応用力学論文集 Vol.12, pp.67-77　(2009 年 8 月)　土木学会

境界制御問題に対するブロイデンの１パラメータ公式を用いた二次随伴方程式法の構築および環境制御問題に対する応用

Development of Second-order Adjoint Equation Method Using Broyden Family Method for Boundary Control Problem and Application to Environmental Control Problem

倉橋貴彦*
Takahiko KURAHASHI

*工博　長岡技術科学大学　機械系　機械情報・制御工学大講座（〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1）

I present the second-order adjoint equation method using the Broyden family method for the boundary control problem. The second-order adjoint equation method is developed on the field of the meteorology for the initial value determination problems. The formulation is improved to be able to apply to the boundary control problems, and some numerical experiments are carried out. In addition, the present method is applied to an environmental control problem.

Key Words : *Broyden Family Method; Second-order Adjoint Equation Method; Finite Element Method; Inverse Analysis; Boundary Control Problem; Environmental Control Problem*

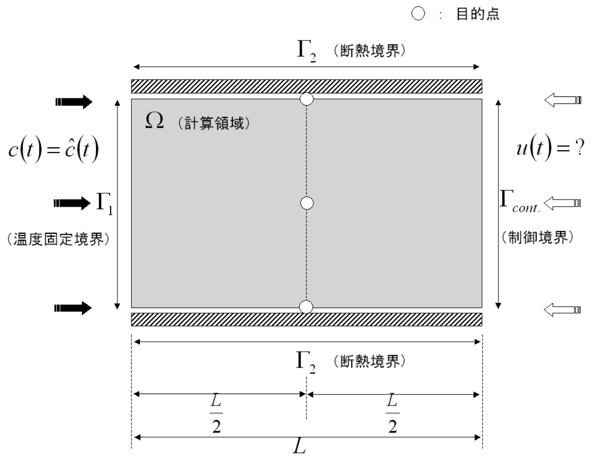
1.　はじめに

近年，設計支援に対する数値計算（最適化計算に関するモジュール）がソフトウェアに組み込まれる等，数理設計に関する需要が高まってきていると言える [1)]．数理設計の問題としては，設計基準値を満たすように部材の形状を決定する問題 [2),3)] 等があるが，ある目的を満たすように計算条件（形状決定であれば表面座標点等）を決定する問題は数理設計の問題として位置付けることができる．例えば，設計基準値の代わりに環境基準値を設定した場合，環境を制御するような制御外力を求める問題（境界制御問題）も数理設計の問題の一つとして考えることができる．具体的な例題としては，閉鎖性水域における水質浄化のための導水事業を例に取った場合，水域内における汚染物質濃度が環境基準値を満たすように浄化用水の導水量を決定する問題が挙げられる．実際の計画時においては，いくつかのケースでシミュレーションを行い，計画の妥当性の評価が行われる．しかし，先にも記したように設計支援に関する数値計算を考えた場合，このような試験的に行われるシミュレーションは自動的に行われ，作業の手間を軽減できることが望ましいと言える．このような計算は一般に逆解析と呼ばれ，先に示したような導水量を自動的に算定する試み等に関しては研究が行われている [4)]．また，河川整備に関しても河川法の改正を契機に，洪水対策としての高水計画以外に，環境面を考慮した低水計画も行われており，導水事業と合わせて考えた場合，導水本川の流量が少ない場合，導水流量を制限することも考えなければならない．このような場合においても，ある閉鎖性水域における汚染物質濃度を環境基準値にするためには汚染源の汚染物質を適切に抑制する必要がある．本稿では，実際の導水事業を例題として取り上げ，導水量が少ない場合においても，汚染物質の値が環境基準値を満たすためには汚染源の汚染物質をどの程度抑制する必要があるかという検討を実施する．

また，逆解析の手法としては，ニュートン型の解法 [5)−9)] を適用し，Navon らの研究グループにより検討が実施されている二次随伴方程式を用いた解法 [10),11)] を導入する．本検討では，二次随伴方程式を解くことで算定されるヘッシアン・ベクトル積をニュートン方程式を計算する際に使用するブロイデンの１パラメータ公式 [12)] に適用する方法を提案し，適用効果を数値実験により検証した後，実際の導水事業を取り上げ，水質抑制問題に対して検討を行う．

2.　二次随伴方程式法による式展開

制御理論に基づき，計算により求まった値と状態の目標値とを近づけるように境界を制御する問題の例として，**図–1** に示す熱伝導の領域における温度制御問題について説明する．**図–1** に示す計算モデルでは，左側の境界において強制的に温度を与え，右側の境界においては制御温度を与えることとし，上下の境界においては熱フラックスを零と定義している．ここで，**図–1** に示す計算モデルにおいて，計算領域の中心線上における温度を目標温度 c_T とする制御境界上における制御温度を算定する．ここで，熱伝導場を表現するために，



図–1 計算モデル（熱伝導問題）

式 (1) に示す熱伝導方程式を用いる．

$$\dot{c} - \kappa c_{,ii} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad t \in [t_0, t_f] \tag{1}$$

ここに c および κ は温度と熱伝導係数を示しており，Ω は計算領域，t_0 および t_f は初期時刻と終端時刻を示している．**式 (1)** に対してガラーキン法を適用すると**式 (2)** に示す有限要素方程式を得ることができる．

$$M\dot{\mathbf{c}} + A\mathbf{c} = \mathbf{q} \quad \text{in} \quad \Omega \quad t \in [t_0, t_f] \tag{2}$$

ここに M および A は質量行列，熱伝導行列を示しており，$\mathbf{q}$ は熱フラックスベクトルを示している．また，**式 (2)** に対する初期条件，境界条件は**式 (3)** のように定義する．

$$\begin{cases} \mathbf{c}(t_0) = \hat{\mathbf{c}}(t_0) \quad \text{in} \quad \Omega \\ \mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}} \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{c} = \mathbf{u} \quad \text{on} \quad \Gamma_{cont.} \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \quad t \in [t_0, t_f] \end{cases} \tag{3}$$

Γ_1，Γ_2，$\Gamma_{cont.}$ は第一種境界，第二種境界，制御境界を示しており，$\mathbf{u}$ は制御温度を示している．**図–1** に示す温度制御の問題は，汎関数として表される評価関数の極値問題に帰着でき，計算によって求まった温度と目標とする温度の差の二乗形式で表される評価関数（**式 (4)** 参照）の極値問題を解くことで制御境界上における制御温度を算定することができる．

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{c} - \mathbf{c_T})^T Q (\mathbf{c} - \mathbf{c_T}) dt \tag{4}$$

ここに $\mathbf{c}$ は計算によって求まった温度であり，Q は重み対角行列，$\mathbf{c_T}$ は目標とする温度を示している．ここで，評価関数の極値問題は**式 (2)**，**(3)** に示す制約条件のもと解くことになり，制約条件式に対応した随伴変数ベクトル $\mathbf{p}$ を導入し，制約条件式に随伴変数ベクトルを乗じた項を評価関数に対して付加することで，制約条件付きの極値問題を制約条件無しの極値問題として取り扱うことができる（**式 (5)** 参照）[1]．

$$J^* = J + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{p}^T (M\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{f} - \mathbf{q}) dt \tag{5}$$

ここに，**式 (5)** は評価関数を制約条件式と随伴変数ベクトルで拡張した関数であるため，拡張評価関数と呼ばれる．**式 (5)** において $\mathbf{f}$ は空間方向に離散化された熱伝導方程式の一部を表している（**式 (6)** 参照）[2]．

$$\mathbf{f} = A\mathbf{c} \tag{6}$$

ここで，汎関数の極値を求めるために**式 (5)** の第一変分を計算すると**式 (7)** のように書き表すことができる．

$$\begin{aligned} \delta J^* &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\delta\mathbf{p}^T \left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{p}} \right) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \delta\mathbf{c} + \left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \delta\mathbf{q} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\delta\mathbf{p}^T \left(M\dot{\mathbf{c}} + A\mathbf{c} - \mathbf{q} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\mathbf{p}^T M + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T + (\mathbf{c} - \mathbf{c_T})^T Q \right) \delta\mathbf{c} + \mathbf{p}^T \delta\mathbf{q} \right) dt \\ &\quad + \mathbf{p}(t_f)^T \delta\mathbf{c}(t_f) - \mathbf{p}(t_0)^T \delta\mathbf{c}(t_0) \end{aligned} \tag{7}$$

