.80   | 4.44   | 4.44   | 6.14  | 6.62  | 6.62  | 7.31  |
|     | 0.2                 | SS     | SA     | AS     | SS     | AA     | SS     | SA     | AS     | AA    | SA    | AS    | SS    |
|     | Present             | 0.559  | 1.09   | 1.09   | 1.76   | 2.36   | 2.98   | 3.49   | 3.49   | 4.88  | 4.99  | 4.99  | 5.29  |
|     | Ritz <sup>18)</sup> | 0.593  | 1.18   | 1.18   | 1.76   | 2.59   | 3.13   | 3.65   | 3.65   | -     | -     | -     | -     |
|     | Error               | (6.1)  | (8.3)  | (8.3)  | (0.0)  | (9.4)  | (5.0)  | (4.6)  | (4.6)  | -     | -     | -     | -     |
|     | FEM <sup>a)</sup>   | 0.582  | 1.14   | 1.14   | 1.76   | 2.52   | 3.09   | 3.59   | 3.59   | 4.89  | 5.12  | 5.12  | 5.49  |
|     | Error               | (4.1)  | (4.6)  | (4.6)  | (0.0)  | (6.8)  | (3.7)  | (2.9)  | (2.9)  | (0.2) | (2.6) | (2.6) | (3.8) |
|     | FEM <sup>b)</sup>   | 0.558  | 1.08   | 1.08   | 1.76   | 2.36   | 2.98   | 3.49   | 3.49   | 4.89  | 4.99  | 4.99  | 5.29  |
| 0.5 | 0.001               | SS     | SA     | AS     | SS     | AA     | AS     | SS     | SA     | SS    | AS    | AA    | AS    |
|     | Present             | 0.235  | 0.696  | 0.831  | 1.31   | 1.62   | 1.80   | 2.51   | 2.83   | 3.17  | 3.77  | 4.15  | 4.91  |
|     | Ritz <sup>18)</sup> | 0.235  | 0.697  | 0.831  | 1.31   | 1.62   | 1.80   | 2.51   | 2.83   | -     | -     | -     | -     |
|     | 0.1                 | SS     | SA     | AS     | SS     | AA     | AS     | SA     | SS     | SS    | AS    | AA    | SA    |
|     | Present             | 0.220  | 0.557  | 0.667  | 1.03   | 1.24   | 1.52   | 2.03   | 2.11   | 2.57  | 2.75  | 2.81  | 3.57  |
|     | Ritz <sup>18)</sup> | 0.231  | 0.645  | 0.782  | 1.22   | 1.49   | 1.71   | 2.38   | 2.56   | -     | -     | -     | -     |
|     | Error               | (5.0)  | (15.8) | (17.2) | (18.4) | (20.2) | (12.5) | (17.2) | (21.3) | -     | -     | -     | -     |
|     | FEM <sup>a)</sup>   | 0.222  | 0.571  | 0.691  | 1.06   | 1.28   | 1.54   | 2.11   | 2.12   | 2.59  | 2.82  | 2.87  | 3.66  |
|     | Error               | (0.9)  | (2.5)  | (3.6)  | (2.9)  | (3.2)  | (1.3)  | (3.9)  | (0.5)  | (0.8) | (2.5) | (2.1) | (2.5) |
|     | FEM <sup>b)</sup>   | 0.220  | 0.556  | 0.665  | 1.03   | 1.24   | 1.52   | 2.02   | 2.11   | 2.58  | 2.75  | 2.80  | 3.57  |
|     | 0.2                 | SS     | SA     | AS     | SS     | AA     | AS     | SA     | SS     | AA    | SS    | AS    | SS    |
|     | Present             | 0.190  | 0.399  | 0.471  | 0.740  | 0.871  | 1.19   | 1.37   | 1.61   | 1.87  | 1.90  | 1.91  | 2.35  |
|     | Ritz <sup>18)</sup> | 0.223  | 0.577  | 0.702  | 1.08   | 1.30   | 1.54   | 2.12   | 2.15   | -     | -     | -     | -     |
|     | Error               | (17.2) | (44.6) | (49.0) | (45.6) | (48.9) | (30.2) | (54.6) | (33.5) | -     | -     | -     | -     |
|     | FEM <sup>a)</sup>   | 0.197  | 0.424  | 0.510  | 0.784  | 0.921  | 1.20   | 1.44   | 1.62   | 1.91  | 1.95  | 1.97  | 2.36  |
|     | Error               | (3.7)  | (6.3)  | (8.3)  | (5.9)  | (5.7)  | (0.8)  | (5.1)  | (0.6)  | (2.1) | (2.6) | (3.1) | (0.4) |
|     | FEM <sup>b)</sup>   | 0.190  | 0.397  | 0.468  | 0.737  | 0.868  | 1.19   | 1.37   | 1.61   | 1.87  | 1.91  | 1.91  | 2.35  |

表-3 点支持された周辺自由な Mindlin 平板の振動数パラメータΩの精度比較: Model A

a:  $44 \times 44$  uniform mesh, b:  $200 \times 200$  uniform mesh

限要素法による結果も要素分割数の増大に伴い,一定の値 に収束しているが,有限要素法は,解の収束が非常に遅い. 本解析法では,区分点の数 $m_{\xi} \times m_{\eta} = 45 \times 45$ で基本振動か ら12次までの動数パラメータ $\Omega$ の収束値を得ているが, 有限要素法では,本解析法の5倍の節点数を持って離散化 しなければ,本解析法と同様の結果を得ることができない. ここで,本解析法と有限要素法の自由度数(D.O.F.)の比と 区分点の数(節点数)の関係を図-4に示した.これより, $m_{\xi} \times m_{\eta} = 20 \times 20$ を超えると,FEM<sub>DOF</sub> / Present<sub>DOF</sub>の値が1 を上回り,本解析法の自由度数よりも有限要素法の自由度 数の方が大きくなる.さらに, $m_{\xi} \times m_{\eta} = 45 \times 45$ の場合に は,有限要素法の自由度数は、本解析法の自由度数のおお よそ4割増しになる.

