動弾性問題への CIP 法の適用に関する研究

An application of the CIP Method to Elastodynamics

西藤 潤*

Jun SAITO

*正会員 博士 (工学) 京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 615-8140 京都府西京区京都大学桂 C)

An application of the CIP method to elastodynamics is discussed in this study. Numerical analysis of elastic wave plays a very important role in various engineering field. While the CIP method is widely used to solve hydrodynamic or electromagnetic problems, there are few studies on an application to elastodynamics. The CIP method had many advantages such as less diffusion and stability compared with other numerical methods. Therefore we propose the elastodynamics analysis by means of CIP method and investigate its properties by comparing with the FDTD method and theoretical calculation.

Key Words : CIP method, elastodynamics, FDTD method, Lamb's problem

1. はじめに

動弾性問題は物理探査,非破壊検査,地震学といった 広範な分野で扱われており,その数値シミュレーション は工学において重要なテーマである.弾性波動の数値 解析手法はこれまで様々なものが提案,開発されてき た. Madriaga¹⁾や Virieux²⁾³⁾は直交格子を用いて SH 波, P-SV 波をシミュレートする有限差分法を提案し た.その後,動弾性問題の有限差分法は高次補間を用 いた手法⁴⁾や異方性材料の問題に適用された⁵⁾.また, pseudo-spectral 法⁶⁾や SEM⁷⁾などの手法も提案されて いる.しかしながら,これらの手法では広帯域な波長を 含む問題において精度の低下が見られることがある.そ こで,本研究では高周波成分を含む波に対しても数値分 散及び数値振動が少ない CIP 法 (Cubic Interporation pseudo-Profile method)を動弾性問題に適用すること を試みた.同様に高精度な解析手法として,不連続ガ ラーキン法 (DG法)を用いた手法⁸⁾が開発されている が, CIP法はDG法と比較して計算効率の面で優れて いることが知られている⁹⁾.なお, CIP 法は流体力学 や電磁気学の分野で広く研究されているものの,これ まで動弾性問題に対して適用した例はあまり見受けら れず,またその性能について言及した研究は見当たら ない.

本研究では,運動方程式と構成関係式に対して M 型 CIP 法を適用することで,動弾性問題における CIP 法 の定式化を示す.そして,その定式化に基づき数値解 析を行い,妥当性の確認と精度の検証を行う.

2. CIP法

CIP 法は Yabe らによって開発された手法であり,移 流方程式を高精度に解くことができる¹⁰⁾¹¹⁾¹²⁾¹³⁾.波 動方程式に対しても移流方程式の形に変換することで 適用可能である.以下では,1次元および多次元問題 における CIP 法について簡単に説明する.詳細は文献 ¹⁴⁾を参照されたい.

2.1 1次元移流方程式

1次元の移流方程式は次の1階の偏微分方程式で書 き表される.

$$\partial_t f + c \,\partial_x f = 0 \tag{1}$$

ここで, ∂_t は時間に関する微分, ∂_x はxに関する空間 微分であり,cは移流速度である.CIP法では,格子 上の点の値fだけでなくその空間微分値 $g(=\partial_x f)$ も 末知数とし,微分値に対しても同時に移流計算を行う. 格子上の点において微分値が与えらるため,格子間の プロファイルを高次多項式で補間することができ,精 度の高い計算が可能となる.空間微分値gに対する移 流方程式は式(1)を空間に関して微分することにより 得られる.

$$\partial_t g + c \,\partial_x g = 0 \tag{2}$$

本研究では,3章で示すように対象とする弾性体を均 質であると仮定するため,移流速度cは空間の位置に よらず一定であるとした($\partial_x c = 0$).