拡張評価関数の随伴変数に対する勾配ベクトルからは空間方向に対して離散化された熱伝導方程式が得られる（**式 (9)** 参照）．

$$\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{p}} = M\dot{\mathbf{c}} + A\mathbf{c} - \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \Omega \quad t \in [t_0, t_f] \tag{8}$$

また，拡張評価関数の温度に対する勾配ベクトルより随伴変数に対する方程式である随伴方程式が得られる．ここで，拡張評価関数の温度に対する勾配ベクトルを $\mathbf{g}$ とすると，**式 (9)** に示す随伴方程式が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{g} = -M^T \dot{\mathbf{p}} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \mathbf{p} + Q^T (\mathbf{c} - \mathbf{c_T}) \\ \text{in} \quad \Omega \quad t \in [t_0, t_f] \end{aligned} \tag{9}$$

ここに，**式 (7)** において各境界における温度および熱フラックスに対する変分は**式 (10)** のようになる．

$$\begin{cases} \delta\hat{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{0} \quad \delta\mathbf{c}(t_f) \neq \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \Omega \\ \delta\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{0} \quad \delta\mathbf{q} \neq \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \quad t \in [t_0, t_f] \\ \delta\mathbf{c} \neq \mathbf{0} \quad \delta\mathbf{q} \neq \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_{cont.} \quad t \in [t_0, t_f] \\ \delta\mathbf{c} \neq \mathbf{0} \quad \delta\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \quad t \in [t_0, t_f] \end{cases} \tag{10}$$

拡張評価関数が極値をとるためには拡張評価関数の第一変分が零となる必要があるため，**式 (10)** を考慮する

[1] 空間方向に離散化した熱伝導方程式を制約条件とすることで，式展開において導かれる随伴変数の方程式は空間方向に対して離散化された形で得られ，空間方向に対して熱伝導方程式と同等の精度を有する式となる．

[2] 異なる制約条件式を取り扱う場合においても同様の式展開が可能なように，制約条件式において非定常項の部分以外の項を一つの項として表すことにしている．

と各境界における随伴変数の条件は**式 (11)** のようになる．

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial J^*}{\partial \dot{\mathbf{c}}}\right|_{t=t_f} = \mathbf{p}(t_f) = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \Omega \\ \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \quad t\in[t_0, t_f] \\ \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_{cont.} \quad t\in[t_0, t_f] \\ \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \quad t\in[t_0, t_f] \end{cases} \tag{11}$$

ここで，制御境界における温度を解析的に求める際，リッカチの方程式を解く必要があり，解（制御境界における温度）を直接的に求めることが困難であるため，一般に反復計算により解の算定が行われる．反復計算では，制御境界における拡張評価関数の制御変数の対する勾配ベクトル $\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{u}}$ を零に近づける計算が行われ，本検討ではニュートン法に立脚した反復解法に着目する．勾配ベクトル $\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{u}}$ は，勾配ベクトル $\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{c}}$ において制御境界の部分における値を示しているため，以下，$\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{u}}$ は $\Gamma_{cont.}$ 上における $\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{c}}$ とし，式中において「on　$\Gamma_{cont.}$」と書かれているものは制御境界上において計算することを意味する．

一般に，反復計算では，制御変数は制御境界上において拡張評価関数の温度に対する勾配ベクトルにスカラーパラメータ α を乗じて得られるベクトルを線形結合することにより表すことができ，制御温度 $\mathbf{u}$ は**式 (12)** の様に書くことができる．

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{c}^{(0)} + \alpha^{(1)}\left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{c}}\right)^{(1)} + \alpha^{(2)}\left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{c}}\right)^{(2)} + \cdots \\ &= \mathbf{c}^{(0)} + \alpha^{(1)}\mathbf{g}^{(1)} + \alpha^{(2)}\mathbf{g}^{(2)} + \cdots \\ &\quad \text{on} \quad \Gamma_{cont.} \quad t\in[t_0, t_f] \end{aligned} \tag{12}$$

また，評価関数の値が極値に近い点から反復計算を行った場合，拡張評価関数の温度に対する二階の微係数を利用することで各反復計算のアルゴリズムの中で最も良い収束率をもつことが知られおり，ニュートン型の解法としてしばしば用いられる．ここに，反復計算のイタレーションを (l) とし，ニュートン型の解法で用いる方向ベクトルを $\mathbf{d}^{(l)}$ とするとき，拡張評価関数の温度に対する二階の微係数と拡張評価関数の温度に対する一階の微係数 $\mathbf{g}^{(l)}$ の関係は**式 (13)** のように表される．

$$\left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial \mathbf{c}^2}\right)^{(l)} \mathbf{d}^{(l)} = H^{(l)}\mathbf{d}^{(l)} = -\mathbf{g}^{(l)} \qquad \text{on} \quad \Gamma_{cont.} \quad t\in[t_0, t_f] \tag{13}$$

式 (13) はニュートン方程式と呼ばれ，式中における H はヘッシアン行列と呼ばれる．反復計算において制御温度を更新する前に，**式 (13)** を解くことで算定された方向ベクトル $\mathbf{d}$ を用いて制御温度を計算することができる．方向ベクトル $\mathbf{d}$ を用いた場合，**式 (12)** は**式 (14)** のように書くことができる．

$$\mathbf{u} = \mathbf{c}^{(0)} + \alpha^{(1)}\mathbf{d}^{(1)} + \alpha^{(2)}\mathbf{d}^{(2)} + \cdots \qquad \text{on} \quad \Gamma_{cont.} \quad t\in[t_0, t_f] \tag{14}$$

式 (13) におけるヘッシアン行列の計算においては BFGS 公式や DFP 公式が一般に用いられる．ここに反復計算において，制御境界における制御温度の摂動を $\mathbf{c}'_k$ とし，拡張評価関数の温度に対する勾配ベクトルの摂動を $\mathbf{g}'_k$ とする（**式 (15)** 参照）．

$$\begin{cases} \mathbf{c}'_k = \mathbf{c}^{(l)} - \mathbf{c}^{(l-1)} \\ \mathbf{g}'_k = \left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{c}}\right)^{(l)} - \left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{c}}\right)^{(l-1)} = \mathbf{g}^{(l)} - \mathbf{g}^{(l-1)} \end{cases} \tag{15}$$

式 (15) の摂動値を用いることにより，BFGS 公式[6)−9)] は**式 (16)** のように，また DFP 公式[5)] は**式 (17)** のように書くことができる[3]．ここに示す公式は，近似的にヘッシアン行列を求める式であるため，ヘッシアン行列を $\tilde{H}$ と記している．

$$\tilde{H}_B^{(l)} = \tilde{H}_B^{(l-1)} + \frac{\mathbf{g}'_k\mathbf{g}'^T_k}{\mathbf{g}'^T_k\mathbf{c}'_k} - \frac{\tilde{H}_B^{(l-1)}\mathbf{c}'_k\mathbf{c}'^T_k\tilde{H}_B^{(l-1)}}{\mathbf{c}'^T_k\tilde{H}_B^{(l-1)}\mathbf{c}'_k} \qquad \text{on} \quad \Gamma_{cont.} \quad t\in[t_0, t_f] \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_D^{(l)} &= \tilde{H}_D^{(l-1)} \\ &+ \frac{(\mathbf{g}'_k - \tilde{H}_D^{(l-1)}\mathbf{c}'_k)\mathbf{g}'^T_k + \mathbf{g}'_k(\mathbf{g}'_k - \tilde{H}_D^{(l-1)}\mathbf{c}'_k)^T}{\mathbf{g}'^T_k\mathbf{c}'_k} \\ &- \frac{(\mathbf{g}'_k - \tilde{H}_D^{(l-1)}\mathbf{c}'_k)^T\mathbf{c}'_k\mathbf{g}'_k\mathbf{g}'^T_k}{(\mathbf{g}'^T_k\mathbf{c}'_k)^2} \\ &\quad \text{on} \quad \Gamma_{cont.} \quad t\in[t_0, t_f] \end{aligned} \tag{17}$$

