

領域積分方程式を用いた半無限弾性波動場の 散乱解析についてのいくつかの考察

Analysis of scattered elastic waves in a half space by means of the volume integral Equation method.

東平光生*・高岸智紘**・和嶋泰亮***

Terumi TOUHEI, Tomohiro TAKAGISHI and Yasuaki WAJIMA

*正会員 工博 東京理科大学教授 理工学部 土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

**学生会員 東京理科大学大学院 理工学研究科土木工学専攻 修士課程 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

***学生会員東京理科大学大学院 理工学研究科土木工学専攻 修士課程 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

Analysis of scattered elastic waves in a half space by means of the volume integral equation is dealt with in this paper. The generalized Fourier transform and the Krylov subspace iteration technique are applied to the volume integral equation. A fast method is developed for the calculation of the generalized Fourier transform by decomposing the transform into the Laplace, Fourier sine and cosine transforms to which the fast algorithms are employed. The verification of the present method is carried out by the comparison of the numerical results with standard Born approximations. The numerical results of the fast method for the volume integral equation are found to show good agreements with the Born approximation. The reduction of the CPU time due to the fast method is 1/10 when compared to the conventional volume integral equation method. In addition, the fast method also improves the accuracy of the calculations of scattered wave field.

Key Words : volume integral equation, elastic half space, fast method, Generalized Fourier transform, Born approximation

1. はじめに

弾性波動方程式の数値的に解くことで、散乱波動場を決定することは、地震工学や非破壊検査などの分野で重要な課題である。弾性波動方程式の数値解法としての積分方程式法は1980年代ごろより境界積分方程式を中心に活発に行われてきたことは周知の事実である。しかしながら、不均質波動場の解析手法としての領域積分方程式法の研究はいくつかの事例¹⁾²⁾を除き活発に行われてきたとはいえない。この理由として、領域積分方程式をスタンダードな手法で離散化すると、大規模な密行列が生成され、近年の高速計算機によっても、計算が困難となること、半無限波動場などの解析においては、境界条件の処理が複雑になることなどが挙げられる。それにも関わらず、領域積分方程式は、媒質の不均質性と散乱波動場を直接結びつける数学的利点を有しており、量子論などでは有力なツールとなっている³⁾。したがって、弾性波動論の分野でも領域積分方程式の利点を生かした数値解析手法の確立が望まれる。

こうした背景の中で、著者らの研究グループでは、一連の研究で領域積分方程式の解析手法を示してきた⁴⁾⁵⁾⁶⁾。そこでは、領域積分方程式に対してFourier変換⁷⁾⁸⁾とKrylov部分空間反復解法⁹⁾を組み合わせた解法を提示し、係数行列の導出を不要としている。特に、全無限弾性波動場の解析ではFFTアルゴリズムの導入によって、領域積分方程式の高速解法が、限られた条件

ではあるが散乱逆解析も含めて、短時間で精度良く行えることを実証している⁴⁾。また、半無限弾性波動場の解析においては、通常のFourier積分変換の代わりに、自由表面の境界条件を考慮した一般化Fourier変換を導入することで、半無限波動場の領域積分方程式の解析を可能としている。この一般化Fourier変換の数学的な特徴づけは演算子のスペクトル理論⁷⁾によってなされ、理論上の妥当性は前論文にて説明されている⁶⁾。しかしながら、提示された領域積分方程式の手法による数値解析結果と他の手法による結果の比較、一般化Fourier変換で必要となる膨大な演算時間の短縮の問題は今後の課題として残されている。

以上の背景の下で、本論文では、まず一般化Fourier変換の演算時間の短縮の問題の解決のために高速変換アルゴリズムの構築の可能性について論じる。そして、高速変換アルゴリズムを用いて得た積分方程式の解析結果をBorn近似¹⁰⁾¹¹⁾と比較することで解析手法の妥当性を考察する。これらの目的から本論文では領域積分方程式法の定式化を概観することから議論を始める。

2. 領域積分方程式による半無限弾性波動場解析手法の概要

2.1 領域積分方程式

図-1に示すように点震源からの波動を半無限弾性波動場中の不均質領域に照射する問題を考える。ここで

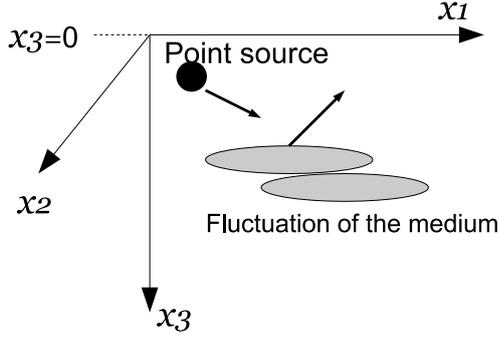


図-1 本論文で扱う問題

は半無限波動場の自由表面を $x_3 = 0$ で表す。媒質の不均質性は次のように Lamé 定数の変動で記述されるものとする。

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= \lambda_b + \tilde{\lambda}(x) \\ \mu(x) &= \mu_b + \tilde{\mu}(x), \quad (x \in \mathbb{R}^3)\end{aligned}\quad (1)$$