時間 n における値 fⁿ とその微分値 gⁿ が格子上の点 i, iup において既知であるとすると,この2点間のプ ロファイルは次のように3次の多項式で表される.

$$F_i^n(x) = a_i (x_{iup} - x)^3 + b_i (x_{iup} - x)^2 + g_i^n (x_{iup} - x) + f_i^n$$
(3)

$$a_{i} = \frac{g_{i}^{n} + g_{iup}^{n}}{D^{2}} + \frac{2\left(f_{i}^{n} - f_{iup}^{n}\right)}{D^{3}}$$
(4)

$$b_{i} = \frac{3\left(f_{iup}^{n} - f_{i}^{n}\right)}{D^{2}} - \frac{2g_{i}^{n} + g_{iup}^{n}}{D}$$
(5)

ここで,c > 0のとき $D = -\Delta x$, iup = i - 1であり, c < 0のとき $D = \Delta x$, iup = i + 1である.なお,本節 に限り下付き添字は格子点を表し,本節以降では方向 を表すものとする.時刻n+1の値は,このプロファイ ルを図-1のように $c\Delta t$ だけ移動した値で与えられる. つまり, $\xi = -c\Delta t$ として次式で与えられる.

$$f_i^{n+1} = a_i \xi^3 + b_i \xi^2 + g_i^n \xi + f_i^n \tag{6}$$

$$g_i^{n+1} = 3a_i\xi^2 + 2b_i\xi + g_i^n \tag{7}$$



図-1 プロファイルの移動 (c > 0の場合)

2.2 多次元移流方程式

CIP 法は多次元問題の移流方程式に対しても適用可 能である.ここでは簡単のため、2次元問題の解法を 示すが、より次元の高い問題においても同じ方法で拡 張可能である.一般に2次元の移流方程式は次のよう に書ける.

$$\partial_t \boldsymbol{w} + \boldsymbol{K}_1 \partial_1 \boldsymbol{w} + \boldsymbol{K}_2 \partial_2 \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$
(8)

wは変数ベクトル, K_{α} は係数マトリクスである. ∂_{α} は x_{α} に関する空間微分を表している $(\alpha = 1, 2)$.

2次元の移流方程式 (8) は,M型 CIP 法と呼ばれる 手法により,1次元移流方程式に帰着させ1次元の CIP スキームで計算することができる.M型 CIP 法ではま ず,式(8)を次のように方向分離し,それらを順次解 くことで次のステップの値 w^{n+1} を求める.

$$\partial_t \boldsymbol{w} + \boldsymbol{K}_1 \partial_1 \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

$$\partial_t \boldsymbol{w} + \boldsymbol{K}_2 \partial_2 \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

図-2 に方向分離のイメージを示す.本来,波は破線に 沿って移流するが,これを x_1 方向と x_2 方向に分けて 計算を行う.このように方向分離を行うと,式(9)によ り時間nの値 w^n から中間の値 w^* が得られ,式(10) により w^* から次のステップの値 w^{n+1} が得られる.式 (9),(10)に対して1次元 CIP スキームを使うためには, 特性曲線法を用いれば良い.以下に,M型 CIP 法の流 れを示す.



図-2 方向分離のイメージ

(i) 方向分離を行う(総和規約は適用しない.)

$$\partial_t \boldsymbol{w} + \boldsymbol{K}_{\alpha} \partial_{\alpha} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \qquad (\alpha = 1, 2)$$
(11)

(ii) 特性曲線法を用いる. つまり,係数マトリクス K_{α} に対し対角化を行い1次元移流方程式に帰着させる. 固有ベクトルからなるマトリクス P_{α} と固有値 からなる対角行列 Λ_{α} を用いてマトリクス K_{α} は 次のように対角化できる.

$$\boldsymbol{K}_{\alpha} = \boldsymbol{P}_{\alpha}^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha} \boldsymbol{P}_{\alpha} \tag{12}$$

これより,式(11)は次式のように1次元の移流方 程式が得られる.

$$\partial_t \boldsymbol{h} + \boldsymbol{\Lambda}_\alpha \partial_\alpha \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

ベクトル h は次の変数変換によって得られる.

