

流体と線形弾性体の有限変形に対する連成解析手法

Computational method for interactions between fluids and finite deformations of linear elastic bodies

黒田 望*・牛島 省**

Nozomu Kuroda and Satoru Ushijima

*学生会員 京都大学大学院 社会基盤工学専攻 修士課程 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C クラス)

**正会員 工博 京都大学教授 学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

A computational method was investigated to predict the interactions between three-dimensional flows and the linear elastic bodies which undergo finite deformations. The deformations of the objects due to fluid forces are solved with FEM by means of the stress increments. The object is represented with multiple second-order tetrahedron elements and the movements of their nodes are treated with a Lagrangian approach. This solid model is implemented in the MICS¹⁾, which is a computational method for incompressible multiphase fields to take account of the fluid-solid interactions. In the MICS, fluid and solid phases are regarded as a multiphase field and it is modeled as a mixture of the immiscible and incompressible different fluids. The basic applicability of the prediction method was confirmed with the simple problems related to the large deformation of a cantilever beam and the reversibility of linear elasticity in 2D and 3D conditions. In addition, it was demonstrated that the computational method is applicable to the finite deformation of a complicated-shaped flexible object.

Key Words : fluid-solid interaction, finite deformation, FEM, MICS, stress increment

1. はじめに

近年、各種の工学分野で、流体と固体の連成作用に関する研究が精力的に進められている。本研究では、具体的な応用先として河道に自生した樹木や植生の洪水流による変形を想定している。従来より、流れと植生の連成計算は行われてきたが、植生を剛体として扱った研究²⁾や、片持ち梁としてモデル化した研究³⁾のように、植生の詳細な変形まで再現していない。流れによって変形する植生のように流体と固体が相互に関係する複雑な現象は、縮小模型実験や理論解析による評価が難しい。このため、本報では、線形弾性体として扱える植生を対象として、線形弾性体と流体との連成作用を適切に評価できる計算手法を検討する。

流体と固体との相互作用については、強連成あるいは弱連成解法、また、固体の運動に関しては、Lagrange的手法あるいは大変形を扱える Euler 的手法などが検討されている。Doig ら⁴⁾は Euler 型有限要素法により、連成問題を扱う手法を提案している。Euler 型有限要素法では、物体を表現する計算格子に対する制約が無いため、物体の大変形を扱えるという長所があるが、識別関数⁵⁾を移流させることで固体と流体の境界面を追跡しているため、計算の進行とともに数値拡散によって

境界がぼやけるといった問題も指摘されている。一方、計算格子が破綻しない程度の有限変形であれば、物体を表す節点あるいは要素を追跡していく Lagrange 的手法が有効であると考えられる。連成解法に関しては、精度や安定性は強連成法ほど高くないものの、流体・固体を独立に扱え、実装が容易な弱連成解法⁶⁾を選択した。

著者らは、流体中の弾性体の微小変形を扱う弱連成解法¹⁾により、いくつかの連成問題を適切に計算できることを確認している⁷⁾。本計算手法では、流体と固体が混在する場を混ぜり合わない非圧縮性流体として計算する非圧縮性流体の解法 MICS¹⁾を基にして、固体計算では有限要素法により線形弾性体の変形と運動を求める。流体力を圧力勾配項と粘性拡散項の体積分として求め、物体体積はサブセル法を用いて計算している。そのため、多様な計算条件に対して頑強性を有している。本報では、流れ場に存在する線形弾性体の有限変形を扱うことを目的として、従来の手法の改良を行う。物体の計算格子は Lagrange 的に扱うこととし、速度形の応力増分型を利用して、内力の計算を行うモデルを導入した。速度形の応力増分型によって流体と固体の相互作用を扱った例として、Doig ら⁴⁾や藤枝ら⁸⁾の研究があり、弾塑性問題への拡張が容易と

なっている。得られた解法を、片持ばりの大変形問題や振動応答、また2次元および3次元場における弾性体の形状復元性など、基本的な問題に適用して、その妥当性を確認する。さらに、3次元流体中の複雑形状物体の有限変形を本手法で計算できることを示す。

2. 数値解析手法

2.1 3次元自由水面流れの計算法

混ざり合わない複数の非圧縮性流体から構成される場に対する基礎式は、以下のEuler表記による質量保存則、非圧縮条件、保存形表示された運動方程式の3式である⁹⁾。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) &= f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\mu u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu u_j) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 ρ 、 μ 、 p は順に計算セル内の体積平均操作によって求められる密度、粘性率、圧力である。また、 u_i はセル内の質量平均により算出される x_i 方向の流速成分である。 t と x_i は時間と3次元直交座標系の座標成分で、 f_i は外力の加速度成分を表す。体積平均または質量平均は各流体計算セルごとに定められるが、セル内に物体が占有する体積を求める際には、四面体サブセル法¹⁰⁾を用いる。

