

級数解法による Winkler 基礎上にある長方形平板の 3 次元応力解析

Three-dimensional stress analysis of rectangular plates resting on the Winkler foundations by a series solution

名木野 晴暢*・多田 裕治**・野中 翔***・末武 義崇****・水澤 富作*****・三上 隆*****
 Harunobu Nagino, Yuji Tada, Sho Nonaka, Yoshitaka Suetake, Tomisaku Mizusawa and Takashi Mikami

*博 (工) 大分工業高等専門学校助教 都市システム工学科 (〒870-0152 大分市牧 1666 番地)

**熊本大学学部生 工学部社会環境工学科 (〒860-8555 熊本市黒髪 2 丁目 29 番地 1 号)

(当時 大分工業高等専門学校本科生 都市システム工学科)

***九州大学学部生 工学部地球環境工学科 (〒819-0395 福岡市西区元岡 744 番地)

(当時 大分工業高等専門学校本科生 土木工学科)

****工博 足利工業大学教授 都市環境工学科 (〒326-8558 足利市大前町 268-1)

*****工博 大同大学教授 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

*****工博 北海道大学大学院教授 工学研究科北方圏環境政策工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

This paper presents the three-dimensional (3-D) stress analysis of four edges simply supported rectangular plates resting on the Winkler foundations based on the linear and small strain theory of elasticity. A series solution as exactly in the thickness direction is derived by the double Fourier series. To demonstrate the convergence and accuracy of a derived series solution, several examples are solved, and the results are compared with other published solutions based on the Mindlin plate theory and 3-D finite element solutions by finite element code Abaqus. Stable convergence is observed, and high accuracy is also obtained by a series solution. The effects of thickness-to-length ratio and non-dimensional foundation parameter on the displacements and stresses distributions of square plates on the Winkler foundations are investigated in detail. Some results found for the first time have been given and some important conclusions have been drawn. Moreover, the present results are shown in tabular forms, and may serve as benchmark data for the numerical methods.

Key Words: rectangular plate, Winkler foundation, 3-D stress analysis, series solution

キーワード: 長方形平板, Winkler 基礎, 3 次元応力解析, 級数解

1. まえがき

基礎構造, スラブ軌道や舗装道路などは, 地盤上にある平板構造要素の問題として取り扱われるため, 地盤の影響を考慮した平板構造要素のより正確な静力学的特性(変位及び応力分布性状)を把握することが重要な課題になる。

平板構造要素では, 板厚の増大に伴い, 面外せん断変形の影響が現れてくるため, 厚肉平板構造要素の構造解析には, 面外せん断変形の影響を考慮した Reissner-Mindlin 平板理論^{1),2)}などが用いられる。しかしながら, 地盤上にある厚肉平板構造要素の曲げ問題における Mindlin 平板理論の適用には, 以下のような構造解析理論上の問題点がある。

(1) 実際の構造解析モデルでは, 面外荷重は平板の上面に作用し, 地盤は平板の下面で接触するが, 2 次元の近似理論である Mindlin 平板理論では, これらの局所的な影響を考慮することができない。

(2) 地盤上にある厚肉平板構造要素の曲げ問題における Mindlin 平板理論の適用範囲が明確にされていない。

従って, 地盤上にある任意の平板厚を有する平板構造要素の弾性学的に正確な静力学的特性を把握するためには, 板厚方向の影響を厳密に考慮することができる 3 次元弾性論に基づかなければならない。

地盤を弾性基礎でモデル化し, Mindlin 平板理論に基づく中等厚肉平板の静力学的特性を明らかにした研究は, 古くからなされている^{3)~6)}。Winkler 基礎を取り扱ったものに限定すると, Kobayashi・Sonoda⁷⁾は, Winkler 基礎上にある Mindlin 平板理論に基づく平板の曲げ問題の級数解を Lévy 法により求めており, 相対する 2 辺が単純支持され, 他の 2 辺で任意の境界条件を有する Winkler 基礎上にある Mindlin 平板の曲げ特性を明らかにしている。Liew・Han・Xiao・Du⁸⁾は, differential quadrature 法を用いて, Winkler 基礎上にある Mindlin 平板の曲げ解析を行っており, 平板

の4辺で任意の境界条件を有する Mindlin 平板の曲げ特性を明らかにしている。Liu⁹⁾は、differential quadrature 要素法を用いて、Winkler 基礎にある4辺で任意の境界条件を有する Mindlin 平板の曲げ問題を解析している。このように、Winkler 基礎にある Mindlin 平板の静力学的特性はある程度解明されていると思われるが、平板を3次元弾性論に基づく直方弾性体として取り扱った研究報告は、著者らが文献調査した範囲では見当たらず、Winkler 基礎にある直方弾性体(即ち、厚肉平板)の静力学的特性については、未だ明らかにされていないようである。

本論文では、Winkler 基礎にある面外荷重を受ける周面単純支持された直方弾性体の級数解を誘導し、Winkler 基礎にある平板の変位及び応力分布特性に与える平板厚と弾性基礎の影響を明らかにすることを目的としている。なお、本論文で誘導する3次元弾性論に基づく級数解は、弾性基礎にある平板の正確な静力学的特性を把握するのみでなく、有限要素法を含めた種々の数値解析法による数値解を評価する上でも活用できるものである。

2. 基礎方程式と境界条件及び級数解の誘導

2.1 解析モデル及び解析仮定

図-1には、Winkler 基礎にある平板、座標系及び変位方向の定義が示してある。ここで、 a は平板の長さ、 b は幅及び h は厚さであり、 k_1 はWinkler 基礎の地盤反力係数、 $q(x, y)$ は任意形状の分布荷重を表す関数である。また、 x 、 y 及び z 方向の変位成分をそれぞれ、 $u(x, y, z)$ 、 $v(x, y, z)$ 及び $w(x, y, z)$ と定義する。

Winkler 基礎にある面外荷重を受ける直方弾性体の級数解を誘導するために、以下の解析仮定を設ける。

- (1) 等質かつ等方的な平板は、微小ひずみ及び線形弾性である3次元弾性論に従うものとし、平板の上面で等分布満載荷重 q を受けるものとする。即ち、平板に作用する面外荷重は、全て表面力として評価する。
- (2) 平板の周面は、単純支持されているものとする。
- (3) Winkler 基礎は、平板の下面で滑らかに完全密着しているものとし、弾性基礎の引張変形は考慮しない。

2.2 基礎方程式及び境界条件

直方弾性体の基礎方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

ここで、 ν はポアソン比である。

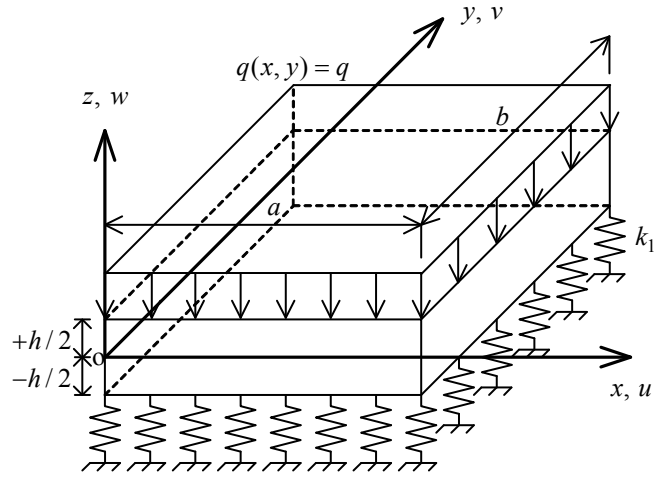


図-1 Winkler 基礎にある平板、座標系及び変位方向

直方弾性体のひずみ成分は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2) \end{aligned}$$

また、直方弾性体の応力成分は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \sigma_y &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_z &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3) \end{aligned}$$

ただし、 $G = E/2(1+\nu)$ はせん断弾性係数であり、 E はヤング係数である。

直方弾性体の周面が単純支持されているとすれば、次の境界条件を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} v=w=0, \quad \sigma_x=0 \quad (x=0, a), \\ u=w=0, \quad \sigma_y=0 \quad (y=0, b) \quad (4) \end{aligned}$$

よって、単純支持面の直交する位置(例えば、 $x=0, y=0$)では、 $u=v=w=0$ かつ $\sigma_x=\sigma_y=0$ という複雑な境界条件となる。また、直方弾性体の下面及び上面での境界条件は、図-1より、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_z=k_1 w, \quad \tau_z=\tau_{zx}=0 \quad (z=-h/2), \\ \sigma_z=-q, \quad \tau_z=\tau_{zx}=0 \quad (z=h/2) \quad (5) \end{aligned}$$