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{P}_{\alpha} \boldsymbol{w} \tag{14}$$

(iii) 式 (13) は 1 次元の移流方程式であり, 2.1 節で示 した 1 次元 CIP スキームを用いて解くことができ る.ただし,後述するように $\partial_{\beta}h(\alpha \neq \beta)$ について は CIP 法を用いず,線形補間によって計算を行う.

$$\boldsymbol{h} \xrightarrow{\text{CIP} : \boldsymbol{\Xi}} \boldsymbol{h}^* \tag{15}$$

$$\partial_{\beta} h \xrightarrow{\text{$\$R$ init}} \partial_{\beta} h^* \quad (\alpha \neq \beta)$$
 (17)

(iv) 式 (15)-(17) を解いて得られた解 h* から変数 w*
 へ変換する.

$$\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{P}_{\alpha}^{-1} \boldsymbol{h}^* \tag{18}$$

$$\partial_{\alpha} \boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{P}_{\alpha}^{-1} \partial_{\alpha} \boldsymbol{h}^* \tag{19}$$

$$\partial_{\beta} \boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{P}_{\alpha}^{-1} \partial_{\beta} \boldsymbol{h}^* \quad (\alpha \neq \beta)$$
(20)

なお,式(17)の計算を CIP 法によって行う場合は 2 階微分 $\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h$ の値が必要となる.この2 階微分を用 いる方法は C型 CIP 法と呼ばれ¹⁵⁾,より高い精度の 計算が可能となる.しかし,C型 CIP 法は計算に必要 なメモリ使用量が増大するだけでなく,動弾性問題を 扱う際には境界条件の処理が複雑になるため,本研究 では線形補間を使用する M型 CIP 法を用いた.M型 CIP 法は C型 CIP 法と比較して,若干精度が落ちるも ののほとんど問題にならない程度であると言われてい る¹⁴⁾. 3. CIP 法による弾性波動解析の定式化

3.1 支配方程式

面内変形のみを取り扱う2次元動弾性問題において, 微小変形理論を仮定すると,運動方程式と構成関係式 は次のように表される.

$$\partial_t v_1 = \frac{1}{\rho} \left(\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} \right) \tag{21}$$

$$\partial_t v_2 = \frac{1}{\rho} \left(\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} \right) \tag{22}$$

$$\partial_t \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\partial_1 v_1 + \lambda \partial_2 v_2 \tag{23}$$

$$\partial_t \sigma_{22} = \lambda \partial_1 v_1 + (\lambda + 2\mu) \partial_2 v_2 \tag{24}$$

$$\partial_t \sigma_{12} = \mu \left(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1 \right) \tag{25}$$

ここで v_i は変位速度, σ_{ij} は応力, λ, μ はラメ定数, ρ は密度である.なお,本研究では対象とする弾性体は 均質,等方,線形であるとする.

3.2 動弾性問題に対する CIP 法の適用

2.2 節で示した M型 CIP 法を式 (21)-(25) に対して 適用する.

- 1. x₁方向について解く.
 - (i) 式 (21)-(25) において,式 (11) のように, x₁方 向に関して方向分離を行う.

$$\partial_t v_1 = \partial_1 \sigma_{11} \tag{26}$$

$$\partial_t v_2 = \partial_1 \sigma_{21} \tag{27}$$

$$\partial_t \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \,\partial_1 v_1 \tag{28}$$

$$\partial_t \sigma_{22} = \lambda \partial_1 v_1 \tag{29}$$

- $\partial_t \sigma_{12} = \mu \partial_1 v_2 \tag{30}$
- (ii) 式 (26)-(30) を 1 次元移流方程式に帰着させる
 ため,式 (13)のように式変形を行う.

$$\partial_t \left(v_1 \mp \frac{\sigma_{11}}{c_L \rho} \right) \pm c_L \partial_1 \left(v_1 \mp \frac{\sigma_{11}}{c_L \rho} \right) = 0 \quad (31)$$

$$\partial_t \left(v_2 \mp \frac{\sigma_{12}}{c_T \rho} \right) \pm c_T \partial_1 \left(v_2 \mp \frac{\sigma_{12}}{c_T \rho} \right) = 0 \quad (32)$$

$$\partial_t \left(\sigma_{22} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \right) = 0 \tag{33}$$

ここで, $c_L\left(=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\right)$, $c_T\left(=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)$ はそれぞれ縦波速度,横波速度を表している.なお,式 (31),(32)は複号同順である.