表-2 より、本解析法による基本振動数パラメータ $\Omega_{lst}$ から 12 次の振動数パラメータ $\Omega_{l2h}$ の値の収束状態は、表 -1 と同様の結果であるが、表-1 の結果と比べると、やや 解の収束が遅くなっており、また、有限要素法の解の収束 は、さらに遅くなっている.しかしながら、本解析法によ

れば、有限要素法よりも少ない自由度数で良好な結果を得ることができるため、本解析法は、有限要素法よりも効率良く、効果的に解析が可能であると判断できよう.ここで、ほぼ収束値と見なせる本解析法の区分点の数 $m_{\xi} \times m_{\eta} = 45 \times 45$ による数値解の解析精度について検討する.

表-3 には、Model A のように点支持された周辺自由な Mindlin 平板の振動数パラメータΩの精度比較が示してあ る. ここで、板厚比h/aは0.001から0.2まで変化させて おり、辺長比b/aは1 と0.5に設定した.また、本解析法 による解の妥当性の検証と既往の研究報告による数値解 の問題点を抽出するために、Kitipornchai・Xiang・Liew<sup>18)</sup> の Mindlin 平板理論に基づくべき級数を試行関数に採用し た*pb*-2 Ritz 法と Lagrange 乗数法を組み合わせた数値解析 法による数値解(Ritz)と汎用有限要素コード Abaqus 6.8-2 を用いた有限要素解(FEM)を併記した.ここで、Ritz<sup>18)</sup>は、 せん断修正係数 $\kappa$ =5/6と級数展開項数14 termによる結果 であり、FEM は4 節点シェル要素を用い、要素分割は等 分割とし、本解析法と同じ節点の数の結果(a: 44 × 44 mesh)