ここに、 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ は 3 次元空間の点で添字により座標成分を表す。また、 λ_b および μ_b は Lamé 定数の一定の部分でここではバックグラウンドの Lamé 定数と呼ぶ。これに対し、 $\tilde{\lambda}$ および $\tilde{\mu}$ は Lamé 定数の変動部分であり、ここでは媒質の揺らぎと呼ぶこともある。これらの地中の媒質の揺らぎは地表面まで到達しないものと仮定する。場の時間因子を $\exp(-i\omega t)$ とし、不均質媒質の場の方程式として次式を用いる。

$$\begin{aligned}L_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3)u_j(x) \\ = -q_i\delta(x - x_s) + N_{ij}(x)u_j(x)\end{aligned}\quad (2)$$

ここに、 L_{ij} はバックグラウンドの Lamé 定数から構成される演算子、 N_{ij} は媒質の不均質性に関連して現れる演算子、 u_j は変位場、 q_i は加振力ベクトルの成分、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数、 \vec{x}_s は加振力の作用位置である。 L_{ij} および N_{ij} の具体的な形は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}L_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3) \\ = (\lambda_b + \mu_b)\partial_i\partial_j + \mu_b\delta_{ij}\partial_k\partial_k + \delta_{ij}\rho\omega^2\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}N_{ij}(x) &= -\left(\tilde{\lambda}(x) + \tilde{\mu}(x)\right)\partial_i\partial_j - \delta_{ij}\tilde{\mu}(x)\partial_k\partial_k \\ &\quad - \partial_i\tilde{\lambda}(\vec{x})\partial_j - \delta_{ij}\partial_k\tilde{\mu}(\vec{x})\partial_k - \partial_j\tilde{\mu}(\vec{x})\partial_i\end{aligned}\quad (4)$$

ただし、式 (3)、(4) において δ_{ij} は Kronecker のデルタ、 ρ は質量密度、 ∂_i は座標成分 i に関する偏微分の演算子である。式 (2)、(3) および (4) に示すように、以降の議論でも繰り返し現れる添字に関しては総和規約を用いることにする。場の方程式に付随して、自由表面の境界条件は次式で与えられる。

$$P_{ij}u_j(x) = 0, \quad (x \in S \setminus \{x_s\})\quad (5)$$

ここに、 S は自由表面

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 0\}\quad (6)$$

P_{ij} は次式で示される微分演算子

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} \mu\partial_3 & 0 & \mu\partial_1 \\ 0 & \mu\partial_3 & \mu\partial_2 \\ \lambda\partial_1 & \lambda\partial_2 & (\lambda + 2\mu)\partial_3 \end{bmatrix}\quad (7)$$

式 (7) に示すように、演算子 P_{ij} を行列表現する場合には $[P_{ij}]$ と表記する。その他の演算子についても同様である。また、 L_{ij} および N_{ij} も微分演算子であるが、以降の議論を円滑に行うため、 L_{ij} に関しては、 $L_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ の表記を、 N_{jk} に関しては空間座標に依存することから $N_{jk}(\vec{x})$ の表記を行うことにする。

ここで与えた偏微分方程式の境界値問題の解は次の領域積分方程式で表現することが可能である。

$$\begin{aligned}u_i(x) &= g_{ij}(x, x_s)q_j \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}_+^3} g_{ij}(x, y)N_{jk}(y)u_k(y)dy\end{aligned}\quad (8)$$

ここに g_{ij} は半無限均質弾性波動場の Green 関数で次の方程式と境界条件を満足する。

$$L_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3)g_{jk}(x, y) = -\delta_{ik}\delta(\vec{x} - \vec{y})\quad (9)$$

$$P_{(b)ij}g_{jk}(x, y) = 0, \quad (\vec{x} \in S)\quad (10)$$

ただし、 $P_{(b)ij}$ は次式で定義される演算子である。

$$[P_{(b)ij}] = \begin{bmatrix} \mu_b\partial_3 & 0 & \mu_b\partial_1 \\ 0 & \mu_b\partial_3 & \mu_b\partial_2 \\ \lambda_b\partial_1 & \lambda_b\partial_2 & (\lambda_b + 2\mu_b)\partial_3 \end{bmatrix}\quad (11)$$