(iii) 式 (31),(32) を 2.1 節で示した 1 次元 CIP スキー ムによって解く.式 (33) は移流しないため,計 算を行う必要はない.これにより $\left(v_1 \mp \frac{\sigma_{11}}{c_L \rho}\right)$, $\left(v_2 \mp \frac{\sigma_{12}}{c_T \rho}\right)$ の新しい値が得られる.
(iv) CIP 法の計算で得られた値 $\left(v_1 \mp \frac{\sigma_{11}}{c_L \rho}\right)$,

$$\begin{pmatrix} v_2 \mp \frac{\sigma_{12}}{c_T \rho} \end{pmatrix}$$
 と $\begin{pmatrix} \sigma_{22} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \end{pmatrix}$ から
式 (18) のように,変位速度 v_1, v_2 ,応力
 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ についてまとめる.計算点が境界
面上にあれば,次節で示すようにその境界の処
理を行う.

- 2. x1 方向と同様に, x2 方向について解く.
 - (i) 式式 (21)-(25) において, x₂ 方向に関して方向 分離を行う.

$$\partial_t v_1 = \partial_2 \sigma_{12} \tag{34}$$

$$\partial_t v_2 = \partial_2 \sigma_{22} \tag{35}$$

$$\partial_t \sigma_{11} = \lambda \partial_2 v_2 \tag{36}$$

$$\partial_t \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu) \,\partial_2 v_2 \tag{37}$$

$$\partial_t \sigma_{12} = \mu \partial_2 v_1 \tag{38}$$

(ii) 式 (26)-(30) を 1 次元移流方程式に帰着させる
 ため,次のように変数変換を行う.

$$\partial_t \left(v_2 \mp \frac{\sigma_{22}}{c_L \rho} \right) \pm c_L \partial_2 \left(v_2 \mp \frac{\sigma_{22}}{c_L \rho} \right) = 0 \quad (39)$$

$$\partial_t \left(v_1 \mp \frac{\sigma_{12}}{c_T \rho} \right) \pm c_T \partial_2 \left(v_1 \mp \frac{\sigma_{12}}{c_T \rho} \right) = 0 \quad (40)$$
$$\partial_t \left(\sigma_{11} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{22} \right) = 0 \quad (41)$$

(iii) 式 (39), (40) を CIP 法により解く.

- (iv) 変位速度および応力を求める.
- 3. 計算終了時間に達していたら計算終了する.次の ステップに進む場合は,1に戻る.

4. 領域内および境界条件の計算

4.1 領域内の計算

式 (31), (39), および式 (32), (40) はそれぞれ縦波速 度 cL, 横波速度 cT を移流速度とする移流方程式である ことから,式(31),(39)が縦波の伝播,式(32),(40)が横 波の伝播を表していることが分かる.また, CIP法にお いては空間微分値も同様に移流計算するため,その縦波, 横波に対して x1 および x2 方向の微分値も同様に移流す る.そのため,1方向につき6つの値が移流計算によって 得られる. 例えば, x2 方向の計算において式 (39),(40) の括弧内の変数をそれぞれ h_L, h_T とおくと, 図-3 に示 すように一方向からは h_L , $\partial_1 h_L$, $\partial_2 h_L$, h_T , $\partial_1 h_T$, $\partial_2 h_T$ の6つの値が移流計算によって得られる.また,これ らの式において移流速度 c_L, c_T の前の \pm は正の方向と 負の方向へ波が伝播することを示している.2次元の 場合は2方向について正と負の方向に波が伝播するた め,図-3に示すように,1つのグリッドの点において 4方向から波の流入を計算することになる.