計算手順は、コロケート格子を用いる非圧縮性流体計算法¹¹⁾と同様で、予測段階、圧力計算段階、修正段階の3つの手順からなるMAC系解法が用いられている。最初に、四面体サブセル法により、計算セルに含まれる物体体積を算出し、体積平均された物性値等を求める。予測段階では、陰的解法であるC-ISMAL法¹²⁾を使ってセル中心で流速の推定値を求める。圧力計算段階ではC-HSMAL法¹³⁾を利用して、BiCGSTAB法¹⁴⁾により圧力変化量の連立1次方程式の数値解を求める。

2.2 FEMによる物体変形の計算法

仮想仕事の原理より導き出される平衡方程式を離散化した物体運動の基礎式は以下の通りである。

$$M\ddot{\mathbf{d}} + C\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \quad (4)$$

ここで、各節点の3次元変位を成分とするベクトルを \mathbf{d} 、上付のドットは時間微分(2つのドットは2階微分)を表し、 M は質量マトリックス、 C は減衰マトリク

ス、 \mathbf{F}_{ext} は流体力などの外力ベクトルである。 \mathbf{F}_{int} は次式で表される四面体要素の内力ベクトル \mathbf{F}_{int}^e を重ね合わせて求める。

$$\mathbf{F}_{int}^e = \int_{\Omega_e} B^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (5)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力ベクトル、 B は形状関数で表現されるひずみ変位マトリックスである。積分領域 Ω_e は四面体要素を表し、質量マトリックス M は対角行列として表される集中マトリックスとした。本報では、質量減衰のみを考慮しているため、対角行列として表される減衰マトリックスを利用する。本報で使用した客観性のある応力速度は、次に示すCotter-Rivlin速度¹⁵⁾である。

$$\dot{T}_{(c)} = \dot{T} + L^T \cdot T + T \cdot L \quad (6)$$

ここに、上式中の T および \dot{T} はそれぞれテンソル形式の応力と応力速度を表し、 L は速度勾配テンソルである。添字の (c) はCotter-Rivlin速度を表す。有限変形問題に対応するために、ベクトル表記したCotter-Rivlin応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(c)}$ と速度 $\dot{\mathbf{d}}$ を次のように関連づける。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(c)} = D\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = DB\dot{\mathbf{d}} \quad (7)$$

ここに、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみベクトルを表す。 D は材料特性を示す応力ひずみマトリックスであるが、ここでは均質等方な線形弾性体を扱うので、ヤング率とポアソン比の二つの材料定数によって構成される。式(6)の応力速度 \dot{T} をベクトル表記した $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ と現ステップの応力 $\boldsymbol{\sigma}^n$ を用いて、次ステップの応力 $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ は次式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^n + \dot{\boldsymbol{\sigma}}\Delta t \quad (8)$$

固体は四面体要素の集合として表現し、変形の再現性を高めるために2次要素モデルを用いている。物体運動の計算概要は図-1に示す通りである。本解法では陽解法により計算しているため、非線形反復計算を省略している。

2.3 物体に作用する流体力の算定

式(4)右辺の \mathbf{F}_{ext} は四面体要素の節点上の流体力であるが、これを求める前に、物体を構成する四面体要素に作用する流体力を以下の手順によって計算する。これらの内容は既報⁷⁾に示されている。

図-2に流体計算セル C と、物体 k を構成する第 m 番目の四面体要素 T_{km} を示す。本解法では四面体2次

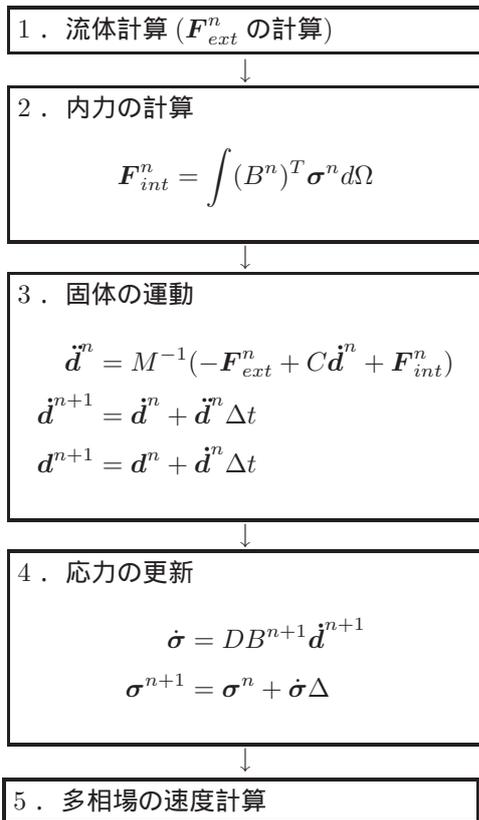


図-1 物体運動の計算概要

要素を使用しているため、10 節点で構成されているが、図-2 では 4 節点で概略的に示している。図-2 に示すように、流体計算セル C 内の多相流体が、四面体要素 T_{km} あるいはその一部分の体積 ΔT_{Ckm} に及ぼす流体力を F_{Ckm} とし、その x_i 方向成分を F_{Ckm}^i と表す。