| b/a | h/a   | Modes       |            |            |            |            |             |            |            |            |            |             |            |
|-----|-------|-------------|------------|------------|------------|------------|-------------|------------|------------|------------|------------|-------------|------------|
| 07u | n/u   | 1st         | 2nd        | 3rd        | 4th        | 5th        | 6th         | 7th        | 8th        | 9th        | 10th       | 11th        | 12th       |
| 1   | 0.001 | SS          | SA         | AS         | SS         | AA         | SS          | SA         | AS         | AA         | SA         | AS          | SS         |
|     |       | 0.720       | 1.60       | 1.60       | 1.99       | 3.89       | 4.50        | 5.10       | 5.10       | 7.02       | 8.14       | 8.14        | 9.34       |
|     | 0.01  | SS          | SA         | AS         | SS         | AA         | SS          | SA         | AS         | AA         | SA         | AS          | SS         |
|     |       | 0.718       | 1.59       | 1.59       | 1.99       | 3.86       | 4.46        | 5.09       | 5.09       | 6.99       | 8.08       | 8.08        | 9.27       |
|     | 0.05  | SS          | SA         | AS         | SS         | AA         | SS          | SA         | AS         | AA         | SA         | AS          | SS         |
|     |       | 0.698       | 1.51       | 1.51       | 1.97       | 3.63       | 4.22        | 4.88       | 4.88       | 6.71       | 7.56       | 7.56        | 8.58       |
|     | 0.1   | SS          | SA         | AS         | SS         | AA         | SS          | SA         | AS         | AA         | SA         | AS          | SS         |
|     |       | 0.659       | 1.38       | 1.38       | 1.92       | 3.19       | 3.80        | 4.44       | 4.44       | 6.14       | 6.62       | 6.62        | 7.31       |
|     | 0.2   | SS          | SA         | AS         | SS         | AA         | SS          | SA         | AS         | AA         | SA         | AS          | SS         |
|     |       | 0.559       | 1.09       | 1.09       | 1.76       | 2.36       | 2.98        | 3.49       | 3.49       | 4.88       | 4.99       | 4.99        | 5.29       |
| 1.2 | 0.001 | SS          | AS         | SA         | SS         | AA         | SA          | SS         | AS         | AA         | SA         | AS          | SS         |
|     |       | 0.830       | 1.83       | 2.01       | 2.46       | 4.57       | 5.38        | 5.45       | 6.85       | 8.66       | 9.40       | 10.3        | 10.5       |
|     | 0.01  | SS          | AS         | SA         | SS         | AA         | SA          | SS         | AS         | AA         | SA         | AS          | SS         |
|     |       | 0.827       | 1.82       | 2.00       | 2.46       | 4.54       | 5.37        | 5.42       | 6.82       | 8.63       | 9.33       | 10.2        | 10.4       |
|     | 0.05  | SS          | AS         | SA         | SS         | AA         | SS          | SA         | AS         | AA         | SA         | AS          | SS         |
|     |       | 0.809       | 1.74       | 1.91       | 2.43       | 4.30       | 5.17        | 5.24       | 6.49       | 8.29       | 8.76       | 9.73        | 9.90       |
|     | 0.1   | SS          | AS         | SA         | SS         | AA         | SS          | SA         | AS         | AA         | SA         | SS          | AS         |
|     |       | 0.773       | 1.61       | 1.76       | 2.37       | 3.86       | 4.72        | 4.94       | 5.81       | 7.60       | 7.73       | 8.78        | 8.79       |
|     | 0.2   | SS          | AS         | SA         | SS         | AA         | SS          | SA         | AS         | SA         | AA         | SS          | AS         |
|     |       | 0.675       | 1.31       | 1.41       | 2.16       | 2.96       | 3.80        | 4.17       | 4.46       | 5.86       | 6.09       | 6.62        | 6.89       |
| 1.5 | 0.001 | SS          | AS         | SA         | SS         | AA         | SA          | SS         | AS         | SS         | SA         | AA          | AS         |
|     | 0.01  | 0.904       | 2.18       | 2.62       | 3.41       | 5.34       | 5.85        | 7.10       | 9.08       | 11.2       | 11.4       | 11.8        | 13.7       |
|     | 0.01  | SS          | AS         | SA         | SS         | AA         | SA          | SS         | AS         | SS         | SA         | AA          | AS         |
|     | 0.05  | 0.903       | 2.17       | 2.60       | 3.41       | 5.31       | 5.84        | 7.07       | 9.03       | 11.1       | 11.4       | 11.7        | 13.7       |
|     | 0.05  | SS          | AS         | SA         | SS         | AA         | SA          | SS         | AS         | SA         | SS         | AA          | AS         |
|     | 0.1   | 0.890       | 2.09       | 2.51       | 3.34       | 5.10       | 3.73        | 6.82       | 8.5/       | 10.8       | 10.8       | 11.2        | 13.3       |
|     | 0.1   | 55          | AS         | SA         | 55         | AA         | SA          | 55         | AS         | SA         | 55         | AA<br>10.1  | AS         |
|     | 0.2   | 0.865       | 1.96       | 2.33       | 3.20       | 4.69       | 5.54        | 0.33       | /.08       | 9.69       | 10.1       | 10.1        | 12.3       |
|     | 0.2   | 33          | AS         | 5A<br>1.01 | 202        | AA<br>2 77 | 5A<br>4.04  | 55         | AS<br>5.02 | 5A<br>7.52 | AA<br>7.00 | SS<br>0 2 1 | AS         |
|     | 0.001 | 0.790       | 1.00       | 1.91       | 2.83       | 5.//       | 4.94        | 3.33       | 3.92       | 7.33       | /.90       | 0.31        | 10.0       |
| 2   | 0.001 | 55          | AS<br>2 70 | SA<br>2 22 | 5 26       | AA<br>6 46 | SA          | 55         | AS         | SS<br>12.7 | SA<br>15 1 | AA<br>16.6  | SA<br>10.7 |
|     | 0.01  | 0.941       | 2.79       | 5.55       | 5.20       | 0.40       | 1.22        | 10.0       | 11.5       | 12.7       | 15.1       | 10.0        | 19./       |
|     | 0.01  | 33          | AS<br>2 77 | SA<br>2 22 | 504        | AA<br>6 42 | 5A<br>7 20  | 33<br>10.0 | AS         | 33<br>12.6 | 5A<br>15 0 | AA<br>16.5  | 5A<br>10.6 |
|     | 0.05  | 0.940       | 2.11       | 5.52       | 5.24       | 0.45       | 7.20        | 10.0       | 11.5       | 12.0       | 13.0       | 10.5        | 19.0       |
|     | 0.05  | 0.024       | AS<br>2.60 | SA<br>2 24 | 55<br>5 00 | AA<br>6 22 | 5A<br>7.07  | 33<br>0.97 | AS<br>10.9 | 33<br>124  | 5A<br>14.5 | AA<br>15.9  | 5A<br>10.1 |
|     | 0.1   | 0.934       | 2.09       | 5.24       | 5.09       | 0.23       | <u>/.U/</u> | 9.0/       | 10.0       | 12.4       | 14.3       | 13.0        | 19.1       |
|     | 0.1   | 0 021       | AS<br>255  | 5A<br>2 09 | 33<br>/ 81 | AA<br>5 86 | 5A<br>6 80  | 55<br>0 10 | AS<br>10.0 | 55<br>11.8 | 5A<br>13 4 | AA<br>14 2  | 5A<br>17.0 |
|     | 0.2   | 0.921<br>SS | 4.55       | 5.00       | 4.01       | 3.00       | S A         | 7.40       | <u> </u>   | 11.0<br>CC | 13.4<br>SA | 14.3        | 17.7       |
|     | 0.2   | 0 660       | A3<br>2 22 | 3A<br>267  | ی<br>⊿ 11  | AA<br>1 09 | 5A<br>6 00  | AS<br>812  | 55<br>8 12 | 33<br>10 2 | 3A<br>11.0 | AA<br>11 2  | AS<br>1/2  |
|     |       | 0.000       | 2.23       | 2.07       | 4.11       | 4.70       | 0.09        | 0.12       | 0.42       | 10.3       | 11.0       | 11.4        | 14.3       |

表-4 Model A のように点支持された Mindlin 平板の振動数パラメータΩに与える板厚比 h/a と辺長比 b/a の影響

とかなり密に要素分割した結果(b: 200 × 200 mesh)を示した.また,括弧の値は,本解析法の解を基準とした時の誤差(%)を意味し, 5.0%以上の結果は bold で示してある.