2.2 一般化 Fourier 変換を用いた領域積分方程式の解法

式 (8) の積分方程式を散乱波 $v_i(x) = u_i(x) - g_{ij}(x, x_s)q_j$ に関するものを書き換えると次式を得る。

$$\begin{aligned}v_i(x) &= - \int_{\mathbb{R}_+^3} g_{ij}(x, y)N_{jk}(y)u_k^{(I)}(y)dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}_+^3} g_{ij}(x, y)N_{jk}(y)v_k(y)dy\end{aligned}\quad (12)$$

ここに、 $u_i^{(I)}$ は入射波動場で

$$u_i^{(I)}(x) = g_{ij}(x, x_s)q_j\quad (13)$$

である。さらにこの積分方程式に、前論文⁶⁾で示した一般化 Fourier 変換を施すことで次式を得る。

$$\begin{aligned}\hat{v}_i(\xi) &= -\hat{h}(\xi)\mathcal{U}_{ij}N_{jk}\mathcal{U}_{kl}^{-1}\hat{u}_l^{(I)}(\xi) \\ &\quad -\hat{h}(\xi)\mathcal{U}_{ij}N_{jk}\mathcal{U}_{kl}^{-1}\hat{v}_l(\xi), \\ &\quad (\xi \in \sigma_p \cup \sigma_c \subset \mathbb{R}_+^3)\end{aligned}\quad (14)$$

ここに、 \mathcal{U}_{ij} 、 \mathcal{U}_{ij}^{-1} は一般化 Fourier 変換および逆変換の演算子、 σ_p 、 σ_c は波数空間における表面波および

実体波の存在領域、 \hat{v}_i および $\hat{u}_i^{(I)}$ はそれぞれ v_i および $u_i^{(I)}$ の一般化 Fourier 変換を表す。式 (14) の右辺の $\mathcal{U}_{kl}^{-1}\hat{u}_l^{(I)}$ はもちろん $u_k^{(I)}$ である。しかしながら、実際の数値計算においては入射波は $\mathcal{U}_{kl}^{-1}\hat{u}_l^{(I)}$ を用いて計算する。このため、波数領域の積分方程式の入射波の表現として、式 (14) を用いる。また、 $\hat{h}(\xi)$ は Green 関数の一般化 Fourier 変換で次式で示される。

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1(\xi_1)1(\xi_2)}{\mu_b\xi_3^2 - \rho\omega^2 - i\epsilon} \quad (15)$$

である。ただし、 $1(\cdot) = 1$ であり、恒等的に 1 となる関数を表す。ここに、 ϵ は無限小の正数である。

また、一般化 Fourier 変換および逆変換の具体的な形は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_{ij}u_j)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_+^3} \Lambda_{ji}^*(\xi, x)u_j(x)dx \quad (16) \\ (\mathcal{U}_{ij}^{-1}\hat{u}_j)(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{\xi \in \sigma_p} \Lambda_{ij}(\xi, x)\hat{u}_j(\xi)d\xi_1d\xi_2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\xi_r}^{\infty} \Lambda_{ij}(\xi, x)\hat{u}_j(\xi)d\xi_3d\xi_1d\xi_2 \quad (17) \end{aligned}$$

ここに、

$$\xi_r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \quad (18)$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{e^{ix_1\xi_1 + ix_2\xi_2}}{2\pi} \psi_{ij}(\xi, x_3) T_{il}(\xi_r) \quad (19)$$

であり、式 (16) の Λ の添字の * は複素共役を表す。また、式 (19) に現れた ψ は弾性波動場の固有値問題から得られる固有関数で具体的には実体波あるいは表面波を表す。また T はユニタリ行列である。なお、文献⁶⁾に示すように、式 (16) と (17) の一般化 Fourier 変換および逆変換は L_2 空間から L_2 空間への写像として考えている。この意味で積分については、厳密には平均収束の意味で捉える必要がある。また、

$$\mathcal{U}_{ij}u_j \in L_2(\sigma_p) \oplus L_2(\sigma_c) \quad (20)$$

であることに注意する。

固有関数 ψ_{ij} の具体的な表現は以下のとおりである。ただし、 Δ_j ($j = 1, \dots, 5$) は未定係数であり。自由表面上の境界条件ならびに固有関数の規格化の条件で決定される。未定係数の具体的な表現は紙面の都合上、著者らの既往⁶⁾の論文に譲る。また、以下、行列の成分として明示されないものは成分としてゼロであると約束する。まず、固有関数が表面波の場合、 ψ は 1 行 3 列の行列でその成分は

$$\begin{aligned} \psi_{11}(\xi, x_3) &= -\gamma e^{-\gamma x_3} \Delta_1 + \xi_r^2 e^{-\nu x_3} \Delta_3 \\ \psi_{21}(\xi, x_3) &= \xi_r e^{-\gamma x_3} \Delta_1 - \xi_r \nu e^{-\nu x_3} \Delta_3 \quad (21) \end{aligned}$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\xi_r^2 - (c_T/c_L)^2 \xi_3^2} \\ \nu &= \sqrt{\xi_r^2 - \xi_3^2} \quad (22) \end{aligned}$$