また，これらの公式を結合した公式をブロイデンの 1 パラメータ公式と呼び，任意パラメータ $\gamma (0 \le \gamma \le 1)$ を用いることで**式 (18)** のように書き表される．

$$\tilde{H}_{B+D}^{(l)} = (1-\gamma)\tilde{H}_B^{(l)} + \gamma\tilde{H}_D^{(l)} \quad \text{on} \quad \Gamma_{cont.} \quad t\in[t_0, t_f] \tag{18}$$

以上で示した近似ヘッシアン行列を用いてニュートン法による方向ベクトル $\mathbf{d}$ を算定し，**式 (14)** による反復計算を行う方法は準ニュートン法と呼ばれる．本論文では，ブロイデンの 1 パラメータ公式を用いた準ニュートン法による境界制御問題に対して検討を行う．また，以上に示したヘッシアン行列の算定公式における精度向上を目的とし，随伴変数の摂動値により表された方程式を解くことで得られるヘッシアン・ベクトル積をブロイデンの 1 パラメータ公式に利用する方法を提案し，数値実験による検証を行う．

3. ヘッシアン・ベクトル積を用いたブロイデンの 1 パラメータ公式

本章では，**式 (16)**，**(17)** に含まれるヘッシアン行列と温度の摂動ベクトルの積で表されるベクトルを，拡

[3] これらの公式は，セカント方程式 $\mathbf{g}'_k = H^{(l)}\mathbf{c}'_k$ より導かれたものであり，$\mathbf{g}'_k$，$\mathbf{c}'_k$ が与えられたとき，セカント方程式を満足するように $H^{(l)}$ を求める式である．

張評価関数の第一変分より導かれた勾配ベクトルのテイラー展開より導く方法について説明する．まず，拡張評価関数の随伴変数に対する勾配ベクトルとして表される空間方向に離散化した熱伝導方程式に対して摂動ベクトル $\mathbf{c}'$ による温度の変動を考慮すると**式 (19)** に示すように書き表すことができる．

$$\begin{aligned}&M(\dot{\mathbf{c}}^{(l-1)}+\dot{\mathbf{c}}'_k)\\&+\left(\mathbf{f}^{(l-1)}+\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{c}}\right)^{(l-1)}\mathbf{c}'_k+\frac{1}{2}\mathbf{c}'^T_k\left(\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial\mathbf{c}^2}\right)^{(l-1)}\mathbf{c}'_k\right)\\&-\mathbf{q}^{(l-1)}=\mathbf{0}\quad \text{in}\quad \Omega\quad t\in[t_0,t_f]\end{aligned}\tag{19}$$

式 (19) において，高次の項を微小項とし，**式 (2)** に示す熱伝導方程式に対する有限要素方程式で表される部分を消去すると，$\mathbf{c}'$ により表される温度に対する摂動方程式を得ることができる（**式 (20)** 参照）．

$$\begin{aligned}M\dot{\mathbf{c}}'_{\mathbf{k}}+\left(\frac{\partial\mathbf{f}^{(l)}}{\partial\mathbf{c}^{(l)}}\right)\mathbf{c}'_{\mathbf{k}}=M\dot{\mathbf{c}}'_{\mathbf{k}}+A\mathbf{c}'_{\mathbf{k}}=\mathbf{0}\\ \text{in}\quad\Omega\quad t\in[t_0,t_f]\end{aligned}\tag{20}$$

ここに，**式 (20)** に対する初期条件および境界条件は**式 (21)** のように与えられる．

$$\begin{cases}\mathbf{c}'_k(t_0)=\mathbf{0}\quad\text{in}\quad\Omega\\ \mathbf{c}'_k=\mathbf{0}\quad\text{on}\quad\Gamma_1\quad t\in[t_0,t_f]\\ \mathbf{c}'_k=\mathbf{u}^{(l)}-\mathbf{u}^{(l-1)}\quad\text{on}\quad\Gamma_{cont.}\quad t\in[t_0,t_f]\\ \mathbf{q}'_k=\mathbf{0}\quad\text{on}\quad\Gamma_2\quad t\in[t_0,t_f]\end{cases}\tag{21}$$

また，熱伝導方程式に対する有限要素方程式に対して摂動ベクトル $\mathbf{c}'$ による温度の変動を考慮したのと同様に，随伴方程式に対する有限要素方程式に対して摂動ベクトル $\mathbf{c}'$ による随伴変数の変動は**式 (22)** のように書き表すことができる．

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial J^*}{\partial\mathbf{c}}\right)^{(l-1)}+\left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial\mathbf{c}^2}\right)^{(l-1)}\mathbf{c}'_k+\frac{1}{2}\mathbf{c}'^T_k\left(\frac{\partial^3 J^*}{\partial\mathbf{c}^3}\right)^{(l-1)}\mathbf{c}'_k\\&=-M^T(\dot{\mathbf{p}}^{(l-1)}+\dot{\mathbf{p}}'_k)\\&+\left(\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{c}}\right)^{(l-1)}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\mathbf{c}^2}\right)^{(l-1)}\mathbf{c}'_k\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\mathbf{c}'^T_k\left(\frac{\partial^3 f}{\partial\mathbf{c}^3}\right)^{(l-1)}\mathbf{c}'_k\right)^T(\mathbf{p}^{(l-1)}+\mathbf{p}'_k)\\&+Q^T((\mathbf{c}^{(l-1)}+\mathbf{c}'_k)-\mathbf{c_T})\quad\text{in}\quad\Omega\quad t\in[t_0,t_f]\end{aligned}\tag{22}$$

熱伝導方程式に対する有限要素方程式の場合と同様に，**式 (22)** に対して式展開を行い，摂動値と摂動値の積で表される項の関係式として**式 (23)** が成り立つと仮定し，微小項として取り扱う．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathbf{c}'^T_k\left(\frac{\partial^3 J^*}{\partial\mathbf{c}^3}\right)^{(l-1)}\mathbf{c}'_k\\&=\left(\frac{1}{2}\mathbf{c}'^T_k\left(\frac{\partial^3\mathbf{f}}{\partial\mathbf{c}^3}\right)^{(l-1)}\mathbf{c}'_k\right)^T\mathbf{p}^{(l-1)}\\&+\left(\left(\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial\mathbf{c}^2}\right)^{(l-1)}\mathbf{c}'_{\mathbf{k}}+\frac{1}{2}\mathbf{c}'^T_k\left(\frac{\partial^3\mathbf{f}}{\partial\mathbf{c}^3}\right)^{(l-1)}\mathbf{c}'_k\right)^T\mathbf{p}'_k\\&\quad\text{in}\quad\Omega\quad t\in[t_0,t_f]\end{aligned}\tag{23}$$

式 (22) を展開した式より**式 (23)** の項と**式 (9)** に示す随伴方程式の部分を取り除くと，随伴変数の摂動値に関する方程式が得られ，二次随伴方程式と呼ばれる[10),11)]（**式 (24)** 参照）[4]．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial\mathbf{c}^2}\right)^{(l-1)}\mathbf{c}'_k=\mathbf{s}&=-M^T\dot{\mathbf{p}}'_k+\left(\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial\mathbf{c}^2}\mathbf{c}'\right)^{(l-1)T}\mathbf{p}^{(l-1)}\\&+\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{c}}\right)^{(l-1)T}\mathbf{p}'_k+Q^T\mathbf{c}'_k\\&=-M^T\dot{\mathbf{p}}'_k+A^T\mathbf{p}'_k+Q^T\mathbf{c}'_k\\&\quad\text{in}\quad\Omega\quad t\in[t_0,t_f]\end{aligned}\tag{24}$$