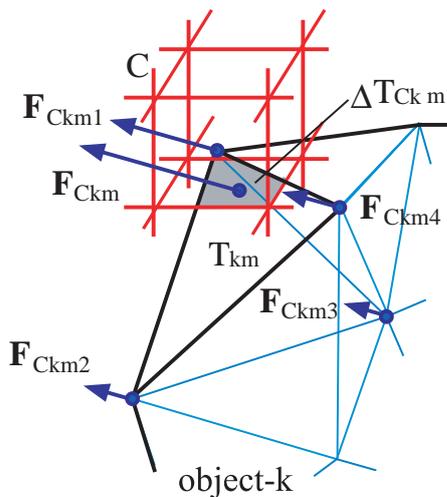


図-2 物体に作用する流体力の評価方法

F_{Ckm}^i は、四面体サブセル法により求められた ΔT_{Ckm} と物体 k の密度 ρ_{bk} を用いて、次式から求められる。物体に作用する流体力は、圧力と粘性応力を物体表面で面積積分することで得られるが、MICS では Gauss の発散定理に基づき、多相場の計算により得られた圧力勾配項と粘性拡散項を体積積分することで流体力を計算する。

$$F_{Ckm}^i = \rho_{bk} \Delta T_{Ckm} \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu u_j) \right\} \right] \quad (9)$$

上記の手順によって得られたセル内に含まれる四面体要素 ΔT_{Ckm} に作用する流体力を、セル中心からの距離の逆数で重み付けを行い、節点 j に作用する流体力 F_{Ckmj} とする ($j = 1, \dots, 10$)。これらの手順のある節点に対して、その節点を含む全ての四面体要素と、それらの要素を含む流体計算セルに対して行い、 F_{Ckmj} の総和を式 (4) 右辺の外力 F_{ext} とする。

2.4 物体運動が流体に及ぼす影響

物体の動的応答計算の結果は、次のようにして多相流場に反映される。図-3 にその概要を示す。

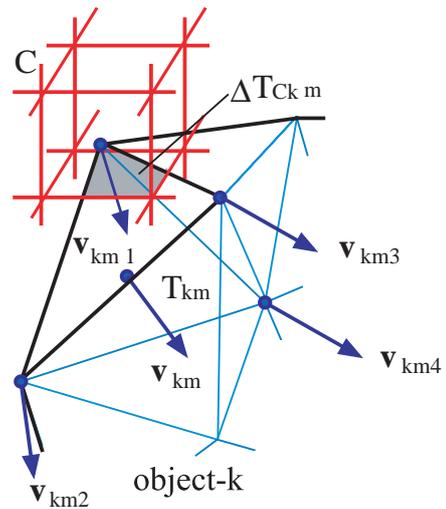


図-3 物体の動的挙動を多相場に考慮する方法

ある流体計算セル C に一部あるいは全体が含まれる物体 k の第 m 番目の四面体要素 T_{km} について考える。要素 T_{km} の節点 j の速度ベクトル $\dot{\mathbf{d}}$ を v_{kmj} と表すとき ($j = 1, \dots, 10$)、これらの和を 1/10 倍した結果を四面体要素の速度ベクトル v_{km} と近似する。着目した流体計算セル C に含まれる全ての四面体要素に対してこの処理を行い、次式よりセル内の質量平均流速

u を定める .

$$u = \frac{1}{m_C} \left(m_f u_f + \sum_k \sum_m \rho_{bk} \Delta T_{Ckm} v_{km} \right) \quad (10)$$

ここで, m_C と m_f は, それぞれ着目する流体計算セル内の全質量および気相と液相の質量である . また, u_f は気相と液相の混合体の流速ベクトルである .

3. 解法の検証

はじめに固体の有限変形までを含めた変形特性の検証を行い, 次に流体と固体の連成作用の再現性について検討する . 簡単のために, 流体と固体の密度は同一 ($\rho_s = \rho_f = 1$) として, 以下すべて, 無次元で計算を行った . また, 計算の検証を行うことを目的として, 物性値を定めた .