2.2 板厚方向に閉じた形式の級数解の誘導

Winkler 基礎にある面外荷重を受ける直方弾性体の板厚方向に閉じた形式の級数解を誘導するために、次式で表される無次元座標系及び無次元変位量を導入する。

$$\xi(x) = x/a \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad \eta(y) = y/b \quad (0 \leq \eta \leq 1),$$

$$\zeta(z) = z/h \quad (-0.5 \leq \zeta \leq 0.5) \quad (6)$$

$$u(x, y, z) = hU(\xi, \eta, \zeta), \quad v(x, y, z) = hV(\xi, \eta, \zeta),$$

$$w(x, y, z) = hW(\xi, \eta, \zeta) \quad (7)$$

ただし、 $U(\xi, \eta, \zeta), V(\xi, \eta, \zeta), W(\xi, \eta, \zeta)$ は、無次元変位である。ここで、式(4)の境界条件を満足する無次元変位は、厚さ方向の未知関数を $U_{mn}(\zeta), V_{mn}(\zeta), W_{mn}(\zeta)$ とし、 ξ, η の2方向に固有関数を展開すれば、次のように仮定できる。

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(\zeta) \cos(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta),$$

$$V(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(\zeta) \sin(m\pi\xi) \cos(n\pi\eta),$$

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(\zeta) \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) \quad (8)$$

まず、式(6)及び式(7)を式(1)に代入して、基礎方程式を無次元化し、無次元化された基礎方程式に式(8)を代入すれば、3元連立偏微分方程式で表される基礎方程式は、次のような ζ に関する3元連立常微分方程式に変換される。

$$-g^2 U_{mn}(\zeta) + \frac{d^2 U_{mn}(\zeta)}{d\zeta^2} - \frac{M^2 U_{mn}(\zeta)}{1-2\nu} - \frac{MNV_{mn}(\zeta)}{1-2\nu} + \left(\frac{M}{1-2\nu} \right) \frac{dW_{mn}(\zeta)}{d\zeta} = 0,$$

$$-g^2 V_{mn}(\zeta) + \frac{d^2 V_{mn}(\zeta)}{d\zeta^2} - \frac{N^2 V_{mn}(\zeta)}{1-2\nu} - \frac{MNU_{mn}(\zeta)}{1-2\nu} + \left(\frac{N}{1-2\nu} \right) \frac{dW_{mn}(\zeta)}{d\zeta} = 0,$$

$$-g^2 W_{mn}(\zeta) + \frac{d^2 W_{mn}(\zeta)}{d\zeta^2} + \left(\frac{1}{1-2\nu} \right) \frac{d^2 W_{mn}(\zeta)}{d\zeta^2} - \left(\frac{M}{1-2\nu} \right) \frac{dU_{mn}(\zeta)}{d\zeta} - \left(\frac{N}{1-2\nu} \right) \frac{dV_{mn}(\zeta)}{d\zeta} = 0 \quad (9)$$

ただし、

$$M = \frac{m\pi h}{a}, \quad N = \frac{n\pi h}{b}, \quad g^2 = M^2 + N^2 \quad (10)$$

である。ここで、式(9)の解を次のように仮定する。

$$U_{mn}(\zeta) = X_{mn} e^{\lambda\zeta}, \quad V_{mn}(\zeta) = Y_{mn} e^{\lambda\zeta},$$

$$W_{mn}(\zeta) = Z_{mn} e^{\lambda\zeta} \quad (11)$$

ここで、 λ はパラメータであり、 X_{mn}, Y_{mn}, Z_{mn} は未定係数である。式(11)を式(9)に代入すれば、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{mn} \\ Y_{mn} \\ Z_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

ただし、

$$K_{11} = (\lambda^2 - g^2) - \frac{M^2}{(1-2\nu)}, \quad K_{22} = (\lambda^2 - g^2) - \frac{N^2}{(1-2\nu)},$$

$$K_{33} = (\lambda^2 - g^2) + \frac{\lambda^2}{(1-2\nu)}, \quad K_{12} = K_{21} = -\frac{MN}{(1-2\nu)},$$

$$K_{13} = \frac{M\lambda}{(1-2\nu)}, \quad K_{31} = -K_{13},$$

$$K_{23} = \frac{N\lambda}{(1-2\nu)}, \quad K_{32} = -K_{23} \quad (13)$$

である。従って、式(12)が自明でない解を持つための条件は、式(12)の係数行列の行列式が零になればよい。これから特性方程式が得られるので、これを解けば λ が求められる。故に、式(9)の一般解が次のように求められる。

$$U_{mn}(\zeta) = A_{mn} \left\{ \cosh(g\zeta) + \frac{M^2 \zeta \sinh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\} + B_{mn} \left\{ \sinh(g\zeta) + \frac{M^2 \zeta \cosh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\} + C_{mn} \left\{ \frac{MN\zeta \sinh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\} + D_{mn} \left\{ \frac{MN\zeta \cosh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\} - E_{mn} \left\{ \frac{Mg\zeta \cosh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\} - F_{mn} \left\{ \frac{Mg\zeta \sinh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\}$$

$$V_{mn}(\zeta) = A_{mn} \left\{ \frac{MN\zeta \sinh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\} + B_{mn} \left\{ \frac{MN\zeta \cosh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\} + C_{mn} \left\{ \cosh(g\zeta) + \frac{N^2 \zeta \sinh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\} + D_{mn} \left\{ \sinh(g\zeta) + \frac{N^2 \zeta \cosh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\} - E_{mn} \left\{ \frac{Ng\zeta \cosh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\} - F_{mn} \left\{ \frac{Ng\zeta \sinh(g\zeta)}{g(3-4\nu)} \right\}$$

$$W_{mn}(\zeta) = A_{mn} \left\{ \frac{M\zeta \cosh(g\zeta)}{(3-4\nu)} \right\} + B_{mn} \left\{ \frac{M\zeta \sinh(g\zeta)}{(3-4\nu)} \right\} + C_{mn} \left\{ \frac{N\zeta \cosh(g\zeta)}{(3-4\nu)} \right\} + D_{mn} \left\{ \frac{N\zeta \sinh(g\zeta)}{(3-4\nu)} \right\} + E_{mn} \left\{ \cosh(g\zeta) - \frac{g\zeta \sinh(g\zeta)}{(3-4\nu)} \right\} + F_{mn} \left\{ \sinh(g\zeta) - \frac{g\zeta \cosh(g\zeta)}{(3-4\nu)} \right\} \quad (14)$$

ここで、 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}, F_{mn}$ は、 m と n に依存する未定係数である。ここで、 Q_{mn} を Fourier 係数とし、分布荷重関数も級数展開すれば、

表-1 級数解と級数の重ね合わせの数 r の関係と解の精度比較： $\nu=0.3$

Φ	h/a	r	$wD/qa^4 \times 10^3$			σ_x/q		τ_z/q
			$\xi=\eta=0.5$			$\xi=\eta=0.5$		$\xi=0, \eta=0.5$
			Bottom ($\zeta=-0.5$)	Middle ($\zeta=0$)	Top ($\zeta=+0.5$)	Bottom ($\zeta=-0.5$)	Top ($\zeta=+0.5$)	Middle ($\zeta=0$)
1	0.01	50	-4.053	-4.054	-4.053	2865	-2865	-50.2
		100	-4.053	-4.054	-4.053	2865	-2865	-50.3
		150	-4.053	-4.054	-4.053	2865	-2865	-50.4
		200	-4.053	-4.054	-4.053	2865	-2865	-50.4
		MPT ⁽⁷⁾	-4.054	-4.054	-4.054	2865	-2865	-50.6
	0.1	50	-4.197	-4.237	-4.201	28.8	-28.9	-4.87
		100	-4.197	-4.237	-4.201	28.8	-28.9	-4.87
		150	-4.197	-4.237	-4.201	28.8	-28.9	-4.87
		MPT ⁽⁷⁾	-4.261	-4.261	-4.261	28.6	-28.6	-5.06
	0.5	50	-6.939	-8.453	-9.679	1.25	-1.44	-0.826
		100	-6.939	-8.453	-9.679	1.25	-1.44	-0.826
		150	-6.939	-8.453	-9.680	1.25	-1.44	-0.826
		200	-6.939	-8.453	-9.680	1.25	-1.44	-0.826
625	0.01	50	-1.506	-1.506	-1.506	924	-924	-26.2
		100	-1.506	-1.506	-1.506	924	-924	-26.3
		150	-1.506	-1.506	-1.506	924	-924	-26.3
		MPT ⁽⁷⁾	-1.506	-1.506	-1.506	924	-924	-26.4
	0.1	50	-1.514	-1.531	-1.522	8.87	-9.16	-2.43
		100	-1.514	-1.531	-1.522	8.87	-9.17	-2.43
		150	-1.514	-1.531	-1.522	8.87	-9.17	-2.43
		MPT ⁽⁷⁾	-1.519	-1.519	-1.519	8.89	-8.89	-2.58
	0.5	50	-1.264	-3.881	-6.016	0.287	-0.749	-0.445
		100	-1.264	-3.881	-6.017	0.287	-0.754	-0.445
		150	-1.264	-3.881	-6.017	0.287	-0.755	-0.445
		200	-1.264	-3.881	-6.017	0.287	-0.756	-0.445
		250	-1.264	-3.881	-6.017	0.287	-0.757	-0.445
		300	-1.264	-3.881	-6.017	0.287	-0.757	-0.445