また，**式 (24)** に対する終端条件および境界条件は**式 (25)** のように与えられる．

$$\begin{cases}\mathbf{p}'_k(t_f)=\mathbf{0}\quad\text{in}\quad\Omega\\ \mathbf{p}'_k=\mathbf{0}\quad\text{on}\quad\Gamma_1\quad t\in[t_0,t_f]\\ \mathbf{p}'_k=\mathbf{0}\quad\text{on}\quad\Gamma_{cont.}\quad t\in[t_0,t_f]\\ \mathbf{s}=\mathbf{0}\quad\text{on}\quad\Gamma_2\quad t\in[t_0,t_f]\end{cases}\tag{25}$$

本論文における検討では，以上の式展開で導いた**式 (2)**，**(9)**，**(20)**，(24) に対して陽的オイラー法を適用し，時間方向に対して離散化を行う．最終的に，**式 (24)** を**式 (25)** に示す計算条件のもと解くことで，制御境界上において $\mathbf{s}$ が得られる．この値を BFGS 公式および DFP 公式において使用することで，通常のブロイデンの 1 パラメータ公式との違いについて検証を行う．(**式 (26)**，**(27)** 参照）また，以下においては**式 (5)**，**(6)** による方法（通常のブロイデンの 1 パラメータ公式）を従来法と呼び，**式 (26)**，**(27)** による方法を本手法と呼ぶ．

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(l)}_B=\tilde{H}^{(l-1)}_B+\frac{\mathbf{g}'_k\mathbf{g}'^T_k}{\mathbf{g}'^T_k\mathbf{c}'_k}-\frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^T}{\mathbf{c}'^T_k\mathbf{s}}\\ \text{on}\quad\Gamma_{cont.}\quad t\in[t_0,t_f]\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(l)}_D=\tilde{H}^{(l-1)}_D+\frac{(\mathbf{g}'_k-\mathbf{s})\mathbf{g}'^T_k+\mathbf{g}'_k(\mathbf{g}'_k-\mathbf{s})^T}{\mathbf{g}'^T_k\mathbf{c}'_k}\\-\frac{(\mathbf{g}'_k-\mathbf{s})^T\mathbf{c}'_k\mathbf{g}'_k\mathbf{g}'^T_k}{(\mathbf{g}'^T_k\mathbf{c}'_k)^2}\quad\text{on}\quad\Gamma_{cont.}\quad t\in[t_0,t_f]\end{aligned}\tag{27}$$

4.　二次随伴方程式法による反復解法

以上の導出した式を用いて，二次随伴方程式法による反復計算のアルゴリズムを以下に示す[5]．反復計算における制御量[6] $\mathbf{u}$ の更新式は，**式 (14)** で与えられ，ステップ長さ $\alpha^{(l)}$ を反復計算内で適宜決定する必要がある．本検討では，坂和らにより提案された勾配法[13)]に

[4] 本検討においては制約条件式において時間微分項を取り除いた項に非線形項が含まれていないため，**式 (24)** の右辺第二項は零となる．

[5] 反復計算内におけるニュートン方程式の計算に対しては，共役勾配法を適用している．

[6] 前述の例題では制御温度が制御量であり，設定する問題により制御量は様々であるため，ここでは制御量と一般的な名称により記している．

おけるステップ長さの更新法を適用する．この勾配法においては，ステップ長さ $\alpha^{(l)}$ は重みパラメータ $W^{(l)}$ を用いて表されることになり，ステップ長さと重みパラメータの関係は $\alpha^{(l)}=\frac{1}{W^{(l)}}$ として示される．反復計算内における重みパラメータ $W^{(l)}$ の更新も含めて，計算アルゴリズムを以下に整理する．

反復計算のアルゴリズム

1. 反復計算におけるイタレーションを $(l)=(0)$ とし，初期値 $\mathbf{u}^{(l)}$ およびヘッシアン行列 $H^{(l)}=I$ 重みパラメータ $W^{(l)}$，パラメータ γ，収束判定定数 ϵ を設定する．
2. **式 (2)**（制約条件式），**式 (4)**（評価関数）より $\mathbf{c}^{(l)}$，$J^{(l)}$ を計算する．(制約条件式に対しては，初期時刻 t_0 における条件が規定されるため，初期時刻 t_0 から終端時刻 t_f に対して解く.)
3. 算定された $\mathbf{c}^{(l)}$ を用いて，**式 (9)**（随伴方程式）より $\mathbf{p}^{(l)}$，$\mathbf{g}^{(l)}$ を計算する．(随伴方程式に対しては，終端時刻 t_f における条件が規定されるため，初期時刻 t_0 から終端時刻 t_f に対して解く.)
4. $\Gamma_{cont.}$ 境界上において，ニュートン方程式 $H^{(l)}\mathbf{d}^{(l)}=-\mathbf{g}^{(l)}$ を解き，ニュートン方向 $\mathbf{d}^{(l)}$ を計算する．
5. $\alpha^{(l)}=\frac{1}{W^{(l)}}$ として，$\Gamma_{cont.}$ 境界上において，**式 (14)** より $\mathbf{u}^{(l+1)}$ を計算する．
6. **式 (2)**（制約条件式），**式 (4)**（評価関数）より $\mathbf{c}^{(l+1)}$，$J^{(l+1)}$ を計算する．(制約条件式に対しては，初期時刻 t_0 における条件が規定されるため，初期時刻 t_0 から終端時刻 t_f に対して解く.)
7. 算定された $\mathbf{c}^{(l+1)}$ を用いて，**式 (9)**（随伴方程式）より $\mathbf{p}^{(l+1)}$，$\mathbf{g}^{(l+1)}$ を計算する．(随伴方程式に対しては，終端時刻 t_f における条件が規定されるため，初期時刻 t_0 から終端時刻 t_f に対して解く.)
8. 収束判定：$\parallel \frac{\partial J^{*(l)}}{\partial \mathbf{u}^{(l)}} \parallel_\infty < \epsilon$ の場合は計算を終了する．$\parallel \frac{\partial J^{*(l)}}{\partial \mathbf{u}^{(l)}} \parallel_\infty > \epsilon$ の場合はステップ 6 へ進む.
9. **式 (20)**（状態変数の摂動値に関する方程式），**式 (4)**（評価関数）より $\mathbf{c}'^{(l+1)}$ を計算する．(状態変数の摂動値に関する方程式に対しては，初期時刻 t_0 における条件が規定されるため，初期時刻 t_0 から終端時刻 t_f に対して解く.)
10. 算定された $\mathbf{c}'^{(l+1)}$ を用いて，**式 (24)**（随伴変数の摂動値に関する方程式）より $\mathbf{p}'^{(l+1)}$，$\mathbf{s}^{(l+1)}$ を計算する．(随伴変数の摂動値に関する方程式に対しては，終端時刻 t_f における条件が規定されるため，初期時刻 t_0 から終端時刻 t_f に対して解く.) $\Gamma_{cont.}$ 境界上において，$\mathbf{c}^{(l+1)}-\mathbf{c}^{(l)}$，$\mathbf{g}^{(l+1)}-\mathbf{g}^{(l)}$，および $\mathbf{s}^{(l+1)}$ を用いて**式 (26)**, **(27)** により $\tilde{H}_B^{(l)}$ および $\tilde{H}_D^{(l)}$ を計算し，設定されたパラメータ γ を用いて，**式 (18)** によりヘッシアン行列 $\tilde{H}_{B+D}^{(l)}$ を計算する．
11. 重みパラメータ $W^{(l)}$ の更新.
    $J^{(l+1)}\leq J^{(l)}$ の場合は,$W^{(l+1)}=0.9W^{(l)}$ として，ステップ 3 へ戻る.
    $J^{(l+1)}>J^{(l)}$ の場合は,$W^{(l+1)}=2.0W^{(l)}$ として，ステップ 4 へ戻る.