これより、まず、点支持された薄肉正方形平板(b/a=1, h/a = 0.001)では、本解析法による結果と Kitipomchai・ Xiang・Liew<sup>18)</sup>による *pb*-2 Ritz 法(Ritz)による結果は、非常 によく一致している.しかしながら、点支持された中等厚 肉正方形平板(b/a=1,h/a=0.1)においては、本解析法の結 果と要素分割を密にした有限要素解(FEM<sup>b</sup>)は一致してい るが、*pb*-2 Ritz 法(Ritz)による結果は2 ~ 4% 程度、有限 要素解(FEM<sup>a</sup>)は、2 ~ 3% 程度の誤差が生じている.さ らに、h/a=0.2なる中等厚肉正方形平板(b/a=1)では、 *pb*-2 Ritz法(Ritz)及び有限要素解(FEM<sup>b</sup>)の誤差が5.0%以上 になり、最大で9.4%の誤差を生じているが、本解析法の 結果と有限要素解(FEM<sup>b</sup>)はほぼ一致している.次に,点 支持された長方形平板(b/a=0.5)における本解析法による 結果と有限要素解(FEM<sup>a</sup>),FEM<sup>b</sup>)は,ほぼ正方形平板の結 果と同様であるが,中等厚肉長方形平板(b/a=1,h/a=0.1, 0.2)においては, pb-2 Ritz 法(Ritz)による結果は,誤差が全 て 5.0 %以上であり,振動次数が大きくなると最大で 54.6%もの誤差が生じている.これは、単純なべき級数を 試行関数に採用した pb-2 Ritz 法では、正確な変形状態を再 現することができなくなることが原因であると考えられ る.また,正方形平板の結果から判断すれば、級数の展開 項数を高めると係数行列の悪条件が生じる pb-2 Ritz 法で は、点支持された長方形平板の解の解析精度を高めること が困難になると思われる.よって、Kitipomchai・Xiang・ Liew<sup>18</sup>の数値解を参照解として用いることは適切でない

| h/a | h/a   | Modes      |            |            |            |             |             |             |            |            |            |                |            |
|-----|-------|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|----------------|------------|
| 07u | n/u   | 1st        | 2nd        | 3rd        | 4th        | 5th         | 6th         | 7th         | 8th        | 9th        | 10th       | 11th           | 12th       |
| 1   | 0.001 | AA         | SS         | SA         | AS         | SS          | SA          | AS          | AA         | SA         | AS         | AA             | SS         |
|     |       | 1.37       | 1.81       | 1.90       | 1.90       | 2.73        | 5.18        | 5.18        | 7.02       | 7.68       | 7.68       | 7.82           | 7.88       |
|     | 0.01  | AA         | SS         | SA         | AS         | SS          | SA          | AS          | AA         | SA         | AS         | SS             | AA         |
|     |       | 1.36       | 1.80       | 1.89       | 1.89       | 2.72        | 5.16        | 5.16        | 6.99       | 7.63       | 7.63       | 7.78           | 7.79       |
|     | 0.05  | AA         | SS         | SA         | AS         | SS          | SA          | AS          | AA         | SS         | SA         | AS             | AA         |
|     |       | 1.33       | 1.72       | 1.81       | 1.81       | 2.63        | 4.97        | 4.97        | 6.71       | 6.97       | 7.15       | 7.15           | 7.50       |
|     | 0.1   | AA         | SS         | SA         | AS         | SS          | SA          | AS          | SS         | AA         | SA         | AS             | AA         |
|     |       | 1.29       | 1.57       | 1.67       | 1.67       | 2.49        | 4.54        | 4.54        | 5.68       | 6.14       | 6.31       | 6.31           | 6.85       |
|     | 0.2   | AA         | SS         | SA         | AS         | SS          | SA          | AS          | SS         | SA         | AS         | AA             | AA         |
|     |       | 1.19       | 1.22       | 1.33       | 1.33       | 2.20        | 3.58        | 3.58        | 3.81       | 4.83       | 4.83       | 4.88           | 5.43       |
| 1.2 | 0.001 | AA         | SS         | AS         | SA         | SS          | SA          | AS          | AA         | SA         | SS         | AS             | AA         |
|     |       | 1.64       | 2.18       | 2.22       | 2.32       | 3.31        | 5.77        | 6.64        | 7.82       | 8.82       | 9.43       | 9.89           | 10.3       |
|     | 0.01  | AA         | SS         | AS         | SA         | SS          | SA          | AS          | AA         | SA         | SS         | AS             | AA         |
|     |       | 1.63       | 2.17       | 2.21       | 2.30       | 3.30        | 5.76        | 6.61        | 7.79       | 8.75       | 9.33       | 9.84           | 10.2       |
|     | 0.05  | AA         | SS         | AS         | SA         | SS          | SA          | AS          | AA         | SA         | SS         | AS             | AA         |
|     |       | 1.60       | 2.09       | 2.13       | 2.22       | 3.22        | 5.64        | 6.31        | 7.53       | 8.21       | 8.49       | 9.40           | 9.87       |