また、 $\xi_r < \xi_3 < (c_L/c_T)\xi_r$ の領域で実現される実体波の場合、 ψ は 2 行 3 列の行列で成分は次の形式を持つ。

$$\begin{aligned} \psi_{11}(\xi, x_3) &= -\gamma e^{-\gamma x_3} \Delta_1 \\ &\quad + \xi_r^2 \Delta_3 \cos(\bar{\nu} x_3) + \xi_r^2 \Delta_4 \sin(\bar{\nu} x_3) \\ \psi_{21}(\xi, x_3) &= \xi_r e^{-\gamma x_3} \Delta_1 \\ &\quad - \xi_r \bar{\nu} \Delta_3 \sin(\bar{\nu} x_3) + \xi_r \bar{\nu} \Delta_4 \cos(\bar{\nu} x_3) \\ \psi_{32}(\xi, x_3) &= \xi_r \cos(\bar{\nu} x_3) \Delta_5 \quad (23) \end{aligned}$$

ここに、

$$\bar{\nu} = \sqrt{\xi_3^2 - \xi_r^2} \quad (24)$$

である。ただし、 c_T, c_L はそれぞれ S 波および P 波の伝播速度である。また、 $(c_L/c_T)\xi_r < \xi_3$ の領域の固有関数は 3 行 3 列の行列として次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \psi_{11}(\xi_3, x_3) &= (\bar{\gamma} \cos(\bar{\gamma} x_3) + \bar{\alpha} \xi_r^2 \cos(\bar{\nu} x_3)) \Delta'_1 \\ \psi_{21}(\xi_3, x_3) &= (\xi_r \sin(\bar{\gamma} x_3) - \bar{\alpha} \xi_r \bar{\nu} \sin(\bar{\nu} x_3)) \Delta'_1 \\ \psi_{12}(\xi_3, x_3) &= (-\bar{\gamma} \sin(\bar{\gamma} x_3) + \beta \xi_r^2 \sin(\bar{\nu} x_3)) \Delta'_2 \\ \psi_{22}(\xi_3, x_3) &= (\xi_r \cos(\bar{\gamma} x_3) + \beta \xi_r \bar{\nu} \cos(\bar{\nu} x_3)) \Delta'_2 \\ \psi_{33}(\xi_3, x_3) &= \xi_r \cos(\bar{\nu} x_3) \Delta_5 \quad (25) \end{aligned}$$

ここに、

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(c_T/c_L)^2 \xi_3^2 - \xi_r^2} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\gamma}{\xi_r^2 - \bar{\nu}^2} \\ \beta &= \frac{\bar{\nu}^2 - \xi_r^2}{2\xi_r^2 \bar{\nu}} \quad (27) \end{aligned}$$

である。

また、ユニタリ行列 T_{ij} は次のように与えられる。

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & ic & is \\ 0 & is & -ic \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

ここに、

$$c = \xi_1/\xi_r, \quad s = \xi_2/\xi_r \quad (29)$$

式 (14) に示すように領域積分方程式の一般化 Fourier 変換によって Green 関数に関する領域積分の演算は消え、代わりに一般化 Fourier 変換と逆変換の線形演算子が現れてくる。この方程式は一般化 Fourier 変換の演算子に関する第 2 種の Fredholm 方程式として捉えることが可能となる。実際に数値的に方程式を解く際には、一般化 Fourier 変換と逆変換は離散的に実行される。Krylov 部分空間の構成を離散的な波数空間の grid 点の上の関数について、一般化 Fourier 変換と逆変換を反復的に用いることで行い、積分方程式を解くことが可能となる。すなわち、ここでの積分方程式の解法では係数行列の導出が不要である。

```

do kk=1, N3
  FFT2D
enddo

do ip=1, N1*N2
  do kk=1, N3
    固有関数の構成
    台形則の適用
  enddo
enddo

```

図-2 一般化 Fourier 変換のアルゴリズム

```

do kk=1, N3
  FFT2D
enddo

do ip=1, N1*N2
  FFT1D
  Fast Laplace 1D
enddo