3.1 はり理論との比較による検証

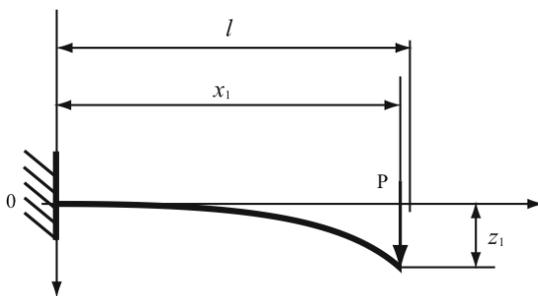


図-4 片持ちばり

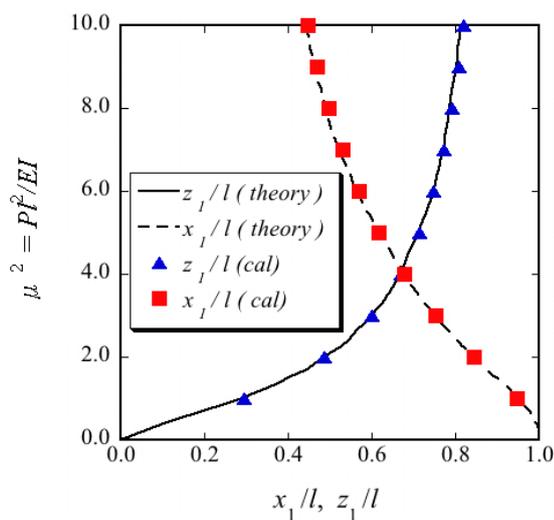


図-5 Bisshopp, Drucker の解²⁾との比較

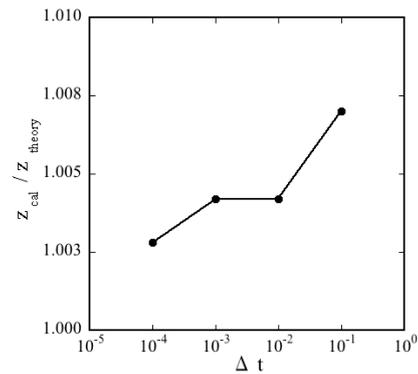


図-6 時間増分の依存性

図-4 に, 片持ちりの先端に集中荷重 P が作用した状態を示す . l, x_1, z_1 はそれぞれ変形前のはりの長さ, 変形後のはりの水平方向長さとたわみを表す . 微小変形の仮定が成り立つ範囲内であれば, 荷重 P と荷重載荷位置の鉛直変位 z_1 は線形の関係にあり, 容易に求まる . 一方で, 有限変形を考慮した場合は図-5 に示す Bisshopp と Drucker の理論解¹⁶⁾ のようになる . 図中の E, I はそれぞれヤング率と断面二次モーメントを表し, μ^2 は荷重 P の無次元パラメータである . 片持ちりとして, $l = 1$, 幅 $w = 0.3$, 厚み $t = 0.1$, $E = 1$, 密度 $\rho = 1.0$ の矩形板を対象に, 理論解との比較を行った . 計算モデルの四面体数と節点数はそれぞれ 181, 441 である . 本計算では, 減衰係数 $c = 1.0$ として荷重が載荷した状態で, ほぼ定常状態になる $t = 300$ まで動的計算を行った . 図-5 に示した計算結果は $\Delta t = 10^{-3}$ の時の結果である . この結果は理論解とよく一致しており, 有限変形を考慮した固体モデルの基本性能が確認された . 本解法の精度を定量化するために, 先端変位 z_1 の計算結果と理論値の比と時間増分 Δt の関係を図-6 に示す . 図は $\mu^2 = 5.0$ の時の結果を比較したもので, 時間増分による依存性があり, 十分小さい時間増分値を設定することで理論値に近い値を再現できる .

3.2 振動解析

片持ちりの自由端に微小変位を与え, 自由端変位の時系列から振動周期を求めた . 片持ちりの物性値は前項と同様である .

自由端変位の時系列を図-7 に示す . $\Delta t = 10^{-3}$ で計算した結果で, 減衰係数 $c = 0$ としているため, 振幅は減衰せずほぼ一定の周期で振動している .

精度検証のため, 振動周期と次式で得られる理論値を比較した結果と時間増分 Δt の関係を図-8 に示す .

$$T = 2\pi \frac{l^2}{\lambda^2} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (11)$$

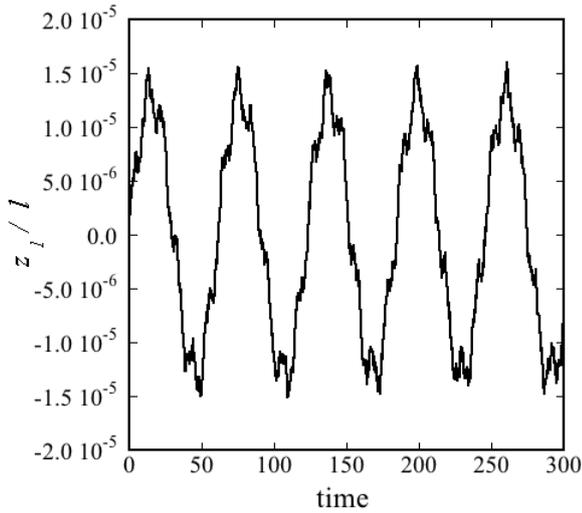


図-7 変位の時系列

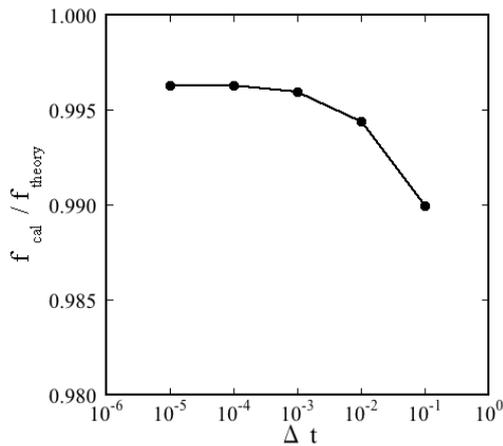


図-8 時間増分の依存性

ここに、 λ 、 ρ 、 A 、 I は、それぞれ固有値、密度、断面積、断面二次モーメントである。一次モードを仮定すると、 $\lambda = 1.875$ となり、理論値は $f_{theory} = 62.0$ となる。理論値からのずれは存在するが、概ね振動特性を再現できていることがわかる。