$$q(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) \quad (15)$$

である。よって、式(6)及び式(7)を式(5)に代入して、板厚方向の境界条件を無次元化し、これに式(14)を代入すれば、6つの未定係数が、次のように求められる。

$$A_{mn} = C_{mn} \left(\frac{M}{N} \right), \quad B_{mn} = D_{mn} \left(\frac{M}{N} \right),$$

$$C_{mn} = \frac{-Q_{mn}N(-\gamma_2 \text{sh} + \text{gch})(g\Gamma_2 + K_w\gamma_1 \text{ch}^2)}{2Gg^2[-2g\Gamma_1\Gamma_2 - K_w\gamma_1\{g + 2\text{shch}(\text{sh}^2 + \text{ch}^2)\}]},$$

$$D_{mn} = C_{mn} \frac{(-\gamma_2 \text{ch} + \text{gsh})(g\Gamma_1 + K\gamma_1 \text{sh}^2)}{(-\gamma_2 \text{sh} + \text{gch})(g\Gamma_2 + K\gamma_1 \text{ch}^2)},$$

$$E_{mn} = D_{mn} \frac{g(\gamma_1 \text{ch} + \text{gsh})}{N(-\gamma_2 \text{ch} + \text{gsh})},$$

$$F_{mn} = C_{mn} \frac{g(\gamma_1 \text{sh} + \text{gch})}{N(-\gamma_2 \text{sh} + \text{gch})} \quad (16)$$

ただし、

$$\text{sh} = \sinh\left(\frac{g}{2}\right), \quad \text{ch} = \cosh\left(\frac{g}{2}\right),$$

$$\gamma_1 = 4(1-\nu), \quad \gamma_2 = 2(1-2\nu),$$

$$\Gamma_1 = 2\text{shch} + g, \quad \Gamma_2 = \text{shch} - g \quad (17)$$

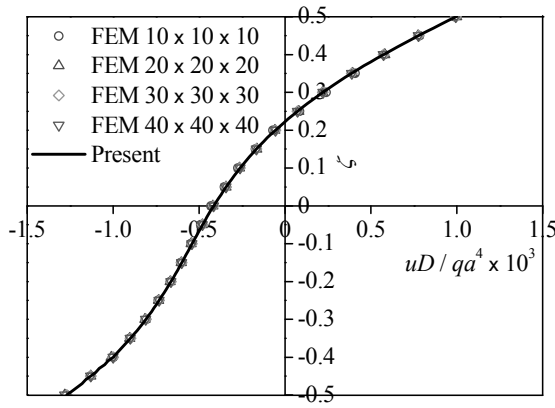
$$K_w = (1+\nu)k_w \left(\frac{h}{a} \right), \quad k_w = \frac{k_1 a}{E} \quad (18)$$

であり、 k_w は平板構造要素のヤング係数 E を基準とした時の無次元地盤反力係数である。

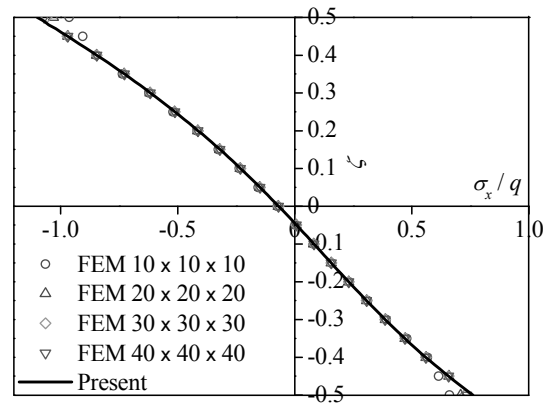
ここで、 $q(\xi, \eta) = q$ (等分布満載荷重)とした場合のFourier級数 Q_{mn} は、次のように求められる。

$$Q_{mn} = \frac{16q}{mn\pi^2} \quad \text{for } m, n = 1, 3, 5, \dots, \infty \quad (19)$$

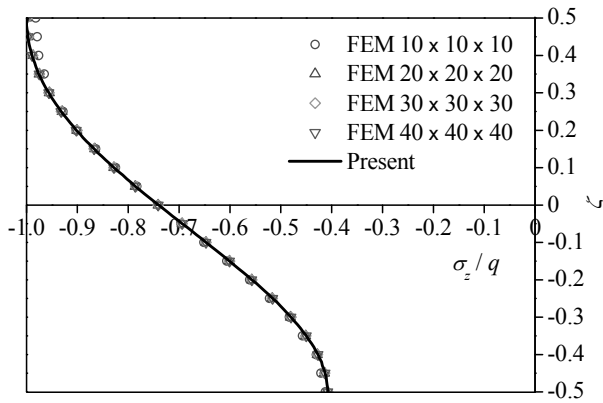
従って、式(16)を式(14)に代入し、式(7)及び式(8)の定義に基づけば変位成分が求められ、式(2)に基づけばひずみ成分を、式(3)に基づけば応力成分を求めることができる。



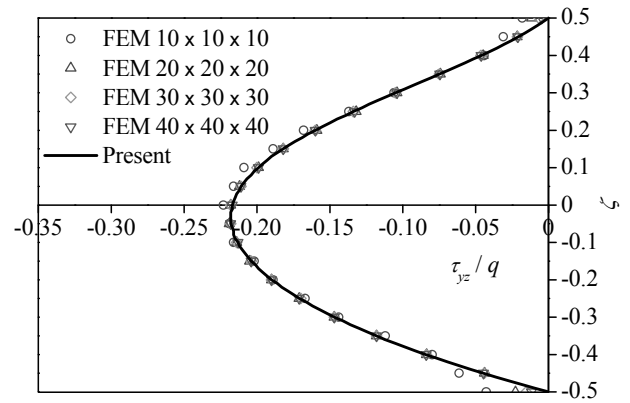
(a) $u(\xi=\eta=0.25)$



(b) $\sigma_x(\xi=\eta=0.5)$



(c) $\sigma_z(\xi=\eta=0.5)$



(b) $\tau_{yz}(\xi=\eta=0.25)$

図-2 級数解と3次元有限要素解との比較による解の精度比較: $\Phi=100, h/a=0.5, \nu=0.3, r=300$

3. 理論解析及び考察

ここでは、本論文で誘導した級数解を用いて、Winkler 基礎にある平板の3次元応力解析を実施し、弾性基礎にある平板の変位及び応力分布特性に与える平板厚及び弾性基礎の影響を明らかにする。まず、誘導した級数解と級数の展開項数との関係を調べ、理論解析に必要な級数項の数を決定し、級数解の妥当性について検討する。次に、Winkler 基礎にある平板の変位及び応力分布特性に与える平板厚と弾性基礎の影響について検討する。

本論文では、平板の厚さと平面形状を表す無次元パラメータをそれぞれ、板厚比 h/a 及び辺長比 b/a と定義する。また、本論文では、平板構造要素を対象としているので、平板の曲げ剛性 $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ を基準とした次式で表される無次元地盤反力係数 Φ を用いることとした。

$$\Phi = \frac{k_1 a^4}{D} \quad (20)$$

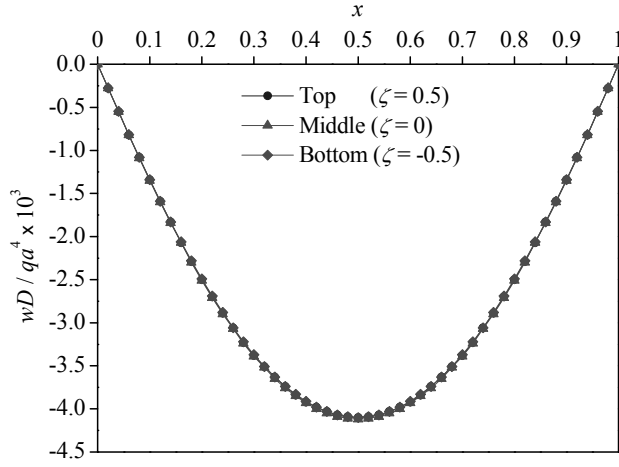
数値計算では、正方形平板($b/a=1$)を取り扱い、特に断りがない限り、コンクリート構造物を想定して、 $\nu=1/6$ を用いる。なお、数値計算は、32 bit の personal computer を用いた Fortran による倍精度計算で行った。さらに、本論文では、実用上十分な精度を確保することを念頭に置いて、変位成分は有効数字4桁で、応力成分は有効数字3桁で整理した。