5. 数値実験

5.1 検証例題

本節では，前章で示した温度制御問題を例に数値実験を行う．本節に示す解析例の目的は，**図–1** に示す計算モデルにおいて，計算領域の中心線上における温度を目標値とするような，右側の境界における制御温度を算定することである．この解析例を用いて，ヘッシアン・ベクトル積 $\mathbf{s}$ を用いたブロイデンの 1 パラメータ公式と従来のブロイデンの 1 パラメータ公式により算定された解を比較することにより適用効果について検討を行う．有限要素メッシュ図を**図–2** に示す．総節点数は 33 であり，総要素数は 40 である．本検討では，目的点（計算領域の中心線上の節点）における目標温度 c_T を零度と設定する．計算領域の左側の境界 Γ_1 より正弦波で表される温度の時系列値を与えることとし，境界条件は**式 (28)** のように示される．

$$c=\sin\frac{2\pi t}{T} \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \quad t\in[t_0,t_f], \tag{28}$$

ここに，t は実時間を表しており，T は境界条件を表す正弦波の周期を示している．また，Γ_2 境界上における熱フラックス b，および制御境界 $\Gamma_{cont.}^{(0)}$ 上で与える反復計算における温度の初期値は**式 (29)**，**(30)** のように与えることにする．

$$b=0.0 \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \quad t\in[t_0,t_f], \tag{29}$$

$$c_{cont.}^{(0)}=0.0 \quad \text{on} \quad \Gamma_{cont.} \quad t\in[t_0,t_f]. \tag{30}$$

本検討では，計算領域の中央部に目的点を設定しているため，目的点において温度を零度とするためには，制御温度は**式 (28)** で示される温度にマイナスを乗じた形で算定されることが理想である．このような結果の想定のもと数値実験を行い，本稿で提案する方法の妥当性を検証する．本検討における計算条件を**表–1** に整理する．ここで，従来のブロイデンの 1 パラメータ公式を用いてパラメータ γ の設定を調節し得られた結果を以下に示す[7]（**表–2** 参照）．結果として全てのケースにおいて評価関数は鞍点に収束することとなった．また，二次随伴方程式を解くことで得られたヘッシアン・ベクトル積 $\mathbf{s}$ を用いたブロイデンの 1 パラメータ公式を用いた結果を以下に示す（**表–3** 参照）．本手法を用いた場合，計算時間は従来法（**表–2**）に比べ多く必要とされる．これは，状態変数および随伴変数の方程式

[7] 本検討を行った計算機の仕様は'Opteron 850, 2.4GHz' である．

表–1 計算条件

熱拡散率 $\kappa(m^2/sec)$	0.0020
時間増分量 Δt (sec)	1.0
入力波の周期 T (sec)	4000.0
時間ステップ数	40,000
重み定数 Q	1.0
目標温度 c_T	0.0
初期ステップ長さ $\alpha^{(0)}$	0.90
収束判定定数 ϵ	10^{-6}

表–2 パラメータ γ による計算結果の比較 (従来法)

γ	反復計算回数	J の値 (収束時)	計算時間
0.10	7	3.156E-007	2.350s
0.20	9	1.685E-007	2.985s
0.30	10	8.654E-008	3.524s
0.40	8	8.521E-008	2.659s
0.50	11	1.438E-008	3.628s
0.60	12	3.134E-005	4.170s
0.70	8	1.776E-003	2.721s
0.80	16	2.834E-003	5.267s
0.90	25	2.047E-002	8.144s

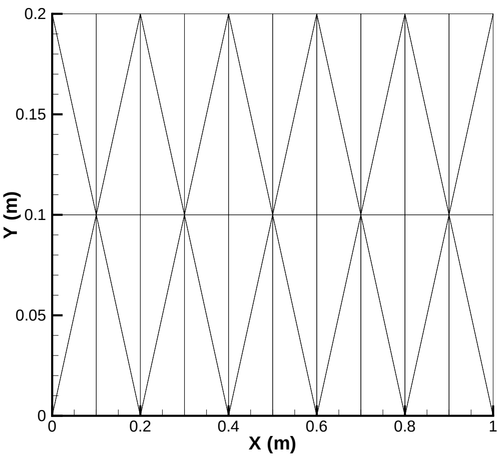
の計算に加えて，状態変数および随伴変数の摂動値に関する方程式（**式 (20)** および **(24)**）の計算を行う必要があるためである．**図–3** にパラメータ γ と評価関数の収束値の関係を整理する．図中において米印は本手法の結果を示しており，丸印は従来法の結果を示している．結果より，パラメータ γ を変化させた全てケースにおいて従来法の結果より本手法の結果は最小値へ収束させることができていることを確認できる．

ここで，本手法を用いた場合に得られた結果を**図–4**，**5** に示す[8]．**図–4** は各境界における温度の時系列変化の比較を示しており，実線は制御温度，破線は流入温度を示している．結果より，流入温度の波形と逆の形をした制御温度が得られており，本検討では，目的点の配置を流入温度と制御温度の与えられる境界の中央部に設定していることから，目的点において温度を零度とするために適切な制御温度（流入温度の波形の正負を逆にした波形）が算定されていると考えられる．**図–5** は目的点における温度の時系列変化を示している．図中において，実線は反復計算収束時（最適制御時）における温度を示しており，破線は反復計算開始時（c=0.0

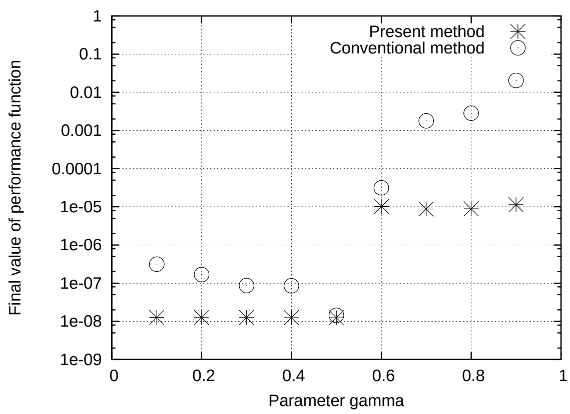
[8] パラメータ γ は 0.5 と設定した場合の結果を代表的に示している．

表–3 パラメータ γ による計算結果の比較 (本手法)

γ	反復計算回数	J の値 (収束時)	計算時間
0.1	14	1.261E-008	11.299s
0.2	14	1.257E-008	11.315s
0.3	14	1.252E-008	11.391s
0.4	14	1.247E-008	11.385s
0.5	14	1.241E-008	11.514s
0.6	13	1.015E-005	10.746s
0.7	8	8.739E-006	7.465s
0.8	8	8.880E-006	7.415s
0.9	8	1.134E-005	7.337s