図-3 4 方向からの波の流入

4.2 自由表面

一般に自由表面は座標系と平行にならないが,本研 究では簡単のため $x_2 = 0$ 平面が自由表面となる場合の みを考える. $x_2 = 0$ 平面が自由表面となるとき,応力 は次式を満足する.

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \tag{42}$$

CIP 法では微分値に関しても境界条件を考える必要が ある.応力の微分値の境界条件は,式(42)において接 線方向に関する微分値が0となることから,次のよう に得られる.

$$\partial_1 \sigma_{22} = 0, \quad \partial_1 \sigma_{12} = 0 \tag{43}$$

さらに,式(42)と式(24),(25)から変位速度 v_1, v_2 に 関する微分値の境界条件を得る.

$$\partial_t \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu) \,\partial_2 v_2 + \lambda \partial_1 v_1 = 0 \tag{44}$$

$$\partial_t \sigma_{12} = \mu \left(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 \right) = 0 \tag{45}$$

これら (42)–(45) を満足するためには, x_2 方向の計算を するときに, 図-4 に示すように領域外側からの FDTD 法と同様に仮想的な波の流入¹⁶⁾を考えればよい.なお, x_1 方向については領域内の計算と同様の方法で進める. 前節で示したように流入する波は1方向につき6つの 値を含んでいた.また,自由表面における境界条件の 数も (42)–(45) の6つであり,変数の数と方程式の数 が一致するため仮想的な波は一意に決まる.具体的に は,式(18)–(20) において,変位速度および応力に相 当する左辺が式(42)–(45)の境界条件を満足するよう, 右辺に含まれる仮想的な波の6つの値を求めれれば良 い.なお,この式は未知数に関して1次の代数方程式 となっており,容易に計算可能である.

自由境界が座標軸と平行でない場合については, FDTD 法で用いられるサブグリッド法¹⁷⁾,サブセル 法¹⁸⁾や CIP 法を改良したソロバン法¹⁹⁾, CIVA 法²⁰⁾ などを適用した上で,同様に仮想的な波を考えること で計算可能であろう.



図-4 仮想的な波の流入

4.3 吸収境界

無限領域の問題を取り扱う場合は,解析領域の境界で 反射が生じないよう吸収境界を設ける必要がある.CIP 法では波の流入を考えないことである程度は吸収境界 が実現可能となる.流入を考えないようにするために は,流入する波の値を0とおけば良い.しかしながら, 波が境界に対して斜めに入射する場合や自由表面付近 の波に対しては波を十分に吸収できない.このことは, 数値実験により確認した.波をより吸収するためには PML²¹⁾などの吸収境界を実装する必要がある.なお, 本研究では,できるだけ反射波の影響を取り除くため 解析領域を大きめに取った.

5. 数値計算例

動弾性問題に対する CIP 法の適用可能性について検 証するため,2つの簡単な問題を解いた.

5.1 FDTD 法と理論解

CIP 法の精度を検証するため, FDTD 法を用いて同 様の問題を解いた.FDTD 法はスタッガード格子を用 い,時間方向には1次精度の差分近似を行った.また, 1つ目の問題については,Lambの問題の解²²⁾と与荷 重の畳み込み積分を数値的に計算することで理論解を 導出した.

CIP 法は空間微分値をメモリにストアするため,2 次元問題において同じグリッド幅のFDTD 法と比較す ると,3倍のメモリが必要となる.CIP 法とFDTD 法 を比較する上で,メモリ使用量をおおむね揃えるため, CIP 法のグリッド幅はFDTD 法の2倍として計算した.