3.3 2次元場の線形弾性体の形状復元性の検証

線形弾性体に力を加えて変形させた後、力を取り除くと変形前の状態に戻る。従来手法では剛性マトリックスを作成し、変位と内力を関連づけていたために、この形状復元性を容易に捉えられた。しかし、式(7)に示すような速度形の構成式を用いている本手法では基準配置の情報を陽に含んでいない。そこで、本節では図-9に示すような2平板間せん断流中の長方形線形弾性体を対象として形状復元性を確認した。計算に用いたモデルは節点数441、四面体数182の矩形体で、奥行

き方向の速度を0とした3次元計算によって2次元計算を模擬した。計算セル数は $40 \times 10 \times 1$ で、メッシュサイズは各方向に0.05とした。上端、下端はそれぞれ速度 U_w および $-U_w$ の移動壁で、右端、左端は固定壁とした。時刻 Δt 流体で 1.0×10^{-3} 、固体で 2.0×10^{-8} を用いた。

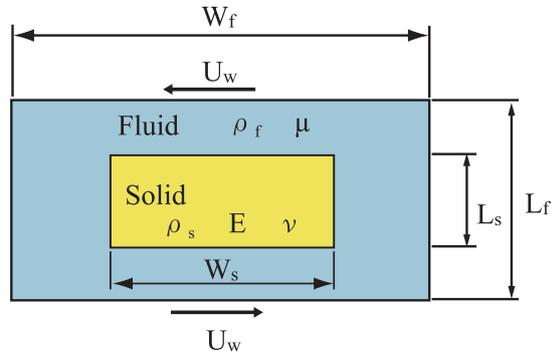


図-9 2次元場における形状復元性の検証

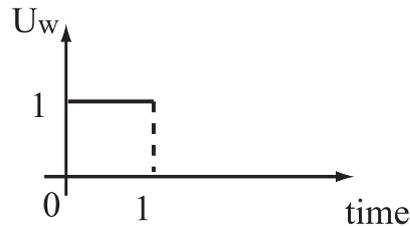


図-10 移動壁の移動速度 U_w と時間の関係

表-1 固体と流体の物性値

| solid | | |
|----------|---------------------|-------|
| ρ_s | Density of solid | 1.0 |
| E | Young's modulus | 90.0 |
| ν | Poisson ratio | 0.499 |
| L_s | Length | 0.3 |
| W_s | Width | 0.6 |
| fluid | | |
| ρ_f | Density of fluid | 1.0 |
| μ | Viscous coefficient | 1.0 |
| U_w | Velocity of wall | 1.0 |
| L_f | Length | 0.5 |
| W_f | Width | 2.0 |

図-10に移動壁の移動速度 U_w と時間の関係を示す。時刻 $t < 0$ では固体および流体は静止し、 $0 \leq t \leq 1$ で

は $U_w = 1.0$ で動かし，流体粘性によるせん断を生じさせ，固体をせん断変形させる．時刻 $t > 1$ では $U_w = 0$ として，せん断力を解放する．計算条件は表-1 に示すとおりである．