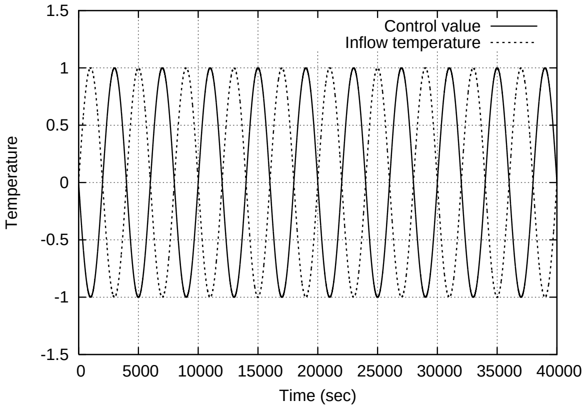


図–2 有限要素メッシュ

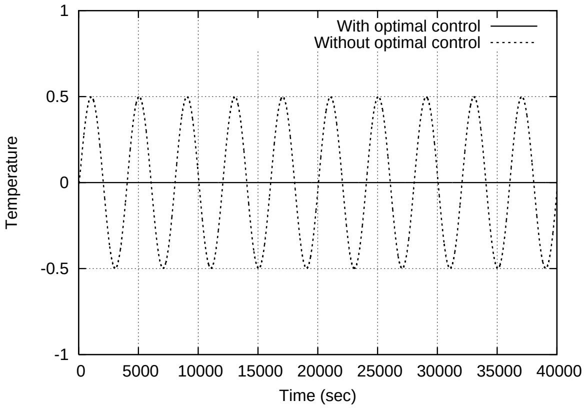


図–3 パラメータ γ と評価関数の収束値との関係

の場合）における温度を示している．結果より，目的点における温度は目標とする温度（零度）に近づけられていることを確認できる．



図–4 入力温度と制御温度の比較



図–5 目的点における温度の時系列変化

5.2 水質制御問題への適用

本節では，湖沼における水質制御問題を対象とし，ブロイデンの 1 パラメータ公式を用いた二次随伴方程式法の適用性について検証を行う．解析例としては，千葉県の手賀沼における北千葉導水事業の問題を取り扱う（**図–6** 参照）．手賀沼における COD 濃度は 1970 年より 30 年間概ね 20mg/l 程度と高い値で推移していたこともあり，日本国内で水質が最も悪い湖沼として知られていた（**図–7** 参照）[9]．北千葉導水事業は，利根川から手賀沼と坂川に対して最大 $10.0\mathrm{m}^3/sec$ の浄化用水を導水し水質浄化を行う事業であり，2000 年より実施されてきた．手賀沼に対する浄化用水の導水を一定期間導水し続けた場合，COD 濃度が低減できたという報告もあるが，最大 $5.0\mathrm{m}^3$/sec を 21 日間導水し続けた場合 COD 濃度は 22mg/l から 12mg/l へ低減され，環境基準値である 5mg/l 以下にならなかったという報告もある．近年の河川計画では，洪水対策としての高水計画と共に環境を配慮した低水計画も行われ，河川の流量を勘案し導水を行う必要がある．導水可能な流量が少ない場合においても環境基準値以下に COD 濃度を抑えるためには COD 濃度の発生源である家庭排水等に対して適切な基準を設定し，排水規制等で排出される汚染物質を低減させる必要がある．よって，本検討では，導水流量を $5.0\mathrm{m}^3$/sec とした際に，COD 濃度を環境基準値より下げるためにはどの程度排水規制を行う必要があるか，流入部における COD 濃度を環境基準値を用いて決定する問題を考える．

[9] **図–6** および**図–7** は，国土交通省関東地方整備局江戸川河川事務所から提供して頂いた資料をもとに作成したものである．

(1) 手賀沼における流況解析

本検討では，手賀沼における流況計算に，**式 (31)**, **(32)** に示す線形浅水長波方程式を用いる．**式 (31)**, **(32)** に対する離散化手法としては，空間方向に対してはガラーキン法を用い，時間方向に対しては二段階陽解法を適用した．

$$\dot{v}_i + g\eta,_i = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad t \in [t_0, t_f] \tag{31}$$

$$\dot{\eta} + hv_i,_i = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad t \in [t_0, t_f] \tag{32}$$

ここに，v_i および η は，流速および水位変動量を示している．また，g および h は重力加速度および平均水深を示している．本検討で対象としている手賀沼の計算領域，境界の定義および有限要素メッシュ図を**図–8** に示す．総節点数および総要素数は 777，1,302 である．また平均水深の分布図を**図–9** に示す．初期条件として設定する変数および各境界において定義する変数を**式 (33)** に示す．

$$\begin{cases} v_i(t_0) = \hat{v}_i(t_0) \quad \eta(t_0) = \hat{\eta}(t_0) \quad \text{in} \quad \Omega \\ v_i = \hat{v}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_{1U-1} \quad \text{and} \quad \Gamma_{1U-2} \quad t \in [t_0, t_f] \\ \eta = \hat{\eta} \quad \text{on} \quad \Gamma_{1D} \quad t \in [t_0, t_f] \\ v_n = v_i n_i = \hat{v}_n \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \quad t \in [t_0, t_f] \end{cases} \tag{33}$$

計算条件として二段階陽解法におけるランピングパラメータ e を 0.80 と設定し，時間増分量 Δt を 0.50sec と設定した．各境界 Γ_{1U-1} および Γ_{1U-2} における流量 $Q_{\Gamma_{1U-1}}$ および $Q_{\Gamma_{1U-2}}$ は，$8.86\mathrm{m}^3$/sec [10] および $2.68\mathrm{m}^3$/sec と設定した[11]．また，Γ_2 境界においては Slip 境界，Γ_{1D} 境界においては水位変動量を零とし，計算の終端時刻 t_f を 7 日と設定した[12]．計算結果として，7 日目における流速および水位変動量の分布を**図–10** に示す．ここで算定された流速の値を用いて水質制御問題を解く．

(2) 水質制御問題

時間区間 $[t_0, t_f]$ における，流速 $\hat{v}_i(t)$ を用いて手賀沼内における COD 濃度の分布の算定を行う．COD 濃度の分布を算定するために用いる移流拡散方程式を**式 (34)** に示す．

$$\dot{c} + \hat{v}_i c_{,i} - \kappa c_{,ii} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad t \in [t_0, t_f] \tag{34}$$

[10] 通常の流量条件に導水流量 5.00 m^3/sec を加えた流量を想定している．

[11] 各境界における流量は，流速の大きさを $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$=0.03m/sec と仮定し，全水深を $h+\eta$=0.80m+0.00m=0.80m と設定した場合に，各々の境界の川幅に対して算定したものである．

[12] 時間増分量は 0.50sec と設定しているため，時間ステップ数は 1,209,600 となる．

ここに，c，$\hat{v}_i$ および κ は，COD 濃度，流速，拡散係数を示している．**式 (34)** に対する離散化手法としては，空間方向に対してガラーキン法を用い，時間方向に対しては陽的オイラー法を適用した．ここで，数値安定性に対して，(1)CFL 条件（輸送方程式に対する安定条件）および (2) 拡散方程式に対する安定条件について調べる．各条件に対して時間増分量 Δt に対する上限値は (1)$\Delta t \leq \frac{\Delta x_{min}}{V_{max}}$ (2)$\Delta t \leq \frac{1}{2}\frac{\Delta x_{min}{}^2}{\kappa}$ により与えられ，全要素において Δx_{min} は最小面積の平方根 $\sqrt{A_{min}}$ で表し，V_{max} は要素内平均流速に対して全時間で流速の大きさが最大のもの，また拡散係数 κ は $0.50\mathrm{m}^2/\mathrm{sec}$. と設定する．結果として時間増分量 Δt に対して，(1)$\Delta t \leq 397.28$ sec. (2)$\Delta t \leq 26.34$ sec. という上限値に対する条件が得られる．両方の条件を満足する様に時間増分量 Δt を決定することとなるが，本検討では流況解析の場合と同様，時間増分量 Δt を 0.50sec と設定し検討を実施する．また，**式 (34)** に対する初期条件および境界条件を**式 (35)** のように定義する．

$$\begin{cases} c(t_0) = \hat{c}(t_0) \quad \text{in} \quad \Omega \\ c = \hat{u}_1 \quad \text{on} \quad \Gamma_{1U-1} \quad t \in [t_0, t_f] \\ c = \hat{u}_2 \quad \text{on} \quad \Gamma_{1U-2} \quad t \in [t_0, t_f] \\ b = \kappa c_{,i} n_i = \hat{b} \quad \text{on} \quad \Gamma_{1D} \quad \text{and} \quad \Gamma_2 \quad t \in [t_0, t_f] \end{cases} \tag{35}$$

ここで，本節では，計算領域内で設定した目的点における COD 濃度を環境基準値である 5.0mg/l に近づけるような，境界 Γ_{1U-1} および Γ_{1U-2} 上における COD 濃度を算定することを目的とする．目的点は**図–11** に示すように，湖沼の中央部に設定する．

本節における例題では，拡張評価関数の第一変分を計算する際，状態方程式としては移流拡散方程式が用いられる．よって，本検討における離散化された状態方程式の一部分を表すベクトル $\mathbf{f}$ （**式 (6)** に対応する式）は**式 (35)** のように表される．

$$\mathbf{f} = (B(\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{i}) + \kappa A)\mathbf{c} \tag{36}$$