```

図-3 一般化 Fourier 変換の高速変換アルゴリズム

2.3 領域積分方程式の高速数値計算に関わる問題

式 (16) および (17) に示すように 3 次元解析における一般化 Fourier 変換は 3 重積分で表現される。したがって、解析のための空間領域および波数領域の grid 点を (N_1, N_2, N_3) とすれば、高速変換のアルゴリズムを用いない限り、一般化 Fourier 変換に必要な演算量は $O(N_1^2 N_2^2 N_3^2)$ と非常に膨大となる。しかしながら、一般化 Fourier 積分変換の核を観察することで水平座標成分については高速 Fourier 変換のアルゴリズムを用いることが可能となることが分かる。このときのアルゴリズムを図-2 に示す。図-2 より演算量は $O(N_1 N_2 N_3 (\log N_1 \log N_2 + N_3))$ となることが分かる。しかしながら、前論文⁵⁾でも示したように、水平座標成分の変換に FFT を用いても、Krylov 部分空間の構成に膨大な時間が要求される。

そこで、この問題の解決策として高速変換アルゴリズムの構築を考える。高速変換アルゴリズムの構築においては、境界積分方程式の分野で活発に用いられている高速多重極法¹²⁾を適用することも一つの方策であろう。しかしながら、式 (16) と (17) で与えられた複雑な核に対し、M2M 公式等を構成することは困難と考えられる。そこで、ここでは、一般化 Fourier 変換を Fourier cosine および sine 変換ならびに Laplace 変換に分解する方策を考える。たとえば、 $\xi_r < \xi_3 < (c_L/c_T)\xi_3$ の領域では一般化 Fourier 変換の中で x_3 の積分の部分は次

のように表せる。

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \psi_{1j}(\xi, x_3) u_j(x_3) dx_3 \\
&= -\gamma \Delta_1 \mathcal{L}[u_1] + \xi_r^2 \Delta_3 \mathcal{F}_{c\bar{v}}[u_1] + \xi_r^2 \Delta_4 \mathcal{F}_{s\bar{v}}[u_1] \\
& \quad + \xi_r \Delta_1 \mathcal{L}[u_2] - \xi_r \bar{v} \Delta_3 \mathcal{F}_{s\bar{v}}[u_2] + \xi_r \bar{v} \Delta_4 \mathcal{F}_{c\bar{v}}[u_2]
\end{aligned} \quad (30)$$

また、 $(c_L/c_T)\xi_r < \xi_3$ の領域では次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \psi_{1j}(\xi, x_3) u_j(x_3) dx_3 \\
&= \bar{\gamma} \Delta'_1 \mathcal{F}_{c\bar{\gamma}}[u_1] + \bar{\alpha} \xi_r^2 \Delta'_1 \mathcal{F}_{c\bar{v}}[u_1] + \xi_r \Delta'_1 \mathcal{F}_{s\bar{\gamma}}[u_1] \\
& \quad - \bar{\alpha} \xi_r \bar{v} \Delta'_1 \mathcal{F}_{s\bar{v}}[u_2]
\end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \psi_{2j}(\xi, x_3) u_j(x_3) dx_3 \\
&= -\bar{\gamma} \Delta'_2 \mathcal{F}_{s\bar{\gamma}}[u_1] + \beta \xi_r^2 \Delta'_2 \mathcal{F}_{s\bar{v}}[u_1] + \xi_r \Delta'_2 \mathcal{F}_{c\bar{\gamma}}[u_1] \\
& \quad + \beta \xi_r \bar{v} \Delta'_2 \mathcal{F}_{c\bar{v}}[u_2]
\end{aligned} \quad (32)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u] &= \int_0^\infty \exp(-\gamma x) u(x) dx \\
\mathcal{F}_{s\bar{v}}[u] &= \int_0^\infty \sin(\bar{v}x) u(x) dx \\
\mathcal{F}_{c\bar{v}}[u] &= \int_0^\infty \cos(\bar{v}x) u(x) dx \\
\mathcal{F}_{s\bar{\gamma}}[u] &= \int_0^\infty \sin(\bar{\gamma}x) u(x) dx \\
\mathcal{F}_{c\bar{\gamma}}[u] &= \int_0^\infty \cos(\bar{\gamma}x) u(x) dx
\end{aligned} \quad (33)$$

である。このように、一般化 Fourier 変換の鉛直座標に関する部分は非均質波の Laplace 変換、均質波の Fourier cosine および sine 変換に分解できる。このなかで Laplace 変換に関する部分は、Strain¹³⁾による高速 Laplace 変換を用いることで $O(N_3)$ の演算量が実現できる。同様に Fourier cosine および sine 変換に関わる部分は FFT を用いることで $O(N_3 \log N_3)$ の演算量が実現できる。一般化 Fourier 変換に高速変換を適用した場合のアルゴリズムを図-3 に示す。これより、領域積分方程式を解くための演算量は $O(N_1 N_2 N_3 (\log N_1 \log N_2 + \log N_3))$ で実現されることになる。