|     | 0.1   | AA         | SS         | AS         | SA         | SS          | SA          | AS          | AA         | SS         | SA         | AS             | AA         |
|     |       | 1.55       | 1.92       | 1.98       | 2.06       | 3.06        | 5.33        | 5.70        | 7.00       | 7.10       | 7.24       | 8.54           | 9.07       |
|     | 0.2   | AA         | SS         | AS         | SA         | SS          | AS          | SA          | SS         | SA         | AA         | AS             | SS         |
|     |       | 1.44       | 1.53       | 1.63       | 1.68       | 2.71        | 4.45        | 4.50        | 4.91       | 5.51       | 5.77       | 6.76           | 7.17       |
| 1.5 | 0.001 | AA         | AS         | SS         | SA         | SS          | SA          | AS          | AA         | SA         | SS         | SS             | AS         |
|     | 0.01  | 2.04       | 2.65       | 2.77       | 2.82       | 4.35        | 6.75        | 8.63        | 8.70       | 10.8       | 11.5       | 12.0           | 13./       |
|     | 0.01  | AA         | AS         | 55         | SA         | 55          | SA          | AS          | AA         | SA<br>10.7 | 55         | 55             | AS         |
|     | 0.05  | 2.03       | 2.64       | 2.75       | 2.82       | 4.34        | 6.74        | 8.38        | 8.6/       | 10.7       | 11.4       | 12.0           | 13./       |
|     | 0.05  | AA<br>2 00 | AS<br>256  | 33         | 5A<br>2.74 | 33          | 5A<br>6 6 2 | AS<br>0 10  |            | 5A<br>10.1 | 55<br>10.9 | 55<br>11 5     | AS<br>12.2 |
|     | 0.1   | 2.00       | 2.30       | 2.00       | 2.74       | 4.23        | 0.05        | 0.10        | 0.44       | 10.1       | 10.8       | 11.3           | 15.5       |
|     | 0.1   | AA<br>1 04 | AS<br>2 41 | 33<br>246  | 5A<br>2.59 | 33          | 5A<br>6 27  | AS<br>7 4 1 | AA<br>7.07 | 5A<br>0.06 | 022        | 33<br>107      | AS<br>12.2 |
|     | 0.2   | 1.94       | 2.41       | 2.40       | 2.30       | 4.00        | 0.57        | /.41        | 1.91       | 9.00       | 9.52       | 10.7           | 12.5       |
|     | 0.2   | AA<br>1 82 | 2 01       | AS<br>2.06 | 2 18       | 3 50        | 5 63        | AS<br>5.84  | 55<br>6 80 | AA<br>6.82 | 5A<br>6 08 | 33<br>886      | AS<br>10.1 |
| 2   | 0.001 | 1.02       | 2.01<br>SA | 2.00       | 2.10       | 5.55        | 5.05        | J.04        | 10.00      | 0.02<br>SS | 0.90<br>SA | 0.00<br>CC     | 10.1       |
| 2   | 0.001 | AA<br>2 60 | 3A<br>333  | AS<br>2 22 | 367        | 55<br>6 1 2 | SA<br>883   | AA<br>10 3  | AS<br>11 3 | 13.5       | 3A<br>14 5 | 33<br>15.8     | AS<br>20.0 |
|     | 0.01  | <u> </u>   | 15         | SA         | 5.07       | <u>SS</u>   | SA          | ΛΛ          | 11.5       | 13.5<br>SS | 14.J<br>SA | 13.0<br>SS     | 20.0       |
|     | 0.01  | 2 68       | 3 3 2      | 3 32       | 3 65       | 641         | 8 81        | 10.3        | 11.2       | 13.4       | 14.4       | 157            | 10.0       |
|     | 0.05  | Δ.00       | 15.52      | <u>SA</u>  | <u>SS</u>  | 22          | SA          | ΔΔ          | 11.2       | <u>SS</u>  | ۲.۲<br>۲   | <u>SS</u>      | 19.9       |
|     | 0.05  | 2 64       | 3 24       | 3 27       | 3 54       | 6 29        | 8.62        | 10.0        | 10.8       | 13.2       | 13.9       | 14.9           | 193        |
|     | 0.1   |            | <u>AS</u>  | SA<br>SA   | <u></u>    | <u>SS</u>   | SA          | ΔΔ          | 45         | <u>SS</u>  | <u>SΔ</u>  | <u><u></u></u> | <u>AS</u>  |
|     | 0.1   | 2.58       | 3 09       | 3 16       | 3 33       | 6 02        | 8 23        | 9.61        | 995        | 12.6       | 12.8       | 13.4           | 17.8       |
|     | 0.2   | <u>AA</u>  | AS         | SS         | SA         | SS          | SA          | AS          | <b>A</b> A | SS         | SA         | SS             | AS         |
|     | 0.2   | 2.43       | 2 73       | 2 82       | 2.82       | 5 26        | 7 17        | 816         | 8 52       | 10.5       | 10.6       | 11.0           | 14 5       |
|     |       | 2.15       |            | 2.02       | 2.02       | 2.20        | ,.1/        | 0.10        | 0.04       | 10.0       | 10.0       | 11.0           | 11.0       |