3.1 級数解の収束性及び妥当性

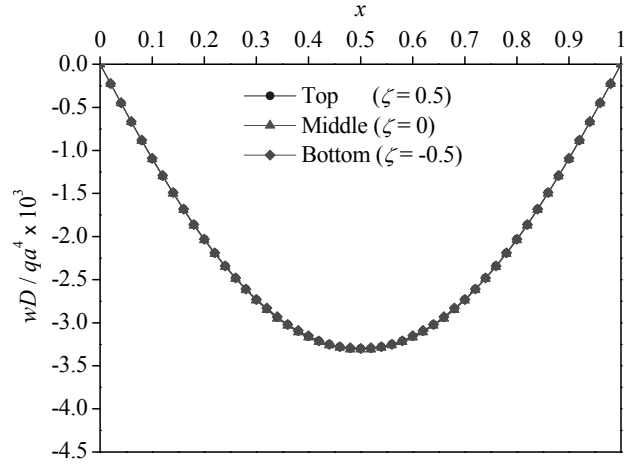
本論文で誘導した級数解は、式(7)及び式(8)の定義に基づいて変位成分が求められ、式(2)及び式(3)に基づいてひずみ成分及び応力成分が求められる。よって、式(8)から明らかにように無次元変位を求めるためには、無限級数和の計算が必要になる。しかしながら、数値計算では、無限大の数値を取り扱うことができないため、有限の級数の展開項数で解を評価しなければならない。すなわち、実際には、次式に基づいて無次元変位を計算しなければならない。

$$\begin{aligned} U &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^M \sum_{n=1,3,5,\dots}^N U_{mn}(\zeta) \cos(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) \\ V &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^M \sum_{n=1,3,5,\dots}^N V_{mn}(\zeta) \sin(m\pi\xi) \cos(n\pi\eta) \\ W &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^M \sum_{n=1,3,5,\dots}^N W_{mn}(\zeta) \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) \end{aligned} \quad (21)$$

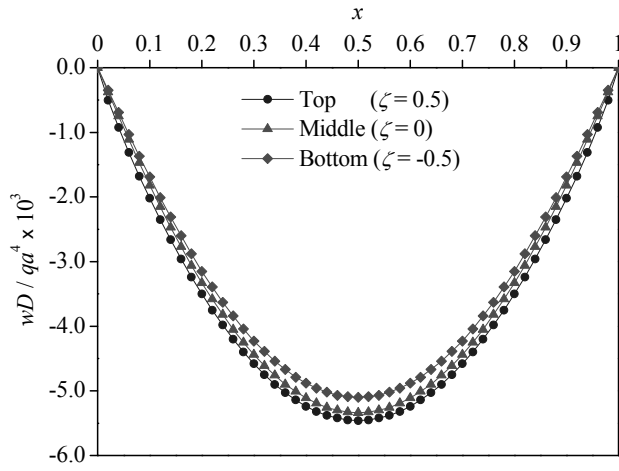
ここで、 M と N は、級数の展開項数である。しかしながら、無限級数和が必要となる級数解を用いた幾つかの研究報



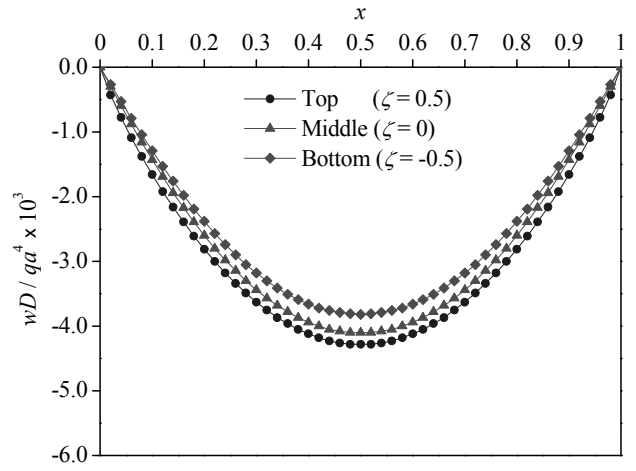
(a) $h/a=0.1, \Phi=10$



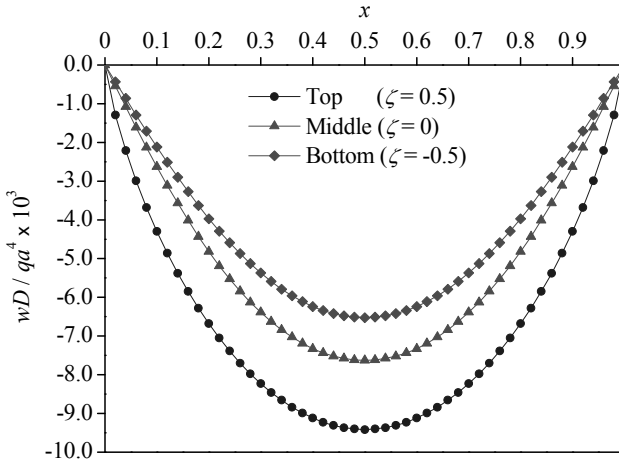
(b) $h/a=0.1, \Phi=100$



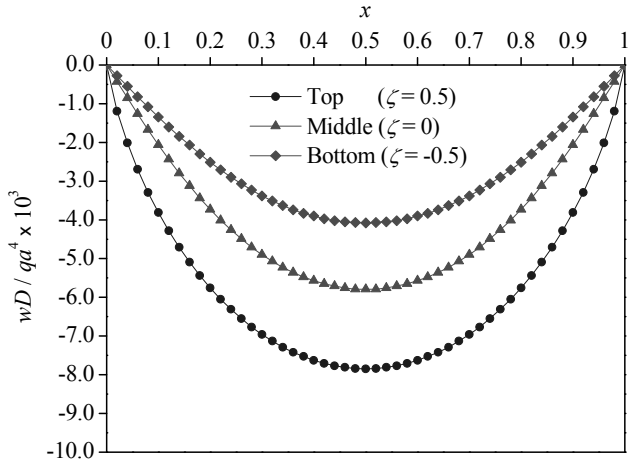
(c) $h/a=0.3, \Phi=10$



(d) $h/a=0.3, \Phi=100$



(e) $h/a=0.5, \Phi=10$



(f) $h/a=0.5, \Phi=100$

図-3 Winkler基礎上にある平板の ξ 軸方向の w 分布に与える h/a の影響と Φ との関係: $\nu=1/6, \eta=0.5$

告^{10) - 12)}では、級数の展開項数が明確でなく^{10), 11)}, また、ある1点のみに着目して級数の展開項数が決定されているもの¹²⁾もあり、級数の展開項数と解析精度についてはあまり言及されていないが、級数解を用いる場合には、級数の展開項数を決定した根拠を明確にしておく必要があると思われる。そこで、本論文では、級数の重ね合わせの数 r を