2.4 Born 近似による積分方程式の解法

本論文では、領域積分方程式の解の比較、検証のため Born 近似による解法を準備する。まず、式 (12) に、Born 近似を適用して散乱波動場を表現すれば次式となる。

$$v_i(x) = - \int_{\mathbb{R}_+^3} g_{ij}(x, y) N_{jk}(y) u_k^{(I)}(y) dy \quad (34)$$

この Born 近似の算出において、Green 関数を Hankel 変換を用いて合成することを考えれば、Green 関数は以

下のように表現できる.

$$[g_{ij}(x, y)] = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k [\mathbf{H}_k^m(r, \theta)] \times [\hat{g}_{ij}^m(k, x_3, y_3)] dk \quad (35)$$

ここに, \hat{g}_{ij}^m は波数領域の Green 関数, \mathbf{H}_k^m は水平方向の波動関数で,

$$\mathbf{H}_k^m(r, \theta) = [\mathbf{R}_k^m(r, \theta) \quad \mathbf{S}_k^m(r, \theta) \quad \mathbf{T}_k^m(r, \theta)] \quad (36)$$

である. ここに, \mathbf{R}_k^m , \mathbf{S}_k^m , \mathbf{T}_k^m は Horizontal wave function¹⁴⁾で, 以下のように表せる.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k^m(r, \theta) &= J_m(kr)e^{im\theta}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{S}_k^m(r, \theta) &= \frac{1}{k}\partial_r J_m(kr)e^{im\theta}\mathbf{e}_r + \frac{im}{kr}J_m(kr)e^{im\theta}\mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{T}_k^m(r, \theta) &= \frac{im}{kr}J_m(kr)e^{im\theta}\mathbf{e}_r - \frac{1}{k}\partial_r J_m(kr)e^{im\theta}\mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (37)$$

ここに, J_m は m 次の第 1 種 Bessel 関数, \mathbf{e}_3 , \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ は基底ベクトルである. また, 式 (34) を一般化 Fourier 変換で算出する場合は次のような散乱波の表現が可能となる.

$$\hat{v}_i(\xi) = -\hat{h}(\xi) \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_{ji}^*(\xi, y) N_{jk}(y) u_k^{(I)}(y) dy \quad (38)$$

式 (38) は空間積分を実行したのちに, 一般化 Fourier 逆変換を行い波動場を算定することを意味している. ただし, 入射波動場そのものはあらかじめ一般化 Fourier 変換で合成する. 次節ではここで示した 2 種類の Born 近似の方法を用いて積分方程式の解の検証を行う.

3. 数値計算例

3.1 Born 近似を用いた解析手法の検証

まず, 高速一般化 Fourier 変換を用いた積分方程式の解と Born 近似による結果との比較を示す. 検証のための解析モデルを図-4 に示す. 点加振は, 揺らぎ領域を避け, 自由表面から深さ 3 km の位置で与える. 加振方向は鉛直にとり, 加振振動数は 1 Hz とする. また, 加振力は 1×10^7 N である. 弾性媒質のバックグラウンドの定数は, $\lambda_b = 4$ GPa, $\mu_b = 2$ GPa, $\rho = 2 \times 10^3$ kg/m³ とする. このときの P 波と S 波の波速はそれぞれ, 2 km/s, 1km/s となる. また, 媒質の揺らぎは次式で与える.

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}(x) = 0.1 \exp(-|x - x_0|^2) \\ \tilde{\mu}(x) = 0.1 \exp(-|x - x_0|^2) \text{ [GPa]} \end{cases} \quad (39)$$