表-5 Model B のように点支持された Mindlin 平板の振動数パラメータΩに与える板厚比 h/a と辺長比 b/a の影響

と言える.他方、本解析法により求められる振動数パラメ ータΩの値は、有限要素法よりもかなり少ない自由度数で、 精度の良い上界の値が得られていると判断できるため、文 献 18)に変わって、十分に参照解として用いることができ るものである.

以上, 3.1 及び 3.2 の検討結果より, B-spline Ritz 法と Lagrange 乗数法を組み合わせた非常に単純で簡易的かつ 容易に取り扱える数値解析法は,点支持された周辺自由な Mindlin 平板の自由振動問題を効率良く,効果的に解析で き,かつ,所用の解析精度(有効数字3桁)を有限要素法よ りも少ない自由度数で確保できる.このことから判断すれ ば,点支持された周辺自由な Mindlin 平板の自由振動問題 における本解析法の適用性は十分にあり,また,本解析法 は局所的な影響が現れる種々の問題に有用であると言え よう. 以後の数値計算では、区分点の数 $m_{\xi} \times m_{\eta} = 45 \times 45$ を統一して用いる.

# 3.3 点支持された周辺自由 Mindlin 平板の振動数パラメ ータに与える板厚比,辺長比及び点支持の数の影響

ここでは、点支持された周辺自由な Mindlin 平板の振動 数パラメータ $\Omega$ に与える板厚比h/a,辺長比b/a及び点支 持の数の影響について示す。

**表-4**から表-6には、それぞれ、Model A, Model B 及び Model C なる点支持された周辺自由 Mindlin 平板の振動数 パラメータΩに与える板厚比h/a 及び辺長比b/aの影響が 示してある. ここで、h/a は 0.001 から 0.2 まで変化させ、 b/a は 1, 1.2, 1.5 及び 2 に設定した.

| h/a | h/a   | Modes |            |      |      |      |            |            |            |            |            |      |            |
|-----|-------|-------|------------|------|------|------|------------|------------|------------|------------|------------|------|------------|
| 0/u | n/u   | 1st   | 2nd        | 3rd  | 4th  | 5th  | 6th        | 7th        | 8th        | 9th        | 10th       | 11th | 12th       |
| 1   | 0.001 | SS    | SA         | AS   | AA   | SS   | SA         | AS         | AA         | SS         | SA         | AS   | SS         |
|     |       | 1.81  | 3.53       | 3.53 | 3.89 | 6.09 | 6.94       | 6.94       | 7.02       | 7.88       | 8.88       | 8.88 | 11.9       |
|     | 0.01  | SS    | SA         | AS   | AA   | SS   | SA         | AS         | AA         | SS         | SA         | AS   | SS         |
|     |       | 1.80  | 3.52       | 3.52 | 3.86 | 6.03 | 6.88       | 6.88       | 6.99       | 7.78       | 8.81       | 8.81 | 11.8       |
|     | 0.05  | SS    | SA         | AS   | AA   | SS   | SA         | AS         | AA         | SS         | SA         | AS   | AA         |
|     |       | 1.73  | 3.32       | 3.32 | 3.63 | 5.52 | 6.40       | 6.40       | 6.71       | 6.97       | 8.14       | 8.14 | 11.1       |
|     | 0.1   | SS    | SA         | AS   | AA   | SS   | SA         | AS         | SS         | AA         | SA         | AS   | AA         |
|     |       | 1.60  | 2.93       | 2.93 | 3.19 | 4.65 | 5.56       | 5.56       | 5.68       | 6.14       | 6.99       | 6.99 | 9.24       |
|     | 0.2   | SS    | SA         | AS   | AA   | SS   | SS         | SA         | AS         | AA         | SA         | AS   | AA         |
|     |       | 1.30  | 2.13       | 2.13 | 2.36 | 3.30 | 3.81       | 4.09       | 4.09       | 4.88       | 5.14       | 5.14 | 6.44       |
| 1.2 | 0.001 | SS    | SA         | AA   | AS   | SS   | SA         | AA         | AS         | SS         | AS         | SA   | SS         |
|     |       | 2.18  | 3.71       | 4.57 | 4.65 | 7.08 | 8.18       | 8.66       | 8.67       | 9.43       | 10.5       | 10.9 | 14.2       |
|     | 0.01  | SS    | SA         | AA   | AS   | SS   | SA         | AS         | AA         | SS         | AS         | SA   | SS         |
|     |       | 2.17  | 3.70       | 4.54 | 4.62 | 7.03 | 8.12       | 8.60       | 8.63       | 9.33       | 10.5       | 10.8 | 14.1       |
|     | 0.05  | SS    | SA         | AA   | AS   | SS   | SA         | AS         | AA         | SS         | SA         | AS   | SS         |
|     |       | 2.10  | 3.57       | 4.30 | 4.35 | 6.55 | 7.64       | 8.04       | 8.29       | 8.49       | 9.90       | 9.97 | 13.3       |
|     | 0.1   | SS    | SA         | AS   | AA   | SS   | SA         | AS         | SS         | AA         | SA         | AS   | SS         |
|     |       | 1.95  | 3.27       | 3.82 | 3.86 | 5.68 | 6.79       | 7.03       | 7.10       | 7.60       | 8.39       | 8.98 | 11.5       |
|     | 0.2   | SS    | SA         | AS   | AA   | SS   | SS         | SA         | AS         | SA         | AA         | AS   | SS         |
|     |       | 1.62  | 2.56       | 2.78 | 2.96 | 4.15 | 4.92       | 5.18       | 5.20       | 6.08       | 6.09       | 6.99 | 8.21       |
| 1.5 | 0.001 | SS    | SA         | AA   | AS   | SS   | SA         | AS         | SS         | AA         | SA         | AS   | SS         |
|     |       | 2.79  | 3.82       | 5.34 | 6.01 | 8.01 | 10.3       | 11.6       | 11.7       | 11.8       | 13.3       | 13.7 | 17.8       |
|     | 0.01  | SS    | SA         | AA   | AS   | SS   | SA         | AS         | SS         | AA         | SA         | AS   | SS         |
|     |       | 2.78  | 3.81       | 5.31 | 5.97 | 7.97 | 10.3       | 11.5       | 11.6       | 11.7       | 13.2       | 13.7 | 17.7       |
|     | 0.05  | SS    | SA         | AA   | AS   | SS   | SA         | SS         | AS         | AA         | SA         | AS   | SS         |
|     |       | 2.69  | 3.73       | 5.10 | 5.63 | 7.64 | 9.77       | 10.8       | 10.8       | 11.2       | 12.2       | 13.3 | 16.4       |
|     | 0.1   | SS    | SA         | AA   | AS   | SS   | SA         | SS         | AS         | AA         | SA         | AS   | SS         |
|     |       | 2.53  | 3.54       | 4.69 | 5.01 | 6.93 | 8.87       | 9.32       | 9.48       | 10.1       | 10.5       | 12.3 | 14.1       |
|     | 0.2   | SS    | SA         | AS   | AA   | SS   | SS         | SA         | AS         | SA         | AA         | AS   | SS<br>10.5 |
|     | 0.001 | 2.12  | 3.01       | 3.73 | 3.77 | 5.38 | 6.81       | 6.98       | /.06       | /.66       | /.98       | 10.1 | 10.5       |
| 2   | 0.001 | SS    | SA         | AA   | AS   | SS   | SA         | SA         | SS<br>15 7 | AS         | AA         | AS   | SS         |
|     | 0.01  | 3.//  | 3.8/       | 6.46 | /.61 | 9.20 | 14.4       | 15.2       | 15./       | 16.4       | 16.6       | 21.2 | 22.2       |
|     | 0.01  | 35    | SA         | AA   | AS   | 55   | SA         | SA         | 55         | AS         | AA         | AS   | 55         |
|     | 0.05  | 3.75  | 3.80       | 6.43 | /.55 | 9.18 | 14.4       | 15.1       | 15.6       | 16.3       | 16.5       | 21.2 | 22.1       |
|     | 0.05  | 88    | SA         | AA   | AS   | 55   | SA<br>12.0 | SA         | 55         | AS         | AA<br>15.0 | AS   | 88         |
|     | 0.1   | 3.66  | 3.82       | 6.23 | /.21 | 8.9/ | 13.9       | 14.5       | 14.8       | 15.4       | 15.8       | 20.5 | 20.9       |
|     | 0.1   | 55    | SA<br>2 72 | AA   | AS   | 55   | SA<br>12.7 | SS<br>12.4 | SA<br>12.4 | AS         | AA         | 55   | AS         |
|     | 0.2   | 3.4/  | 3.12       | 3.80 | 0.39 | 8.30 | 12./       | 13.4       | 13.4       | 13./       | 14.3       | 18.4 | 18.9       |
|     | 0.2   | 35    | SA<br>2.40 | AA   | AS   | 55   | SA         | AS         | 55<br>10 5 | SA<br>11 1 | AA         | 55   | AS         |
|     |       | 2.97  | 3.40       | 4.98 | 5.20 | /.1/ | 9.84       | 10.4       | 10.5       | 11.1       | 11.2       | 13.9 | 15.5       |