定義し、 r を入力として、次式に基づいて級数の展開項数 M と N を決定している。

$$M = N = 2r - 1 \quad (22)$$

理論解析を実施するにあたり、まず、薄肉平板から厚肉平板までの変位と応力を所要の解析精度を確保でき、かつ統一的に解析が実施できる r を調べ、数値計算に用いる r

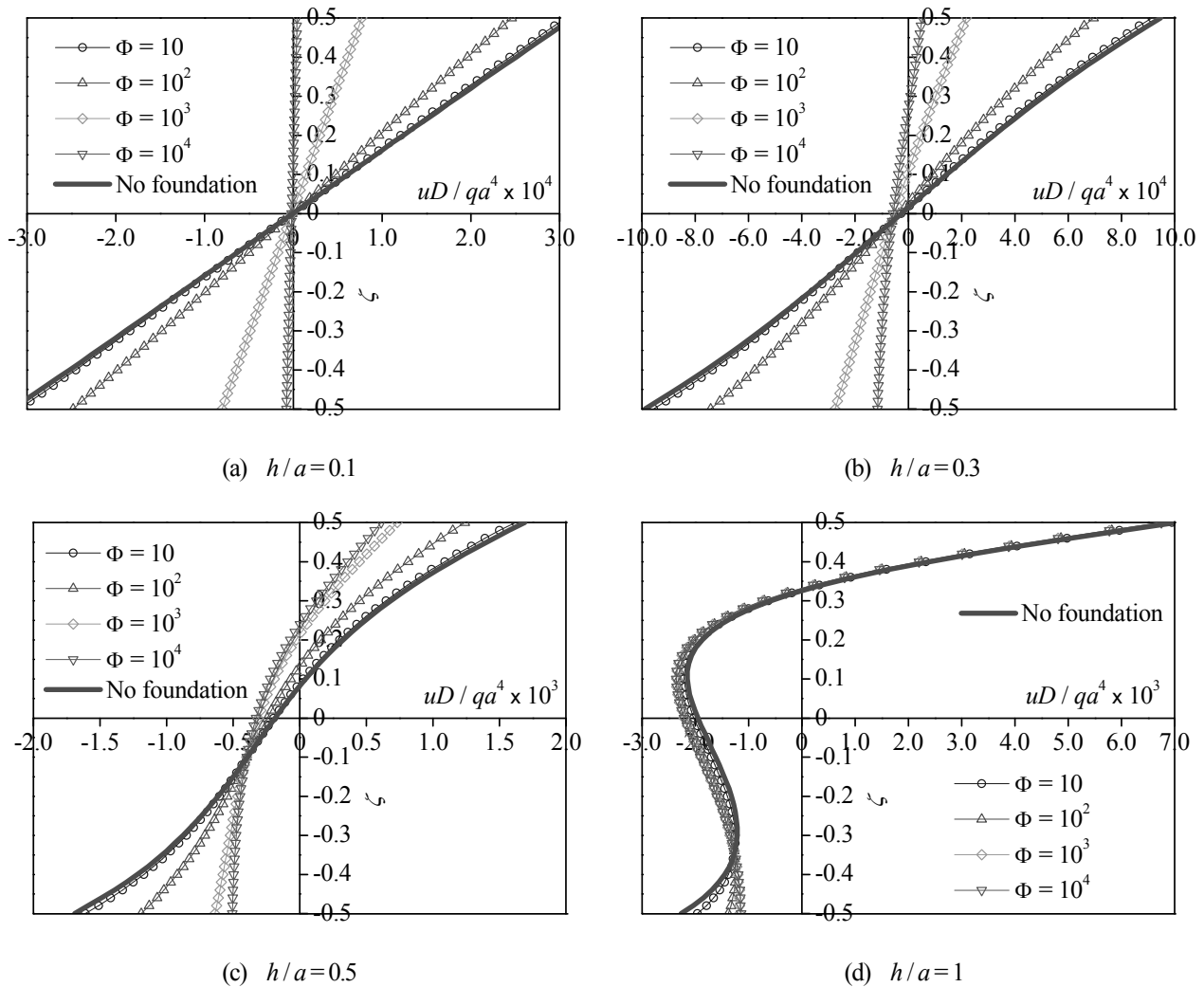


図-4 Winkler 基礎にある平板の ζ 軸方向の u 分布に与える h/a と Φ の影響: $\nu=1/6, \xi=\eta=0.25$

を決定する必要がある。ここで、 q も式(15)で表されるような無限級数で表されるため、まず、実際の等分布荷重を再現するために必要な級数の r を把握する必要があるが、 q は、 $\xi=0$ と $\xi=1$ において不連続となるためにGibbsの現象が生じ、 r を有限の値で大きくしても、実際の等分布荷重の形状と完全に一致しない。しかしながら、紙面の都合上、詳細は割愛するが、 $r=50$ 以上を採用すれば、 q の形状は不連続点で多少の振動を生じるものの、 q の合力は厳密値に対して誤差1%以下の良好な近似精度であることを確認している¹³⁾。よって、Winkler 基礎にある平板の変位及び応力の収束性は、 $r=50$ を基準として調べる。

表-1 には、級数解と級数の重ね合わせの数 r の関係と解の精度比較が示してある。ここで、 h/a の値は、0.01(薄肉)、0.1(中等厚肉)及び0.5(厚肉)に設定し、 r は、50から300まで変化させている。また、級数解の妥当性を確認するために、Kobayashi・Sonoda⁷⁾のMindlin 平板理論に基づく級数解(MPT)と解の比較を行う都合から、 Φ を1と625に、 ν を0.3に設定している。なお、面外変位 w に関しては下面($\zeta=-0.5$)、中央面($\zeta=0$)及び上面($\zeta=+0.5$)で、応力 σ_x に関しては下面($\zeta=-0.5$)と上面($\zeta=+0.5$)で、面外せん断応力 τ_{xz} は

中央面($\zeta=0$)に着目して、級数解の収束状態を調べた。

これより、 Φ と h/a の値及び着目位置に係わらず、 w 、 σ_x 及び τ_{xz} の値は、 r の増大に伴い、一定の値に収束している。ただし、 Φ と h/a の値が大きくなると、 $(-0.5 \leq \zeta \leq 0)$ の範囲では解の収束が早く、少ない r の数で有効数字6桁以上の収束解が得られるが、中央面から上面に向かう($0 < \zeta \leq 0.5$)の範囲では解の収束が遅くなることを確認している。しかしながら、実用上十分な精度を確保することを目的とすれば、 Φ と h/a の値に係わらず、 $r=300$ を採用すれば十分であることがわかる。また、得られた薄肉平板の w 、 σ_x 及び τ_{xz} の収束解をMPTの値⁷⁾と比較すると、 Φ の値に係わらず、良く一致しているが、中等厚肉平板では、 w 、 σ_x で最大誤差3%、 τ_{xz} で最大誤差6%を生じている。また、 $h/a=0.5$ では、MPT⁷⁾と解の比較することが理論の適用限界の問題から困難であると考えられるので、3次元有限要素法による数値解との比較を行う。

図-2 には、級数解と3次元有限要素解との比較が示してある。ここで、 $h/a=0.5$ 、 $\Phi=100$ 、 $\nu=0.3$ 、 $r=300$ に設定した。また、汎用有限要素解析コードAbaqus 6.8-2を用いて、8節点ソリッド要素(C3D8)¹⁴⁾による3次元有限要素解

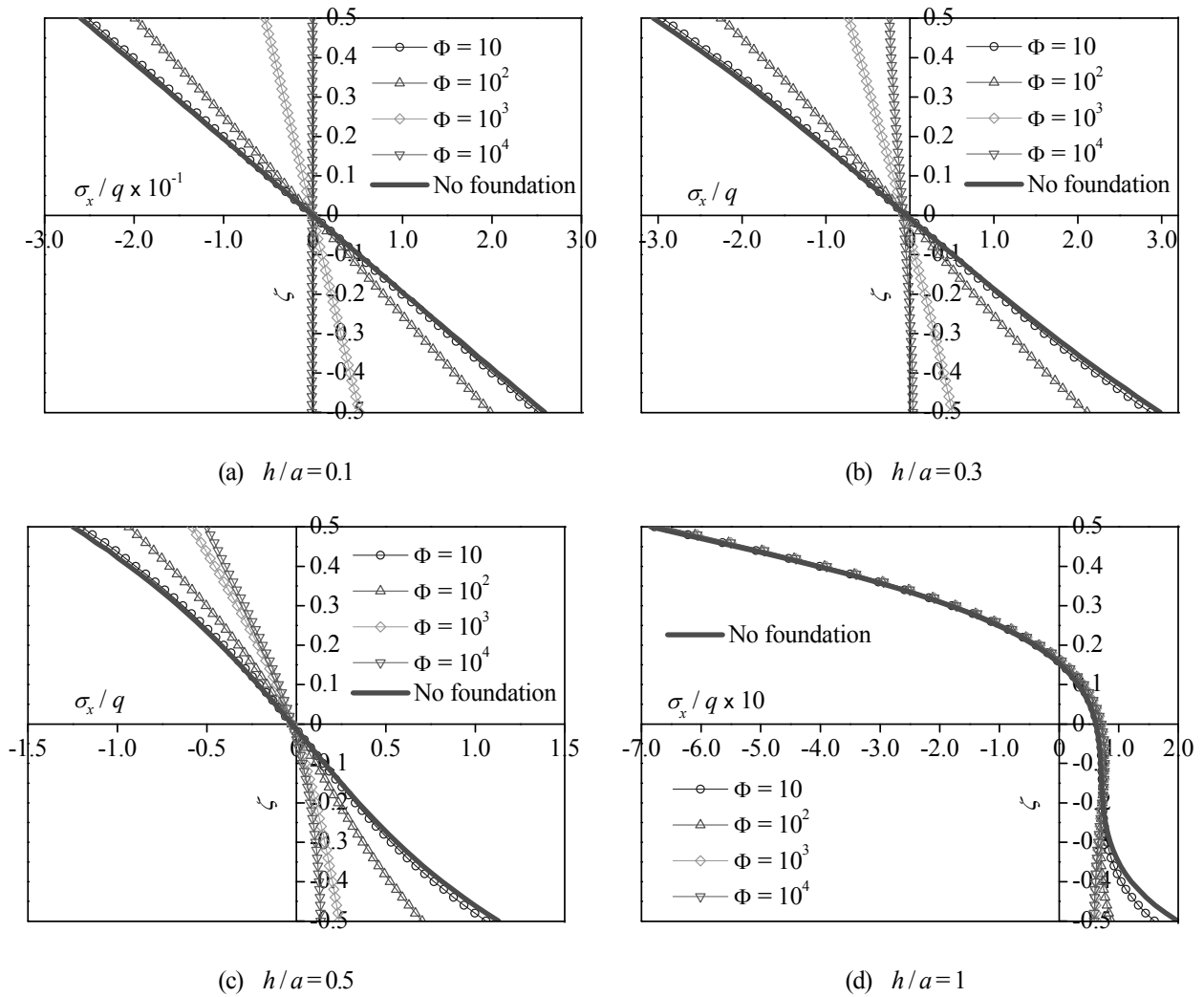


図-5 Winkler 基礎にある平板の ξ 軸方向の σ_x 分布に与える h/a と Φ の影響: $\nu=1/6, \xi=\eta=0.5$

析を実施した。参考までに、要素分割数は、 x, y, z 方向に $10 \times 10 \times 10$ から $40 \times 40 \times 40$ まで変化させている。