5.2 問題の設定

2次元半無限線形等方弾性体の表面に対して鉛直方向にトラクション $q(x_1,t)$ を与え、このとき生じる波の伝播を計算した.図-5 に問題のモデル図を示す.境界条件は次のように与える.

$$\sigma_{22} = q(x_1, t)$$
 on $x_2 = 0$ (46)

$$\sigma_{12} = 0$$
 on $x_2 = 0$ (47)



図-5 問題のモデル図

物性値は、ヤング率 E = 1、ポアソン比 $\nu = 0.25$ 、 密度 $\rho = 1$ とした.これらの値より、ラメ定数 $\lambda = 0.4$ 、 $\mu = 0.4$ 、縦波速度 $c_L \simeq 1.095$ 、横波速度 $c_T = 0.632$ 、レーリー波速度 $c_R \simeq 0.581$ が得られる、解析領域は上面を自由境界とし、それ以外の境界は吸収境界とし、さらに反射の影響が出ないよう十分遠方に取った、

5.3 なめらかな荷重

(1) トラクション

1つ目の問題として時間方向にも空間方向にもなめ らかな関数をトラクションとして与えた.

$$q(x_1, t) = f(x_1)g(t)$$
(48)
$$f(x_1) = \begin{cases} \frac{1 + \cos(2\pi x_1/r_0)}{2} & \text{when } x_1 \le r_0/2\\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
(49)

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(2\pi t/t_0)}{2} & \text{when } 0 \le t \le t_0\\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
(50)

この問題では,載荷幅 $r_0 = 0.1$,載荷時間 $t_0 = 0.1$ として計算した.FDTD 法において十分な計算精度が得られるよう格子間隔 $\Delta x (= 1/2^8) \simeq 0.039$ とし,CIP 法においてはその 2 倍の格子間隔 $\Delta x (= 1/2^7) \simeq 0.0078$ とした.時間ステップ Δt は CIP 法においては 1 次元問題のクーラン数 $C = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = 0.9$ となるよう定めた.FDTD 法においては 2 次元問題のクーラン数 $C = \frac{c\Delta t}{\Delta x/\sqrt{2}} = 0.9$ となるよう定めた.

(2) 解析結果

自由表面上の点 $(r, \theta) = (0.5, 0^\circ)$ における水平方 向および鉛直方向の変位速度をそれぞれ図-6,図-7に 示す.横軸が時間,縦軸が速度を表している.FDTD 法はスタッガード格子を用いたため,自由表面上に水 平方向速度の計算点を持たない.そのため,FDTD法 の水平方向速度は,自由表面に近い点での値を用いた. 図-6,図-7より,CIP法,FDTD法ともに理論解とよ く一致していることが分かる.なお, $t = 1.0 \sim 1.1$ あ たりでFDTD法と同様にオーバーシュートが発生し若 干のずれが生じているものの,グリッド幅をさらに細かくとれば理論解とほぼ一致する結果が得られる.



図-6 $(r, \theta) = (0.5, 0^\circ)$ における水平方向の変位速度



図-8,図-9は、 $(r, \theta) = (0.5, 30^{\circ})$ の点における水平 方向と鉛直方向の変位速度を表している.この問題では、 自由表面となす角が $\theta = 40.55^{\circ}(= acos(c_T^2/c_L^2))$ よ リ浅い領域でヘッドウェーブが生じるため、ヘッドウェー ブはこの点を通過する.図-8、図-9においてt = 0.7あたりで速度が変化しているのは、ヘッドウェーブの 通過によるものである.縦波、横波、ヘッドウェーブ ともに、CIP 法の解析結果は理論解および FDTD 法の 解析結果と良好な一致を示した.

載荷領域直下での点 $(r, \theta) = (0.5, 90^{\circ})$ における鉛 直方向の変位速度を図-10 に示す.問題の対称性から 水平方向の変位速度は常に0であり,数値解析におい てもほぼ0となっている.この点ではヘッドウェーブが 通過せず,縦波と横波のみが通過する. $\theta = 30^{\circ}$ のケー スと同様,CIP 法の解析結果は理論解およびFDTD 法 の解析結果と良好な一致を示した.