表-6 Model C のように点支持された Mindlin 平板の振動数パラメータ $\Omega$ に与える板厚比h/a と辺長比b/a の影響

これより、Model 及びb/aに係わらず、h/aの増大に伴 い、 $\Omega$ の値は低下する.これは、板厚の増大に伴い、面外 せん断変形と曲げによる回転慣性の影響によるものであ ると考えられる.また、b/aが大きくなると、正方形平板 よりも面積が大きくなることにより平板の曲げ剛性が大 きくなるため、 $\Omega$ の値は増加する.さらに、 $h/a \ge b/a$ に 係わらず、点支持の数が増えると、 $\Omega$ の値は増大する.

# 3.4 隅各部が点支持された周辺自由正方形 Mindlin 平板 の固有振動モードに与える板厚比の影響

構造設計では、固有振動数のみでなく、振幅変位や断面 力を含めた固有振動モードの把握が必要不可欠になる.こ こでは、Model A を例に取り、基本振動数パラメータ $\Omega_{lst}$  に対応する固有振動モード(振幅変位,曲げモーメント及びせん断力)と板厚比 h/aの関係について検討する.

点支持された周辺自由正方形 Mindlin 平板(b / a = 1)の $\xi$ 軸方向( $\eta = 0$ )の振幅変位モード W, 曲げモーメント  $M_x$ 及 びせん断力モード  $Q_x, Q_y$ と板厚比h / aの関係を図-5 に示 した. ここで, h / aは 0.001 から 0.2 まで変化させている.

これより、 $0.001 \le h/a \le 0.05$ の範囲では、Wの分布形 状に大きな相違は見られないが、 $h/a \ge 0.1$ なる中等厚肉 平板になると、点支持された付近で形状に相違が認められ る. 次に、極薄肉平板の $M_x$ の分布は、放物線分布を成し ているが、 $h/a \ge 0.01$ の範囲では、点支持近傍で $M_x$ が急 激に生じており、また、h/aの増大にともない、 $M_x$ の大 きさも増大する. さらに、 $Q_x$ の分布も $M_x$ とほぼ同様の傾 向にあり、特に、 $h/a \ge 0.05$ の範囲では、点支持付近で急



(c) Shearing force mode  $Q_x$  (d) Shearing force mode  $Q_y$ 図-5 点支持された正方形平板の $\xi$ 軸方向の固有振動モード $W, M_x, Q_x, Q_y$ と板厚比h/aの関係: $b/a=1, \eta=0$ 

激な分布の変化があり、点支持された位置で最大の $Q_x$ が 集中的に生じている.なお、 $Q_y$ の分布については、h/aの影響が見られないが、点支持された位置で最大の $Q_y$ が 生じている.最後に、今、点支持された部分を除けば、平 板は自由辺であるので、 $\eta=0$ の辺では、 $M_y=0, M_{xy}=0, Q_y$ =0を満足していなければならないが、図-5より、点支持 付近を除けば、 $Q_y=0$ を十分に満足した結果が得られてい る.また、紙面の都合上割愛したが、 $M_y$ も点支持された 位置を除けば、 $M_y=0$ を満足していることを確認している。 したがって、有限要素法では、力学的境界条件を満足した 固有振動モードを求めることが容易ではないが、本解析法 によれば、力学的境界条件を満足した固有振動モードを求 めることが可能である。

#### 4. あとがき

本論文では、B-spline Ritz 法と Lagrange 乗数法を用いて、 点支持された周辺自由 Mindlin 平板の自由振動問題を定式 化し、本解析法の解の収束状態及び解の精度比較から、点 支持された Mindlin 平板の自由振動問題への B-spline Ritz 法の適用性及び効果性について検討した.また、点支持さ れた周辺自由 Mindlin 平板の自由振動特性に与える板厚比, 辺長比及び点支持の数の影響の一部を明らかにした.本論 文で得られた結果を纏めると,以下のとおりである.