これより、有限要素解は、要素分割数の増大に伴い、一定の値に収束しており、その収束値は級数解によく一致している。しかしながら、8節点ソリッド要素では、応力場が不連続になるため、かなり密に要素分割しても平板の上面及び下面での面外せん断応力 τ_{xz} の力学的境界条件($\tau_{xz} = 0$)を満足した結果は得られていない。

以上より、本論文で誘導した級数解による w, σ_x 及び τ_{xz} の値は、 h/a と Φ の値に係わらず、ある一定の値に収束し、Mindlin 平板理論に基づく級数解に良く一致していることから判断すれば、本論文で誘導した級数解の妥当性が確認できよう。以後の数値計算では、 $r=300$ を統一して用いる。

3.2 Winkler 基礎にある平板の軸方向の面外変位分布に与える板厚比の影響と地盤反力係数との関係

ここでは、平板の上面、中央面及び下面に着目して、Winkler 基礎にある平板の軸方向の面外変位 w 分布に与

える板厚比 h/a の影響と無次元地盤反力係数 Φ との関係について検討する。

図-3 には、Winkler 基礎にある平板の上面、中央面及び下面における ξ 軸方向($\eta=0.5$)の w 分布に与える h/a の影響と Φ との関係が示してある。ここで、 h/a の値は、0.1、0.3 及び0.5 に設定し、 Φ の値は、10, 100 とした。

これより、 h/a と面の位置に係わらず、 Φ の値が大きくなると、平板下面での剛性が大きくなるため、 w の値は減少する。ここで、 $h/a=0.1$ における w 分布に着目すると、 w 分布に与える面の位置の相違は見られない。したがって、板厚方向に w が一定分布をするという平板理論での仮定が成立している。次に、 $h/a=0.3$ では、 w 分布に与える面の位置の相違が現れており、特に、Winkler 基礎と接触している平板下面での w の値が小さくなっている。最後に、 $h/a=0.5$ では、 w 分布に与える面の位置の相違が顕著に現れており、Winkler 基礎と接触する平板下面での w の値が最も小さく、等分布満載荷重と接触する平板上面での w の値が最も大きくなっている。これは、Mindlin 平板理論などでは考慮できない平板上面における荷重載荷及び平板下面で弾性基礎と接触するという局所的な影響による

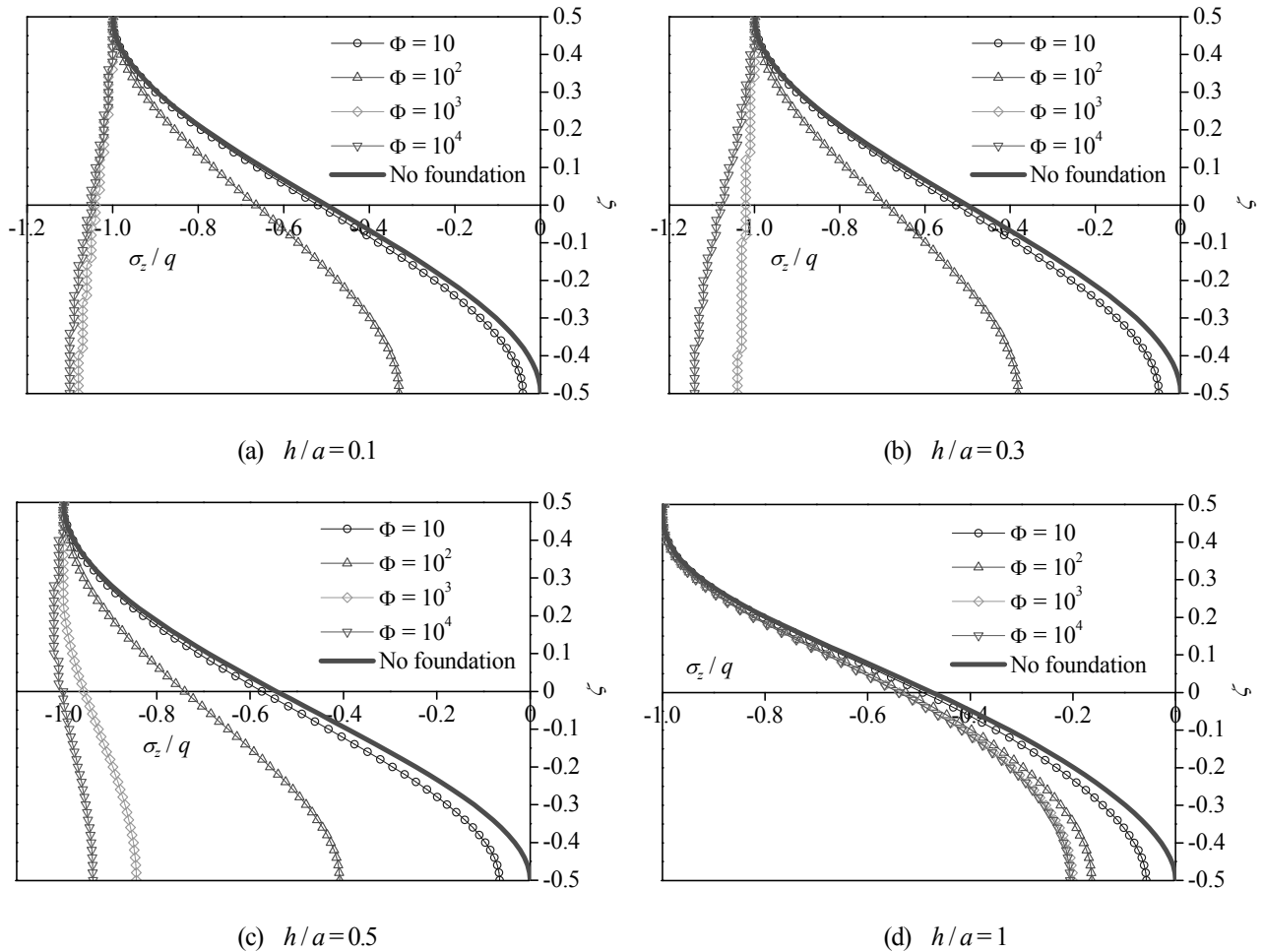


図-6 Winkler 基礎にある平板の ξ 軸方向の σ_z 分布に与える h/a と Φ の影響: $\nu=1/6, \xi=\eta=0.5$

ものであり、 Φ の値に係わらず、 h/a の増大に伴い、この影響が大きく現れてくる。

3.3 Winkler 基礎にある平板の板厚方向の面内変位分布に与える板厚比および地盤反力係数の影響

ここでは、Winkler 基礎にある平板の板厚方向の面内変位 u 分布に与える板厚比 h/a と無次元地盤反力係数 Φ の影響について検討する。

図-4 には、Winkler 基礎にある平板の偏心点($\xi = \eta = 0.25$)における ξ 軸方向の u 分布に与える h/a と Φ の影響が示してある。ここで、 h/a は0.1, 0.3, 0.5 及び1に設定し、 Φ を10 から 10^4 まで変化させている。また、参考までに、Winkler 基礎に接していない結果 $\Phi = 0$ (No foundation)も実線で示してある。

これより、 h/a に係わらず、 Φ の値が大きくなると、 u の値は減少する。式(5)より、Winkler 基礎は面外変位成分 w のみに影響するものであるが、面内変位成分 u にも弾性基礎の影響が大きく現れてくる。ここで、 $h/a=0.1$ における板厚方向の u 分布は、 Φ の値に係わらず、直線的であり、中央面を通過する逆対称分布である。しかしながら、 $h/a=0.3, 0.5$ における板厚方向の u 分布は、曲線的で、中央面に関して逆対称でなく(以下、非逆対称)、中央面を通過しな

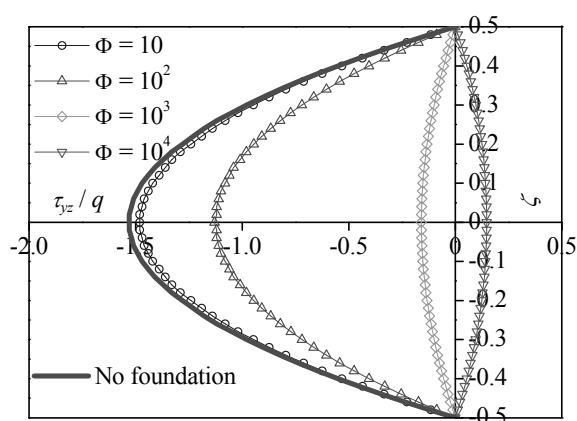
くなり、並進変位成分の影響が見られる。さらに、 $h/a=1$ における板厚方向の u 分布に与える Φ の影響は、平板下面付近にのみ見られ、下面から離れた領域では、 Φ の影響が見られない。これらは、 $\Phi = 0$ の結果を基準として考えれば、Mindlin 平板理論では考慮することができない荷重上面載荷の影響だと考えられる。