図-11,図-12にt = 0.8における変位速度の大きさ



図-8 (r, θ) = (0.5, 30°) における水平方向の変位速度



図—9 $(r, \theta) = (0.5, 30^\circ)$ における鉛直方向の変位速度



図-10 (r, θ) = (0.5, 90°) における鉛直方向の変位速度

 $v(=\sqrt{v_1^2+v_2^2})$ を示す. 図-11 と図-12 に大きな違い は見られなかった.



図-11 t = 0.8 における変位速度の分布(CIP法)



図-12 t = 0.8 における変位速度の分布 (FDTD 法)

5.4 矩形関数で与えられる荷重

(1) トラクション

2 つ目の問題として,時間方向,空間方向ともに矩 形関数となる関数をトラクションとして与えた.

$$q(x_1, t) = f(x_1)g(t)$$
(51)

$$f(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{when } x_1 \le r_0/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
(52)

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{when } 0 \le t \le t_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
(53)

5.2 節と同じく載荷幅 $r_0 = 0.1$,載荷時間 $t_0 = 0.1$ として計算を行った.なお、この問題では理論解の導出をしていないため、定性的な評価にとどめた議論を進める.

載荷幅 $r_0 = 0.1$,載荷時間 $t_0 = 0.1$ として計算し,格 子間隔は,FDTD 法において $\Delta x (= 1/2^9) \simeq 0.0020$ と し,CIP 法において $\Delta x (= 1/2^8) \simeq 0.0039$ とした.時 間ステップ Δt は CIP 法においては 1 次元問題のクー ラン数 $C = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = 0.9$ となるよう定めた . FDTD 法に おいては 2 次元問題のクーラン数 $C = \frac{c\Delta t}{\Delta x/\sqrt{2}} = 0.9$ とした .

(2) 解析結果

自由表面上での点 $(r, \theta) = (0.5, 0^{\circ})$, および載荷領 域直下の点 $(r, \theta) = (0.5, 90^{\circ})$. で得られた鉛直方向 の変位速度をそれぞれ図-13,図-14 に示す.これらの 図から FDTD 法では数値振動が生じているが,CIP 法 では振動することなく計算できることが分かる.なお, FDTD 法の解析ではこれらの2点以外の点においても 同様に数値振動が生じていた.FDTD 法による解析に おいて数値振動が生じる理由は,本来であれば波の速 度は一定であるにもかかわらず,高周波成分を含む波 に対して分散性を示すことが原因である¹⁴⁾.なお,こ の分散性はグリッド幅を細かく取ったとして完全に消 えることはない.一方で CIP 法では高周波成分をもつ 波に対しても FDTD 法のような分散性を示すことはな い.これは CIP 法の大きな特徴である²³⁾.





図-13 (r, θ) = (0.5, 0°) における水平方向の変位速度

図-14 (r, θ) = (0.5, 90°) における水平方向の変位速度

図-15,図-16 にそれぞれ CIP 法,FDTD 法によっ て計算した時間 t = 0.8 における変位速度の大きさを 示す.図-16 に示す FDTD の解析ではトラクションを 作用させた鉛直下側の領域で著しく数値振動が生じて いるのが確認できる.



図-15 t = 0.8 における変位速度の分布 (CIP 法)



図-16 t = 0.8 における変位速度の分布 (FDTD 法)

6. おわりに

本研究では, CIP 法を動弾性問題に適用し,その定 式化を示した.また,CIP 法による数値解析解を理論 解および FDTD 法と比較し,その精度を検証した.比 較の結果,CIP 法は理論解と良好な一致を示し,動弾 性問題においても CIP 法が適用可能であることを示し た.また,高周波成分を含む波に対しても CIP 法では 分散性が見られないという特徴も確認できた.

今後は,他の数値計算手法と比較しより詳細な性能の 評価を行いたいと考えている.また,1.オーバーシュートを防ぐための改良,2.複雑な自由境界条件の処理方法の提案および PML の導入,3.不均質材料への適用

などを行い,実問題に適用できるようさらに開発を進 める予定である.