- (1) B-spline Ritz 法と Lagrange 乗数法を組み合わせた非 常に単純で簡易的かつ容易に取り扱える数値解析法 は、点支持された周辺自由な Mindlin 平板の自由振動 問題を効率良く、効果的に解析でき、かつ、所用の 解析精度(有効数字 3 桁)を有限要素法よりも少ない 自由度数で確保できるため、本解析法の適用性は十 分にある.
- (2) 解析モデル及び b/a に係わらず, h/a の増大に伴い, 面外せん断変形と曲げによる回転慣性の影響により, Ωの値は低下する.また, b/a が大きくなると,平 板の剛性が大きくなるため, Ωの値は増加する.
- (3) 隅各部が点支持された平板の固有振動モードは, h/a の影響を大きく受け、中等厚肉平板になると、点支 持された付近で面外振幅変位の分布形状に相違が認 められ、また、断面力が集中的に生じている.

最後に、本論文で示した表の振動数パラメータΩの値は、 有限要素解や他の数値解析法による近似解のベンチマー クテストに使って頂ければ幸いである.

### 参考文献

- Leissa, A.W.: Vibration of Plates, Acoustical Society of America, 1993.
- Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, ASEM Journal of Applied Mechanics 73, pp.31-38, 1951.
- Reddy, J.N.: A simple high-order theory for laminated composite plates, ASEM Journal of Applied Mechanics 45, pp. 745-752, 1984.
- Reddy, J.N. and Phan, N.D.: Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a high-order shear deformation theory, Journal of Sound and Vibration 98, pp. 157-170, 1985.
- Wang, C.M., Reddy, J.N. and Lee, K.H.: Shear deformable beams and plates – Relationship with classical solutions, Elsevier, 2000.
- Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M.: A high order theory of plate deformation – I. Homogeneous plates, ASEM Journal of Applied Mechanics 44, pp.663-668, 1977.
- Gorman, D.J.: Free vibration analysis of rectangular plates with symmetrically distributed point supports along edges, Journal of Sound and Vibration 73, pp.563-574, 1980.
- Gorman, D.J.: An analytical solution for the free vibration analysis of rectangular plates resting on symmetrically distributed point supports, Journal of Sound and Vibration 79, pp.561-574, 1981.
- Raju, I.S. and Amba-Rao, C.L.: Free vibrations of a square plate symmetrically supported at four points on the diagonals, Journal of Sound and Vibration 90, pp.291-297, 1983.
- Fan, S.C. and Cheung, Y.K.: Flexural free vibrations of redtangular plates with complex support conditions, Journal of Sound and Vibration 93, pp. 81-94, 1984.
- Narita, Y.: Note on vibrations of point supported rectangular plates, Journal of Sound and Vibration 93, pp.593-597, 1984.
- Narita, T.: The effect of point constraints on transverse vibration of cantilever plate, Journal of Sound and Vibration 102, pp.305-313, 1985.
- Mizusawa, T. and Kajita, T.: Vibrtion of skew plates resting on point supports, Journal of Sound and Vibration 115, pp.243-251, 1987.

- 14) Kim, C.S. and Dickinson, S.M.: The flexural vibration of rectangular plates with point support, Journal of Sound and Vibration 117, pp.249-261, 1987.
- 15) Gorman, D.J.: A note on the free vibration of rectangular plates resting on symmetrically distributed point supports, Journal of Sound and Vibration 131, pp.515-519, 1989.
- 16) Bardell, N.S.: Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method, Journal of Sound and Vibration 151, pp.263-289, 1991.
- Aksu, G. and Felemban, M.B.: Frequency analysis of corner point supported Mindlin plates by a finite difference energy method, Journal of Sound and Vibration 158, pp.531-544, 1992.
- 18) Kitipornchai, S., Xiang, Y. and Liew, K.M.: Vibration analysis of corner supported Mindlin plates of arbitrary shape using the Lagrange multiplier method, Journal of Sound and Vibration 173, pp.457-470, 1994.
- 19) Liew, K.M., Xiang, Y., Kitipornchai, S. and Lim, M.K.: Vibration of Mindlin plates on point supports using constraint functions, ASCE Journal of Engineering Mechanics 120, pp.499-513, 1994.
- 20) 内山武司,上田正生:点支持を有する Mindlin 平板の 自由振動解析,日本建築学会構造系論文集,第512号, pp.83-89, 1998.
- Gorman, D.J.: Accurate free vibration analysis of point supported Mindlin plates by the superposition method, Journal of Sound and Vibration 219, pp. 265-277, 1999.
- 22) Huang, M., Ma, X.Q., Sakiyama, T., Matsuda, H. and Morita, C.: Free vibration analysis of rectangular plates with variable thickness and point supports, Journal of Sound and Vibration **300**, pp.435-452, 2007.
- 23) Liew, K.M., Wang, C.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.: Vibration of Mindlin plates – Programming the p-Version Ritz method, Elsevier Science, Oxford, 1998.
- Leissa, A.W.: The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods, Journal of Sound and Vibration 287, pp.961-978, 2005.
- Boor, C.D.: On calculating with B-splines, Journal of Approximation Theory 6, pp.50-62, 1972.
- 26) Nagino, H., Mikami, T. and Mizusawa, T.: Threedimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method, Journal of Sound and Vibration **317**, pp.329-353, 2008.

(2009年4月9日 受付)