3.4 Winkler 基礎にある平板の板厚方向の応力分布に与える板厚比および地盤反力係数の影響

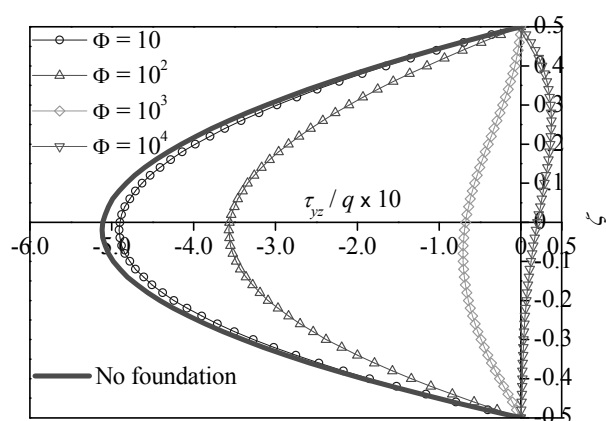
ここでは、Winkler 基礎にある平板の板厚方向の応力 σ_x と σ_z 分布に与える板厚比 h/a と無次元地盤反力係数 Φ の影響について整理する。

図-5 には、Winkler 基礎にある平板の中央点($\xi = \eta = 0.5$)における ξ 軸方向の σ_x 分布に与える h/a と Φ の影響が示してある。ここで、 h/a は0.1, 0.3, 0.5 及び1に設定し、 Φ を10 から 10^4 まで変化させている。また、参考までに、 $\Phi = 0$ (No foundation)の結果を実線で示している。

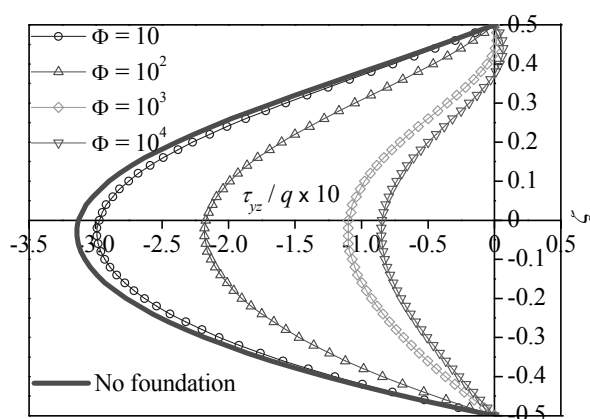
これより、板厚方向の u 分布と同様に、 h/a に係わらず、 Φ の値が大きくなると、弾性基礎の影響により変位量が小さくなるため、 σ_x の値は減少する。また、板厚方向の σ_x 分布性状は、板厚方向の u 分布と同様の傾向にある。したがって、Winkler 基礎にある厚肉平板の曲げ問題におい



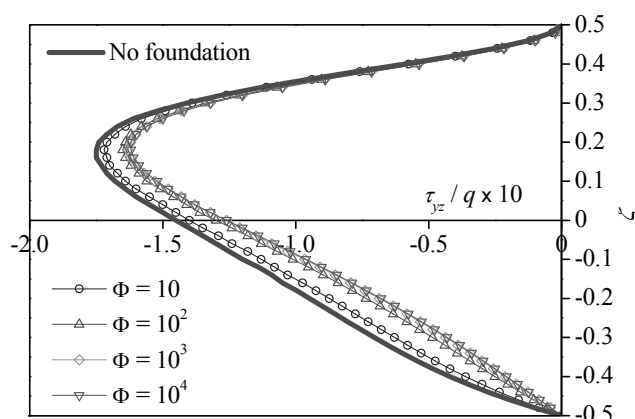
(a) $h/a=0.1$



(b) $h/a=0.3$



(c) $h/a=0.5$



(d) $h/a=1$

図-7 Winkler 基礎にある平板の ζ 軸方向の τ_{yz} 分布に与える h/a と Φ の影響： $\nu=1/6$, $\xi=\eta=0.25$

表-2 $\tau_{yz}/\sigma_{x,\max}$ の値に与える h/a と Φ の影響： $\nu=1/6$, $\xi=\eta=0.25$

ζ	$\tau_{yz}/\sigma_{x,\max}$															
	$\Phi(h/a=0.1)$				$\Phi(h/a=0.3)$				$\Phi(h/a=0.5)$				$\Phi(h/a=1)$			
	0	10	10^2	10^3	0	10	10^2	10^3	0	10	10^2	10^3	0	10	10^2	10^3
-0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.40	0.03	0.03	0.03	0.01	0.10	0.10	0.08	0.03	0.13	0.13	0.10	0.06	0.06	0.05	0.04	0.03
-0.30	0.06	0.06	0.06	0.02	0.17	0.17	0.15	0.06	0.22	0.22	0.18	0.11	0.11	0.09	0.07	0.07
-0.20	0.08	0.08	0.07	0.02	0.22	0.22	0.20	0.08	0.29	0.28	0.23	0.15	0.14	0.13	0.11	0.10
-0.10	0.09	0.09	0.08	0.03	0.25	0.25	0.22	0.09	0.32	0.31	0.26	0.17	0.18	0.17	0.15	0.15
0.00	0.10	0.09	0.09	0.03	0.26	0.25	0.23	0.09	0.32	0.32	0.27	0.17	0.22	0.21	0.20	0.19
0.10	0.09	0.09	0.08	0.03	0.24	0.24	0.21	0.07	0.30	0.29	0.25	0.15	0.25	0.25	0.24	0.23
0.20	0.08	0.08	0.07	0.02	0.21	0.21	0.18	0.05	0.25	0.24	0.20	0.11	0.26	0.26	0.25	0.25
0.30	0.06	0.06	0.06	0.02	0.16	0.15	0.13	0.03	0.17	0.17	0.13	0.06	0.21	0.21	0.20	0.20
0.40	0.03	0.03	0.03	0.01	0.09	0.09	0.07	0.01	0.08	0.08	0.06	0.01	0.09	0.09	0.08	0.08
0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

では、Mindlin 平板理論では考慮することができない荷重上面載荷及び下面での地盤接触の局所的な影響が大きく現れ、板厚方向の変位及び応力分布は、曲線的かつ非逆対称になり、中央面を通過しなくなる。また、この分布性状は、古典薄肉平板理論や Mindlin 平板理論では再現できないため、弾性基礎にある厚肉平板の構造解析には、3次元弾性論を用いる必要があると言えよう。

図-6 には、Winkler 基礎にある平板の中央点における

ζ 軸方向の σ_x 分布に与える h/a と Φ の影響が示してある。ここで、解析パラメータは、図-5と同様である。

これより、 h/a に係わらず、 Φ の増大に伴い、平板下面での σ_x の値は大きくなる。また、 $h/a=0.1$ 及び $h/a=0.3$ なる平板では、 $\Phi_1 \geq 10^3$ になると、平板上面に作用している等分布荷重よりも大きな値の σ_x が Winkler 基礎と接触している平板下面で生じている。これは、 Φ を式(20)で仮定しているために、 Φ と h/a の値が大きくなると k_1 の値が大

表-3 Winkler 基礎上にある周面単純支持された厚肉平板の $u, w, \sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ の値 : $b/a=1, \Phi=100, \nu=0.3, r=300$

h/a	ζ	$\xi=\eta=0.25$ $uD/qa^4 \times 10^4$	$\xi=\eta=0.5$ $wD/qa^4 \times 10^3$	$\xi=\eta=0.5$ $\sigma_x/q = \sigma_y/q$	$\xi=\eta=0.5$ σ_z/q	$\xi=\eta=0.25$ $\tau_{xz}/q = \tau_{zx}/q$
0.3	-0.5	-7.582	-3.817	2.33	-0.382	0
	-0.4	-5.939	-3.938	1.80	-0.399	-0.134
	-0.3	-4.480	-4.038	1.30	-0.445	-0.238
	-0.2	-3.154	-4.120	0.821	-0.515	-0.309
	-0.1	-1.912	-4.188	0.359	-0.599	-0.348
	0	-0.7014	-4.241	-0.0970	-0.691	-0.356
	0.1	0.5249	-4.282	-0.554	-0.784	-0.334
	0.2	1.812	-4.308	-1.02	-0.868	-0.284
	0.3	3.201	-4.319	-1.51	-0.937	-0.210
	0.4	4.729	-4.312	-2.02	-0.983	-0.115
	0.5	6.429	-4.284	-2.56	-0.998	0
0.5	-0.5	-12.74	-4.079	0.761	-0.408	0
	-0.4	-10.04	-4.542	0.559	-0.427	-0.0842
	-0.3	-8.093	-4.962	0.386	-0.480	-0.147
	-0.2	-6.633	-5.363	0.230	-0.557	-0.190
	-0.1	-5.400	-5.761	0.0817	-0.647	-0.213
	0	-4.142	-6.160	-0.0692	-0.740	-0.217
	0.1	-2.608	-6.558	-0.232	-0.828	-0.199
	0.2	-0.5583	-6.944	-0.413	-0.902	-0.160
	0.3	2.197	-7.301	-0.617	-0.956	-0.105
	0.4	5.734	-7.608	-0.846	-0.989	-0.0461
	0.5	9.955	-7.845	-1.10	-0.998	0