ここに $B(\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{i})$ はガラーキン法によって定式化することで得られた移流行列を意味する．結果として，熱伝導方程式を状態方程式とした場合に導かれた状態変数に対する随伴方程式（**式 (9)**），状態変数に対する摂動方程式（**式 (20)**）および二次随伴方程式（**式 (24)**）に対して移流効果を含んだ形で各方程式が導かれることになる．また，本節で取り扱う例題では，移流流速は既知量であるため，拡張評価関数を第一変分することで得られる流速に対する変分量 $\delta\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{i}$ は零となる．これらの事を基に定式化を行い，ブロイデンの 1 パラメータ公式におけるパラメータ γ を 0.5 と設定し検討を行った．

計算領域内における COD 濃度の初期値は一様に 22mg/l と設定し，本検討で用いた計算条件を**表–4** に整理する．計算結果を**図–12** から **17** に示す[13]．**図–12** に評価関数の収束履歴を示しており，評価関数の値が減少し最終的に収束していることがわかる．結果として，目的点において目標となる COD 濃度となるような境界 Γ_{1U-1} および Γ_{1U-2} における COD 濃度が算出される (**図–13** 参照)．この結果は導水を行っている間は**図–13** に示す様に，COD 濃度を排水規制等により抑制することで目的点における COD 濃度を環境基準値付近に COD 濃度を抑制できることを示している．また，**図–13** より各境界 Γ_{1U-1} および Γ_{1U-2} において COD 濃度を概ね 2mg/l および 18mg/l 以下に抑制することで目的点における COD 濃度を環境基準値以下に抑制できることがわかる．解析時刻終盤付近で濃度が大きな値を示している理由としては，各制御境界 Γ_{1U-1} および Γ_{1U-2} から目的点まで 1km~ 2km 程度離れていることから，制御境界において解析時刻 6 日，7 日付近で COD 濃度を制御しない場合においても，解析時刻全体においては目的点において影響を与えないため**図–13** に示す様な結果を得たと考えられる．

表–4 計算条件

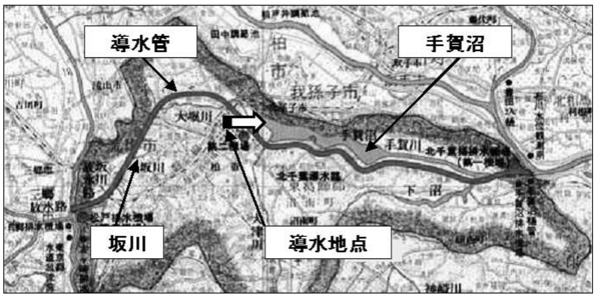
拡散係数 $\kappa(m^2/sec)$	0.50
時間増分量 Δt (sec)	0.50
時間ステップ数	1,209,600
重み定数 Q	1.0
目標 COD 濃度 c_T (mg/l)	5.0
初期ステップ長さ $\alpha^{(0)}$	-0.050
収束判定定数 ϵ	10^{-3}

また，目的点における COD 濃度の時系列の変化を**図–14** に示す．実線は，評価関数の収束時における目的点での COD 濃度を示しており，破線は，反復計算開始時における目的点での COD 濃度を示している．また，手賀沼における COD 濃度の分布を**図–15**~ **17** に示す．結果として，**図–13** に示すように各境界 Γ_{1U-1} および Γ_{1U-2} において，COD 濃度を抑制することで，環境基準値である COD 濃度（目標濃度）5mg/l 付近へ制御することが可能となる．

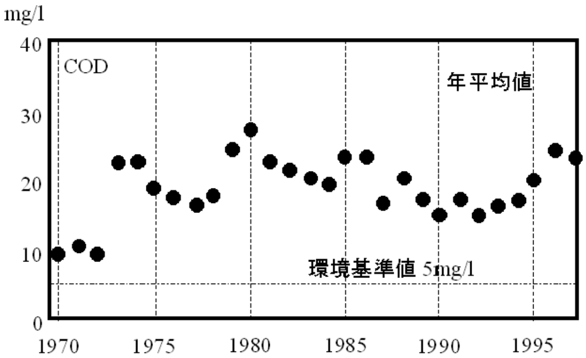
6. おわりに

本稿では，境界制御問題に対して二次随伴方程式を解くことで得られるヘッシアン・ベクトル積をブロイデンの 1 パラメータ公式に適用し，数値実験による検証を行った．熱伝導場における温度の制御問題を検証

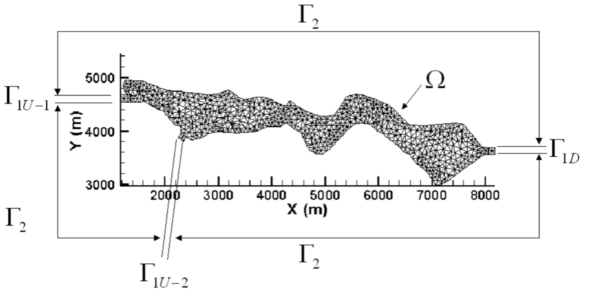
[13] 本計算は，'FUJITSU PRIMEQUEST 580（九州大学情報基盤研究開発センター）' を用いて行ったものであり，計算機の仕様は'Intel Itanium2 processor 1.6GHz' である．ここでは，64 コア（計算時間 : 26 時間 5 分 17.69 秒）を用いて検討を行った．



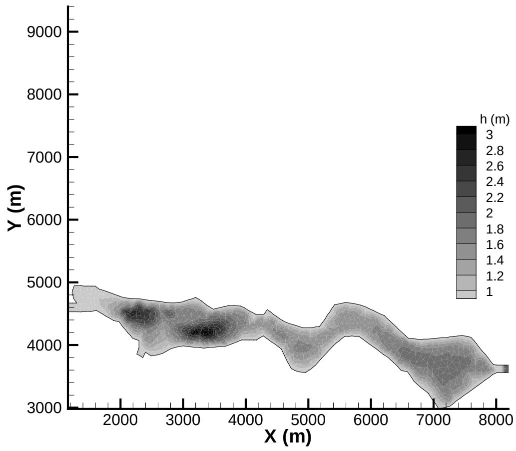
図–6 北千葉導水事業



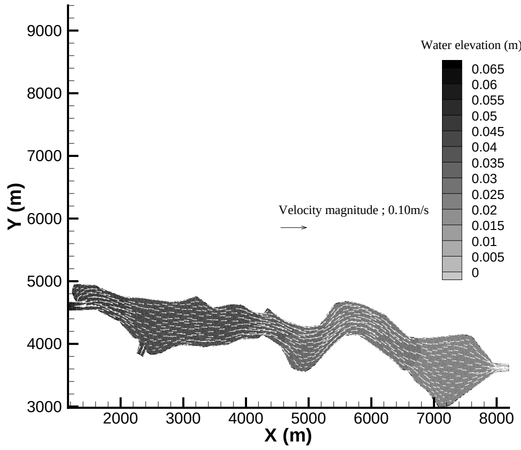
図–7 COD の経年変化



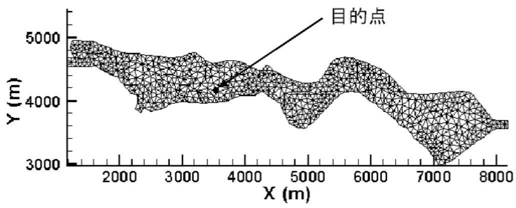
図–8 境界条件および有限要素メッシュ



図–9 水深の分布



図–10 導水後における流況の分布（7 日後）



図–11 目的点の位置

例題とし，従来から用いられているブロイデンの 1 パラメータ公式により求まる評価関数の値と，本論文で提案した方法により算定された評価関数の値を比較したところ，本論文で提案した方法の場合，全てのケースにおいてより小さな評価関数の値を得ることができた．また，実際に行われている水質改善の問題に対して本論文で提案した方法を用いて検討を行い，計算ステップ数が多い問題に対しても良好な計算結果を得ること示した．