ここに, x_0 は揺らぎの中心座標で,

$$x_0 = (0, 0, 1) \text{ [km]} \quad (40)$$

とする. 波動場の水平断面および鉛直断面における媒質の揺らぎの状況を, 図-5, 図-6 に示す. これらの図より明らかなように, 媒質の揺らぎは地表面付近に局

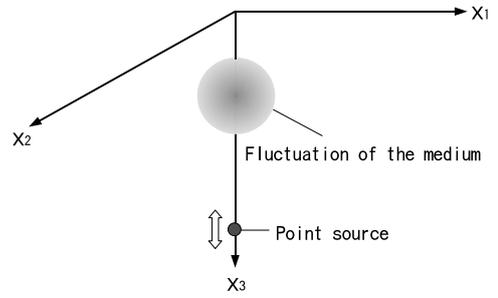


図-4 Born 近似との比較のための解析モデルの概要

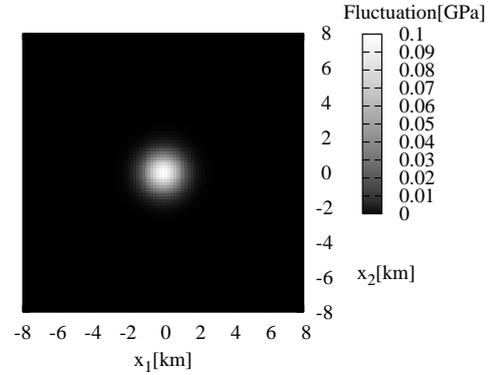


図-5 Lamé 定数の空間変動分布 ($x_3 = 1$ km)

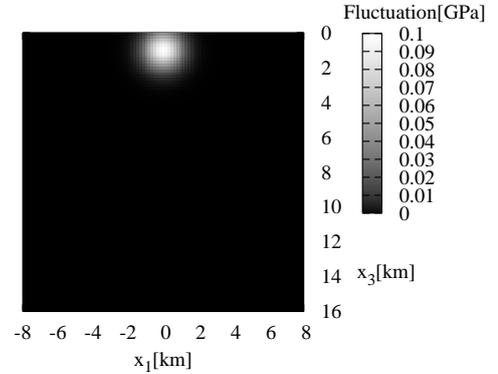


図-6 Lamé 定数の空間変動分布 ($x_2 = 0$ km)

在した半径 2km ほどの領域に存在する. Born 近似の算出においては, この揺らぎ領域を直方体ブロック $0.25 \times 0.25 \times 0.125$ km³ に分割し, Gauss の積分公式 (2³ 点) を用いて積分を実行する. 揺らぎ領域のブロックの総数は $64 \times 64 \times 40$ 個とする. また, 領域積分方程式法の数値計算に用いた空間分解能は $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0.25$ km, データサンプル数は 256^3 である. この空間分解能とデータサンプル数を採用した理由は, 3 次元全無限弾性波動場の解析で良好な解を得たことに基づく⁴⁾. また波数領域の Green 関数の表現で用いた無限小の正数 ϵ は有限の正数に置き換え, $\epsilon = 0.4$ とする.

図-7 に自由表面上の $x_2 = 0$ km における散乱波の振幅 (実部) の比較を示す. 図中, "Fast method" は高速変換アルゴリズムを用いた積分方程式の解, "Born1" は Hankel 変換を用いた Green 関数による Born 近似, "Born2"

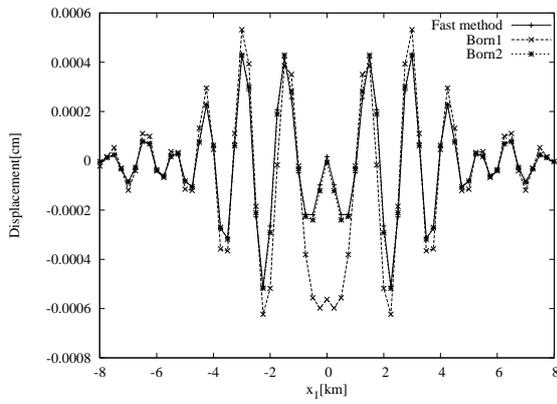


図-7 散乱波の振幅 (実部) の比較 ($x_2 = x_3 = 0$ km)

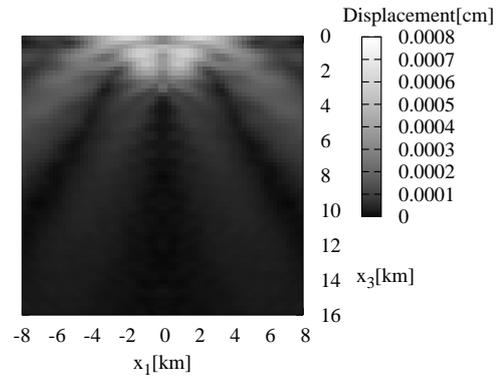


図-9 高速変換アルゴリズムを用いた積分方程式法による鉛直断面の散乱波の変位振幅 (絶対値) ($x_2 = 0$)

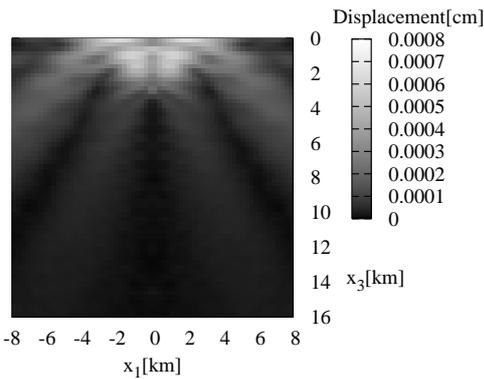


図-8 Born 近似による鉛直断面の散乱波の変位振幅 (絶対値) ($x_2 = 0$)