きくなることが原因である。ただし、 $h/a=1$ の場合には、平板下面で面外変位をほとんど生じないため、平板下面で生じる σ_z の値は小さくなっている。よって、板厚方向の σ_z 分布は、 Φ の影響、即ち、弾性基礎の影響を大きく受ける。

さて、ここで、図-5 の σ_x と図-6 の σ_z の平板上面における応力の値を比較してみよう。まず、 $h/a=0.1$ では、 σ_z の値よりも σ_x の値の方がかなり大きい。しかし、 $h/a=0.3$ における σ_z と σ_x の値の比 σ_z/σ_x は $0.2 \leq \sigma_z/\sigma_x \leq 3$ 、 $h/a=0.5$ では $0.5 \leq \sigma_z/\sigma_x \leq 1$ 、 $h/a=1$ では $\sigma_z/\sigma_x \leq 0.7$ であり、 h/a が大きくなると、 σ_z の影響が大きくなっていく。したがって、Winkler 基礎の有無に係わらず、厚肉平板の曲げ問題においては、 σ_z の影響が無視できなくなるため、3次元弾性論を用いる必要がある。

3.5 Winkler 基礎上にある平板の板厚方向の面外せん断応力分布に与える板厚比および地盤反力係数の影響

最後に、Winkler 基礎上にある平板の板厚方向の面外せん断応力 τ_{xz} 分布に与える板厚比 h/a と無次元地盤反力係数 Φ の影響について検討する。

図-7 には、Winkler 基礎上にある平板の偏心点 ($\xi = \eta = 0.25$) における ζ 軸方向の τ_{xz} 分布に与える h/a と Φ の影響が示してある。ここで、 h/a は 0.1, 0.3, 0.5 及び 1 に設定し、 Φ を 10 から 10^4 まで変化させている。また、参考までに、 $\Phi=0$ (No foundation) の結果も示してある。

これより、 h/a に係わらず、 Φ の増大に伴い、 τ_{xz} の値は小さくなるが、 $\Phi=10^4$ の場合の $h/a=0.1$ 及び $h/a=0.3$ なる平板では、正の符号の τ_{xz} が生じている。しかしながら、その値は σ_x に比して小さい。また、 Φ に係わらず、板厚方

向の τ_{xz} 分布は放物線形状であるが、 h/a の増大に伴い、 $h/a=0.3$ 及び $h/a=0.5$ なる平板では最大 τ_{xz} の発生位置が中央面から下方に偏心している。これは、荷重上面載荷の影響によるものだと考えられる。他方、 $h/a=1$ では、最大 τ_{xz} の発生位置が中央面からかなり上方に偏心しているが、板厚方向の τ_{xz} 分布に与える平板下面での Winkler 基礎との局所的な接触の影響はあまり見られず、多少の差異はあるが $\Phi=0$ とほぼ類似した分布性状を示している。ここで、 τ_{xz} の値と最大圧縮応力 $\sigma_{x, \max}$ の値との比を取り、面外せん断変形の影響について検討してみる。 $\tau_{xz}/\sigma_{x, \max}$ の値に与える h/a と Φ の影響を表-2 に示す。これより、 $h/a=0.1$ における $\tau_{xz}/\sigma_{x, \max}$ の値は、 ζ 座標値と Φ に係わらず、非常に小さい。しかしながら、 $h/a=0.3$ 及び $h/a=0.5$ における $\tau_{xz}/\sigma_{x, \max}$ の値は、おおよそ 0.2 から 0.3 程度であり、 $h/a=0.1$ の結果と比較すると、 τ_{xz} の割合が大きくなっており、面外せん断変形の影響が現れていることが確認できる。しかし、 $\Phi=10^3$ の場合は、Winkler 基礎の剛性が大きくなるので、面外せん断変形を生じにくくなる。また、 $h/a=1$ における $\tau_{xz}/\sigma_{x, \max}$ の値は、 Φ に係わらず、0.1 から 0.2 程度であり、これも面外せん断変形の影響が現れている。

4. あとがき

本論文では、Winkler 基礎上にある周面単純支持された平板の変位及び応力分布特性を明らかにすることを目的とし、まず、Winkler 基礎上にある面外荷重を受ける直方弾性体の級数解を誘導し、その妥当性について検討を行った。また、誘導した級数解を用いて、Winkler 基礎上にあ

る平板の3次元応力解析を実施し、弾性基礎にある正方形平板の変位及び応力分布特性に与える板厚比 h/a 及び無次元地盤反力係数 Φ の影響について明らかにした。

本論文で得られた結果を纏めれば、以下の通りである。

- (1) 本論文で誘導した級数解による変位及び応力は、 h/a と Φ の値に係わらず、ある一定の値に収束し、その収束値の妥当性は十分にある。
- (2) $r=300$ を用いれば、Winkler 基礎にある薄肉から厚肉平板までの変位及び応力成分の実用上十分な精度(有効数字3桁程度)を確保することができる。
- (3) Winkler 基礎にある厚肉平板の曲げ問題では、荷重上面載荷及び下面での地盤接触の局所的な影響が大きく現れ、板厚方向の変位及び応力分布は、曲線的かつ非対称になり、中央面を通過しなくなる。また、この分布性状は、Mindlin 平板理論では再現できないため、弾性基礎にある厚肉平板の構造解析には、3次元弾性論を用いる必要がある。
- (4) Winkler 基礎の有無に係わらず、厚肉平板の曲げ問題においては、 h/a の増大に伴い、面外せん断変形の影響が現れ、また、 σ_z の影響が無視できなくなる。

最後に、Winkler 基礎にある厚肉平板の $u, w, \sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ の値を表-3 に示した。本論文で示した変位及び応力の値は、有限要素解や他の数値解析法による数値解のベンチマークテストに比べて頂ければ幸いである。今後、Winkler 基礎にある固定面や自由面を有する平板の静力学的特性と弾性基礎にある平板の曲げ問題における Mindlin 平板理論の適用範囲を明らかにしていく予定である。

謝辞

本研究は、第一著者が九州建設弘済会の助成を受けて行われました。ここに記して、関係者各位に感謝致します。

参考文献

- 1) Reissner, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, Trans. ASME J. Appl. Mech. Vol.12, pp.69-77, 1945.
- 2) Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear flexural motion of isotropic, elastic plates, Trans. ASME J. Appl. Mech. Vol.18, pp.31-38, 1951.

- 3) Svec, O.J.: Thick plates on an elastic foundation by finite elements, Trans. ASCE J. Eng. Mech. Div. Vol.102, pp.461-477, 1956.
- 4) Frederick, D.: Thick rectangular plates on an elastic foundation, Trans. ASCE J. Eng. Mech. Vol.122, pp.1069-1085, 1957.
- 5) Voyiadjis, G.Z. and Baluch, M.H.: Thick plates on an elastic foundation: one variable formulation, Trans. ASCE J. Eng. Mech. Vol.105, pp.1041-1045, 1979.
- 6) Voyiadjis, G.Z. and Kattan, P.I.: Thick rectangular plates on an elastic foundation, Trans. ASCE J. Eng. Mech. Vol.112, pp.1218-1240, 1986.
- 7) Kobayashi, H. and Sonoda, K.: Rectangular Mindlin plates on elastic foundations, Int. J. Mech. Sci. Vol.31, pp.679-692, 1989.
- 8) Liew, K.M., Han, J.-B., Xiao, Z.M. and Du, H.: Differential quadrature method for Mindlin plates on Winkler foundations, Int. J. Mech. Sci. Vol.38, pp.405-421, 1996.
- 9) Liu, F.-L.: Rectangular thick plates on Winkler foundation: differential quadrature element solution, Int. J. Solids Struct. Vol.37, pp.1743-1763, 2000.
- 10) Srinivas, S., Akella Kameswara Rao, and Joga Rao, C.V.: Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated rectangular plates, ZAMM Vol.49, pp.449-458, 1969.
- 11) 渡辺力, 林正: 一次せん断変形理論に基づいた二重曲率シェルの正確な級数解, 構造工学論文集, Vol.54A, pp.1-10, 2008.
- 12) 末武義崇, 大須賀淳, 友田富雄: Lagrange 多項式に基づく三次元弾性問題の EFGM 解析, 応用力学論文集, Vol.6, pp.257-266, 2003.
- 13) 多田裕治, 名木野晴暢, 末武義崇, 水澤富作, 三上隆: Pasternak 基礎にある直方弾性体の板厚方向に厳密な級数解の誘導と Reissner-Mindlin 平板の適用限界について, 平成20年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集, pp.155-156, 2009.
- 14) Abaqus Analysis User's Manual: Vol.IV Elements Version 6.8, Dassault Systemes Simulia, ABAQUS Inc., 2008.

(2009年4月9日 受付)