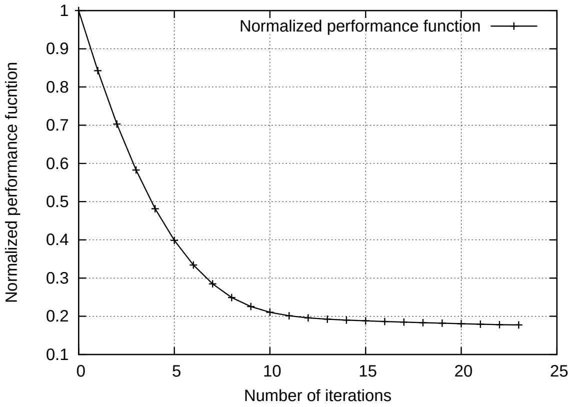
一方，本論文で提案した方法は従来法に比べて，二次随伴方程式を計算する工程が追加されているため，従来法に比べて計算時間がかかるという問題点がある．この問題点を解決するためにも，ヘッシアン・ベクトル積の利用法を更に改良し，計算時間をより抑えることができ，従来法より評価関数の値を下げることのできる方法の開発が今後の課題である．

謝辞

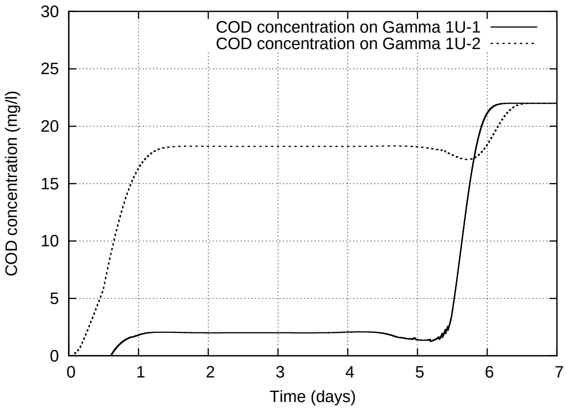
本研究は長岡技術科学大学 [学長戦略的経費 (A)] の助成を受けて遂行されたものである．ここに記して謝意を表す．

参考文献

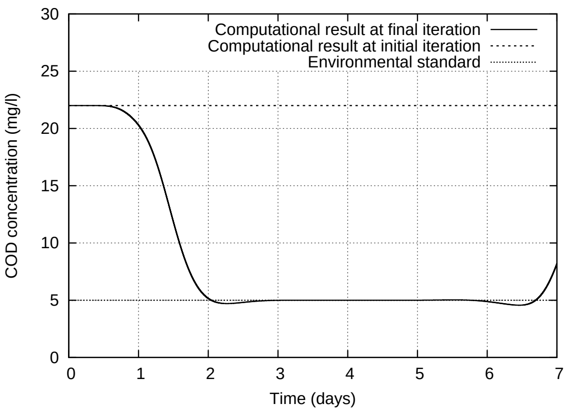
1) 秋葉博，米村望，吉村忍，矢川元基; 並列構造解析システム ADVENTURE と ADVENTURECluster，日本機械学会第 15 回計算力学講演会講演論文集，



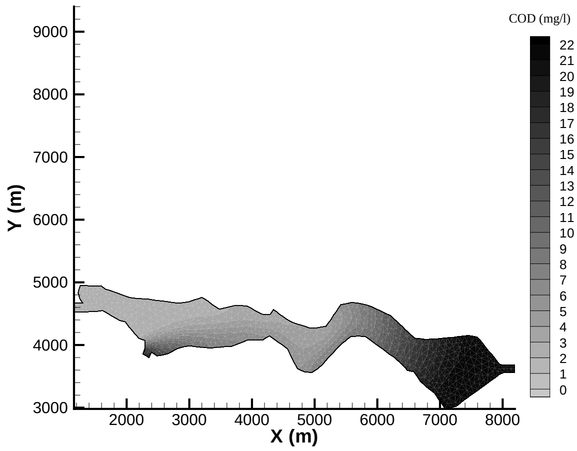
図–12 評価関数の収束履歴



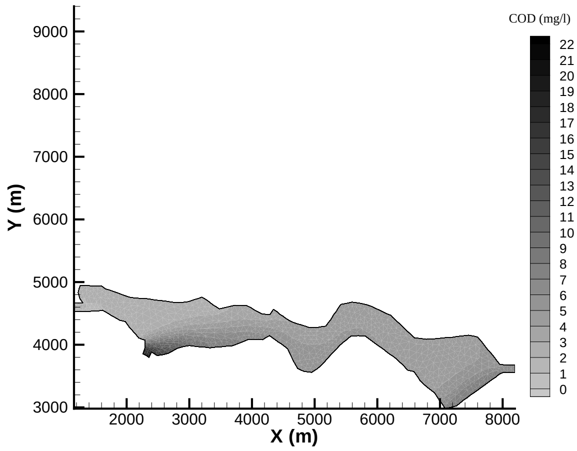
図–13 Γ_{1U-1} および Γ_{1U-2} 上における COD 濃度の時系列変化



図–14 目的点における COD 濃度の時系列変化



図–15 評価関数の収束時における COD 濃度の分布（3 日後）



図–16 評価関数の収束時における COD 濃度の分布（5 日後）

No.02-02，pp.101，2002.

2) 長谷川義明，鍵山恭彦，畔上秀幸; 音場・構造連成問題における形状最適化，日本応用数理学会 2006 年度年会講演予稿集，pp.162–163, 2006.

3) 片峯英次，西橋直志，畔上秀幸; 抗力最小化・揚力最大化を目的とした粘性流れ場の形状最適化，日本応用数理学会 2007 年度年会講演予稿集，pp.208–209, 2007.

4) T.Kurahashi and M.Kawahara; Water Quality Purification Problem Applied to Mikawa Bay Based on Optimal Control Theory, ECCOMAS 2000 Abstract 集 pp771, 2000.

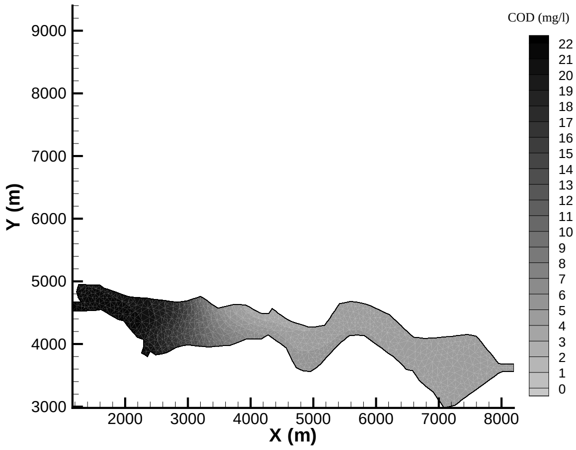
5) R.Fletcher and M.J.D.Powell; A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, *Computer J.*, **6**, pp.163–168, 1963.

6) C.G.Broyden; The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 2. the new algorithm., *Journal of the Institute for Mathematics and Applications*, Vol. **6**, pp.222–231, 1970.

7) R.Fletcher; A New Approach to Variable Metric Algorithms, *Computer J.*, **13**, pp.317–322, 1970.

8) D.Goldfarb; A Family of Variable Metric Methods Derived by Variational Means, *Mathematics of Computation*, **24**, pp.23–26, 1970.

9) D.F.Shanno; Conditioning of Quasi-Newton



図–17 評価関数の収束時における COD 濃度の分布（7 日後）

Methods for Function Minimization, *Mathematics of Computation*, Vol. **24**, pp.647–656, 1970.

10) Z.Wang, I.M.Navon, F.X.Le Dimet, and X.Zou; The Second Order Adjoint Analysis: Theory and Applications, *Meteorology and Atmospheric Physics*, **50**, pp.3–20, 1992.
11) Z.Wang, I.M.Navon, X.Zou and F.X.Le Dimet; A Truncated Newton Optimization Algorithm in Meteorology Applications with Analytic Hessian/Vector Products. *Computational Optimization and Applications*, **4**, pp.241–262, 1995.
12) C.G.Broyden; The convergence of a class of double-rank minimization algorithms, Parts I and II. *J. Inst. Math. Appl.*, **6**, pp.76–90, 222–236, 1970.
13) Y.Sakawa and Y.Shindo; On Global Convergence of An Algorithm for Optimal Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. ac-**25**, No.6, pp.1149–1153, (December) 1980.

(2009 年 4 月 9 日 受付)