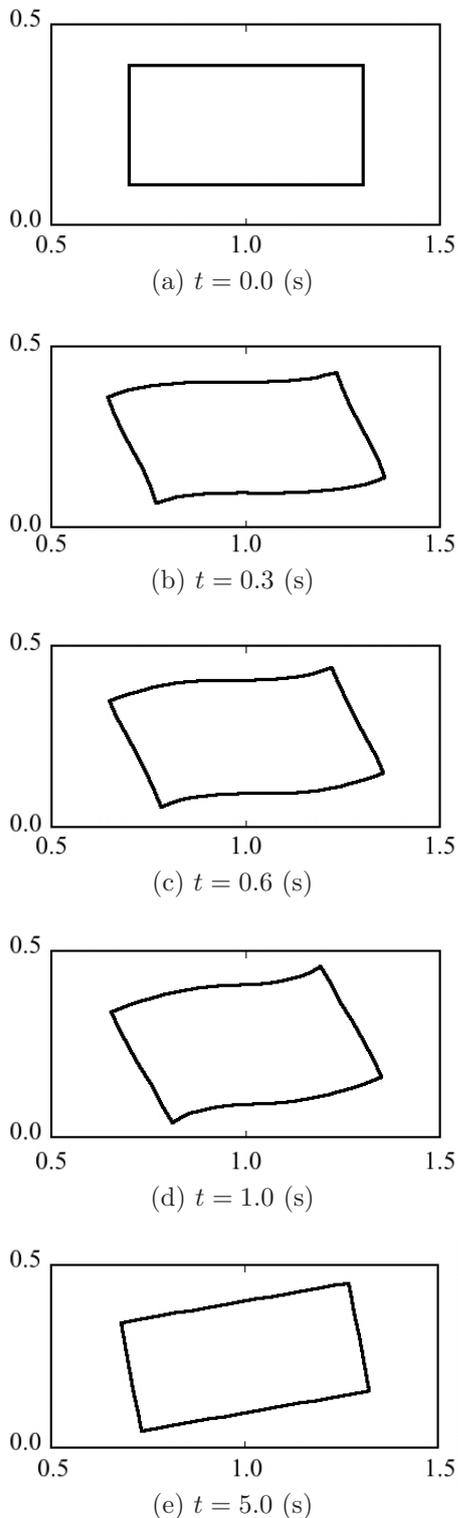


図-11 計算結果

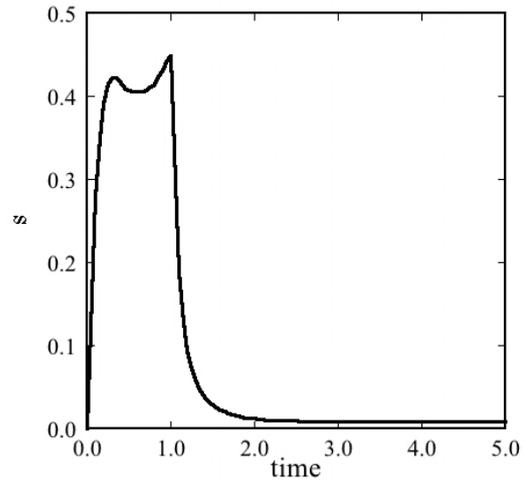


図-12 変形量の時系列

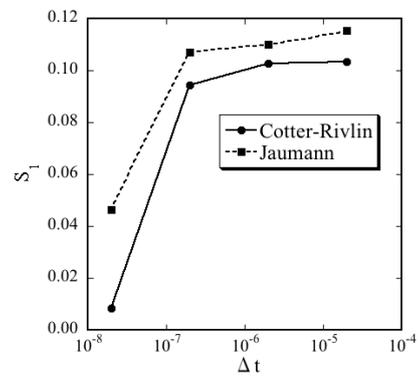


図-13 時間増分の依存性

図-11 に初期状態 (a)，最大変形時 (d)，変形復元状態 (e) の計算結果を示す．図-11(e) に示されるように，物体は変形した後に回転した状態で初期の形状に戻る．図-12 に次式で表される変形量の指標 s の時系列を示した．

$$s = \frac{\sqrt{\sum l^2}}{W_s} \quad (12)$$

ここで， l は各節点の初期位置からの変位で，各時間ステップごとに s が最小となるように各時間ステップの重心まわりに回転させて求めた． $t = 0.3$ の時に伸張が最大となり，その後，圧縮されて $t = 0.6$ まで s が一時減少し，圧縮により再び変形が大きくなり， s が増加する．せん断力を解放した時刻 $t > 1$ で急激に s が減少し，0 に近い値に漸近することがわかる．本解法の精度を定量化するために，残留変形量を s_1 として，時間増分 Δt との関係を図-13 に示す． Δt が小さくなると

もに、 s_1 が減少していることがわかる．そのため，残留変形が生じるのは流体と固体の連成手法によるものではなく，速度形解法によるものだと考えられる．また，速度型弾塑性体の定式化で使われる Jaumann 速度を用いた場合の時間増分 Δt と残留変形量 s_1 の関係を図-13 に示す．今回対象とした，せん断変形が支配的な問題では Jaumann 速度より Cotter-Rivlin 速度を使用した方が誤差が小さくなることが確認できた．

3.4 3次元場の線形弾性体の形状復元性の検証

3次元の流れ場における，線形弾性体の形状復元性を検証する．本節では図-14 に示すような1辺の長さが1である立方体キャビティ中の線形弾性立方体を対象として形状復元性を確認する．計算に用いた弾性立方体は節点数 1617，四面体数 968，1辺の長さが0.3の立方体で，計算領域の中心に鉛直軸回りに45度回転させて設置した．計算セル数は $20 \times 20 \times 20$ で，メッシュサイズは各方向に0.05とした．上端，下端はそれぞれ速度 U_w ， $-U_w$ の移動壁で，その他は固定壁とした．移動壁の移動速度と時間の関係は図-10と同様である．時間刻みは流体で 1.0×10^{-3} ，固体で 1.0×10^{-5} を用いた．計算条件は表-2 に示すとおりである．

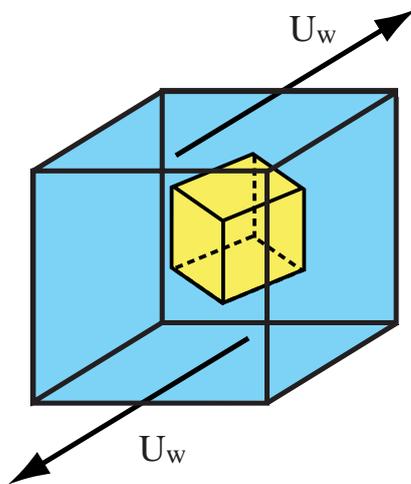


図-14 3次元流れ場における形状復元性の検証

表-2 固体と流体の物性値

| solid | | |
|----------|---------------------|-------|
| ρ_s | Density of solid | 1.0 |
| E | Young's modulus | 90.0 |
| ν | Poisson ratio | 0.499 |
| fluid | | |
| ρ_f | Density of fluid | 1.0 |
| μ | Viscous coefficient | 1.0 |
| U_w | Velocity of wall | 1.0 |