参考文献

- Madariaga, R. : Dynamics of an expanding circular fault, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 66, No. 3, pp. 639–666, 1976.
- Virieux, J. : SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method, *Geo-physics*, Vol. 49, pp. 1933–1942, 1984.
- Virieux, J.: P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, Vol. 51, No. 4, pp. 889–901, 1986.
- Levander, A. R. : Fourth-order finite-difference P-SV seismograms, *Geophysics*, Vol. 53, pp. 1425–1436, 1988.
- Igel, H., Mora, P., and Riollet, B. : Anisotropic wave propagation through finite-difference grids, *Geo-physics*, Vol. 60, pp. 1203–1216, 1995.
- Carcione, J. M. : The wave equation in generalized coordinates, *Geophysics*, Vol. 59, pp. 1911–1919, 1994.
- 7) Priolo, E., Carcione, J. M. and Seriani, G. : Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 95, pp. 681–693, 1994.
- 8) Käser, M. and Dumbser, M. : An arbitrary highorder discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - I. The two-dimensional isotropic case with external source terms, *Geophysical journal international*, Vol. 166, pp. 855–877, 2006.
- 9) 肖鋒,小野寺直幸,伊井仁志:計算流体力学-CIP マルチ モーメント法による手法,コロナ社,2009.
- 10) Takewaki, H., Nishiguchi, A. and Yabe, T.: Cubic interpolated pseudo-particle method (CIP) for solving hyperbolic-type equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 61, pp. 261–268, November 1985.
- 11) Takewaki, H. and Yabe, T. : The cubic-interpolated pseudo particle (CIP) method: application to nonlinear and multi-dimensional hyperbolic equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 70, pp. 355– 372, July 1987.

- 12) Yabe, T. and Aoki, T. : A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, *Computer Physics Communications*, Vol. 66, pp. 219–232, 1991.
- 13) Yabe, T., Ishikawa, T., Wang, P. Y., Aoki, T., Kadota, Y. and Ikeda, F. : A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation II. Two- and three-dimensional solvers, *Computer Physics Communications*, Vol. 66, pp. 233–242, 1991.
- 14) 矢部孝, 尾形陽一, 内海隆行: CIP 法, 森北出版, 2003.
- 15) AOKI, T. : Multi-Dimensional Advection of CIP Scheme, Computational Fluid Dynamics Journal, Vol. 4, No. 3, pp. 279–291, 1995.
- 16) Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S. and Alford, R. M. : SYNTHETIC SEISMOGRAMS, *Geophysics*, Vol. 41, pp. 2–27, 1976.
- 17) Taflove, A.: Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, Norwood, MA, Artech House, 1995.
- 18) Chevalier, M., Luebbers, R. and Cable, V. : FDTD local grid with material traverse, Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, Vol. 45, No. 3, pp. 411–421, Mar 1997.
- 19) Yabe, T., Mizoe, H., Takizawa, K., Moriki, H., Im, H.-N. and Ogata, Y.: Higher-order schemes with CIP method and adaptive Soroban grid towards mesh-free scheme, *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No. 1, pp. 57 – 77, 2004.
- 20) Tanaka, N. : Development of a highly accurate interpolation method for mesh-free flow simulations I. Integration of gridless, particle and CIP methods, SO: International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 30, No. 8, pp. 957–976, 1999.
- 21) Ando, Y. and Hayakawa, M. : Implementation of the Perfect Matched Layer to the CIP Method, *IEICE-Transactions on Electronics*, Vol. E89-c, pp. 645–648, 2006.
- 22) Achenbach, J. D.: Wave Propagation in Elastic Solids, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1973.
- 23) Yabe, T., Xiao, F. and Utsumi, T. : The constrained interpolation profile method for multiphase analysis, *Journal of Computational Physics*, Vol. 169, No. 2, pp. 556–593, 2001.

(2009年4月9日受付)