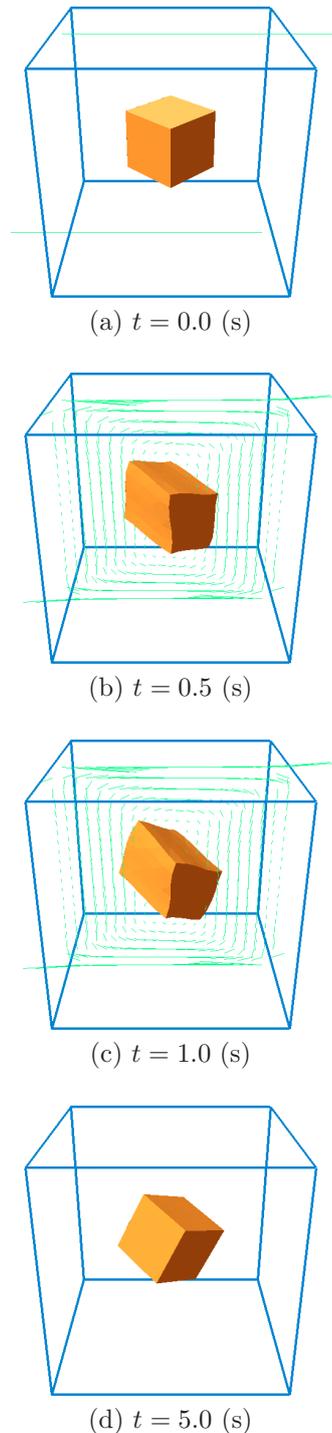


図-15 計算結果

図-15 に初期状態 (a)，最大変形時 (c)，変形復元状態 (d) の計算結果を示す．物体は回転しながら変形し，図-15(d) に示されるように，回転した状態で初期の形状に戻る．図-16 に次式で表される変形量の指標 ϕ の時系列を示した．

$$\phi = \sqrt{\Sigma \Delta t^2} \quad (13)$$

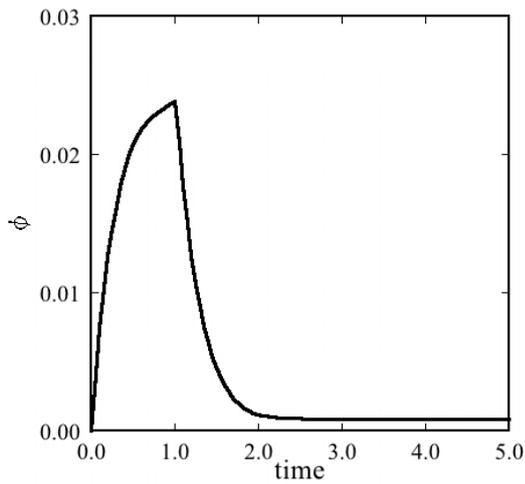


図-16 変形量の時系列

ここで、 Δl は各節点の弾性立方体重心点からの距離の変化量である。2次元場の検証結果と同様に、 $t = 1.0$ の時に ϕ が最大となり、せん断力を解放した時刻 $t > 1$ で急激に ϕ が減少し、初期値 0 に漸近することがわかる。

3.5 複雑形状物体を対象とした連成計算

上記で示した結果より、基本的な流体・固体連成問題では本手法が有効であることが確認できた。次に、本手法の応用例として、1辺の長さが1である立方体キャピティ内部に樹木形状の線形弾性体が存在する場の計算を行う。

計算条件は表-3 に示すとおりである。

表-3 樹木形状物体と流体の物性値

| tree model | | |
|------------|---------------------|-------------------|
| ρ_s | Density of solid | 1.0 |
| E | Young's modulus | 2.0×10^3 |
| ν | Poisson ratio | 0.499 |
| fluid | | |
| ρ_f | Density of fluid | 1.0 |
| μ | Viscous coefficient | 1.0 |
| U_w | Velocity of wall | 1.0 |

計算セル数は、 $20 \times 20 \times 20$ で、セルの大きさは各方向に 0.05 とした。時間増分 Δt は 1.0×10^{-4} とした。上壁面は速度 U_w で水平方向に移動し、 Re 数は 1.0 である。

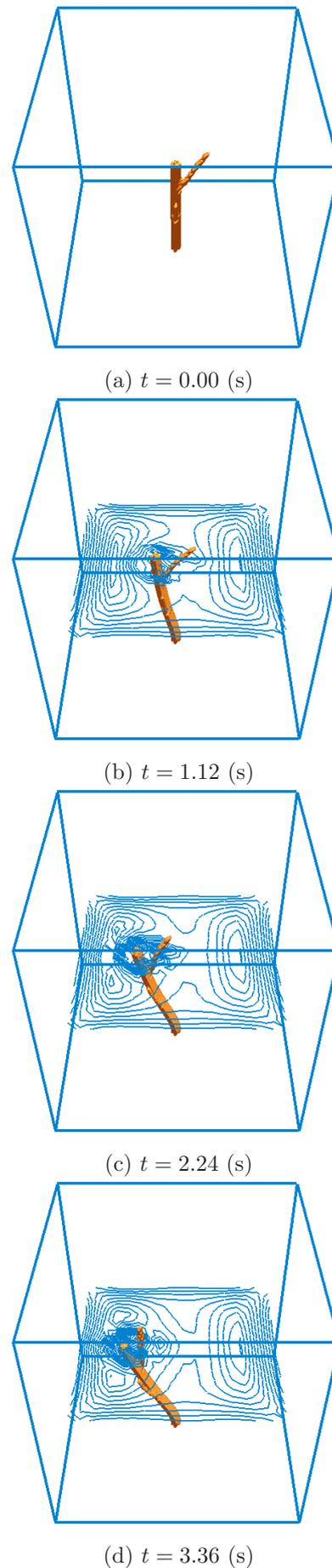


図-17 計算結果

図-17 に変形する樹木形状物体の計算結果を示す。鉛直方向に長い幹の部分が流れによって変形し、その後、斜め方向にのびた枝の部分が大きく変形する様子が再現されている。図中の等値線は渦度を表す。樹木モデルの後方に高渦度領域が発生すると、圧力低下が生じ、変形が大きくなる状況が計算されている。

4. おわりに

本報では、多相場の解法である MICS に、速度形の構成式を導入した FEM モデルを導入し、3 次元流中の複雑形状線形弾性体の有限変形を予測する解法を構築した。この解法の基本特性を確認するため、片持ばりの大変形や 2 次元および 3 次元線形弾性体の形状復元性などの計算を行い、妥当な結果が得られることを確認した。さらに、3 次元キャビティ内における樹木形状物体へ本手法を適用し、複雑形状物体への応用が可能であることを示した。今後は、大変形の問題に付随する計算格子の破綻などに対処する方法を検討する必要がある。

参考文献

- 1) 牛島省, 福谷彰, 牧野統師. 3次元自由水面流中の接触を伴う任意形状物体運動に対する数値解法. 土木学会論文集, Vol. 64/II-2, pp. 128-138, 2008.
- 2) 清水義彦, 辻本哲朗, 中川博次. 直立性植生層を伴う流れ場の数値計算に関する研究. 土木学会論文集, Vol. 447/II-19, pp. 35-44, 1992.
- 3) 中川博次, 辻本哲朗, 北村忠紀, 藤井康嗣. 流れによって変形する植生粗度の抵抗則. 水工学論文集, Vol. 39, pp. 465-470, 1995.
- 4) R. Doig, S. Okazawa, and M. Fujikubo. Solid-fluid interaction analysis by using a multi-material eulerian finite element method. *Journal of Applied Mechanics JSCE*, Vol. 9, pp. 151-159, 2006.
- 5) C. W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundary. *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201-226, 1981.
- 6) 吉村忍, 岡本真史, 山田知典. 流体構造連成問題の分離型反復型解法における安定性と効率. 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 72, No. 716, pp. 17-24, 2006.
- 7) 黒田望, 牛島省. 自由水面流中の変形を伴う物体に作用する流体力の数値計算. 応用力学論文集, Vol. 11, pp. 799-806, 2008.
- 8) 藤枝忠臣, 和田壮二, 棚橋隆彦. 流体と固体の統一解法の構築 (流体と固体の連成問題). 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 65, No. 640, pp. 31-38, 1999.
- 9) 牛島省, 山田修三, 藤岡奨, 禰津家久. 3次元自由水面流れによる物体輸送の数値解法 (3D MICS) の提案と適用性の検討. 土木学会論文集, Vol. 810/II-74, pp. 79-89, 2006.
- 10) 牛島省, 牧野統師, 禰津家久. 四面体サブセル法を用い

- る市街地に流入する氾濫流の 3 次元数値計算. 水工学論文集, Vol. 51, pp. 787-792, 2007.
- 11) 牛島省, 竹村雅樹, 禰津家久. コロケート格子配置を用いた MAC 系解法の計算スキームに関する考察. 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11-19, 2002.
 - 12) 牛島省, 禰津家久. 陰解法を用いたコロケート格子による高次精度の流体解析手法の提案. 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 21-30, 2002.
 - 13) 奥山洋平, 牛島省. 非構造コロケート格子を用いる非圧縮性流体計算の圧力解法に関する考察. 水工学論文集, Vol. 48, pp. 703-708, 2004.
 - 14) H. A. Van Der Vorst. BI-CGSTAB : A first and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 13, pp. 631-644, 1992.
 - 15) 久田俊明, 野口裕久. 非線形有限要素法の基礎と応用. 丸善株式会社, 1995.
 - 16) K.E.Bisshopp and D.C.Drucker. Large deflection of cantilever beams. *Quart. Appl. Math.*, No. 3, pp. 272-275, 1945.

(2009 年 4 月 9 日 受付)