は式 (38) に基づく Born 近似の結果である。解析結果によると Born 近似と高速変換アルゴリズムを用いた結果は概ね一致している。ただし、Hankel 変換による Green 関数を用いた Born 近似の結果は $x_1 = 0$ km 付近で他の結果と異なっている。Hankel 変換により Green 関数を算出する場合、震源と観測点の水平距離が小さくなると、波数積分の収束特性が悪化することが、ひとつの原因と考えられる。

今回の数値計算モデルでは、媒質の揺らぎ領域が小さいこと、揺らぎの振幅も小さいことから、積分方程式と Born 近似による解は大きな差異を与えないものと考えられる。この意味で式 (38) による Born 近似の結果と積分方程式の結果の一致は妥当なものと言えよう。

図-8 および図-9 に Born 近似と積分方程式法による、鉛直断面における散乱波の振幅を示す。ここでの散乱波の振幅は複素数の変位場の絶対値を取っている。ただし、Born 近似は式 (38) に基づく。解析結果によると、散乱波は揺らぎ領域で増幅され、それが地表面で反射している様子が理解できる。両者の解を比較すると、散乱波の広がり、ほぼ同等な性状を示していることが分かる。

3.2 高速変換アルゴリズムの効果

次に、一般化 Fourier 変換に高速変換アルゴリズムを導入することで、以前の方法による解とどのような差異を生じるか、演算時間を含め検討を行う。一般化 Fourier 変換に高速変換アルゴリズムを用いない場合、逆変換は式 (17) に基づく波数パラメータ ξ_3 による台形公式を用いている。高速変換アルゴリズムを用いる場合、逆変換の積分は式 (33) より、波数パラメータ \bar{v} や $\bar{\gamma}$ を用いた有限 Fourier 変換が現れる。これらより、両者の数値解には差異を生じることも予見される。

図-10 に高速変換アルゴリズムを用いずに散乱解析を行った結果を示す。ここでは、鉛直断面の散乱波の振幅 (絶対値) を表示している。ただし、解析モデルおよび条件は前節の Born 近似を用いた数値計算と同じものを用いている。図-10 によれば、散乱波の振幅は媒質の揺らぎ領域ならびにその鉛直下方で、図-9 に比べて大きな値を算出している。特に図-10 に現れている揺らぎ領域の直下の周期的な振幅の大きな領域は、不自然と考えられる。地中深部の不自然な振幅の問題は、高速変換アルゴリズムに組み込まれた有限 Fourier 変換を用いることで、図-9 では解消されている。この意味で高速変換アルゴリズムを組み込んだ積分方程式の解は地中深部で好ましい結果を与えていると考えられる。

また、図-11 および図-12 に地表面での散乱波 (実部) の伝播状況を示す。これらはそれぞれ、高速変換アルゴリズムを用いずに積分方程式を解いた結果、および高速変換アルゴリズムを用いて積分方程式を解いた結果である。両者は揺らぎ領域の直上付近での違いを除けばほぼ同一の結果を与えている。揺らぎ領域直上付近での両者の差異は、高速変換アルゴリズムを用いない場合に見られた、揺らぎの領域での高い変位振幅の結果を反映している。

また、高速変換アルゴリズムの演算時間への効果を図-13 に示す。ただし、数値計算には AMD opteron 2.4GHz 搭載の PC で行った。また、FFT には acml ライブラリーを用いている。これによると、台形則を用いて積分方程式を解く場合の演算時間は 380 min、高速変換アルゴリズムを用いた場合には 37 min と約 1/10 に演算時間がとなり、演算時間の大幅な削減に成功し

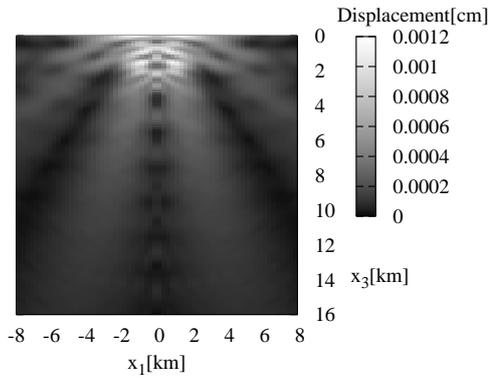


図-10 高速変換アルゴリズムを用いない積分方程式法による鉛直断面の散乱波の変位振幅 (絶対値)($x_2=0$)

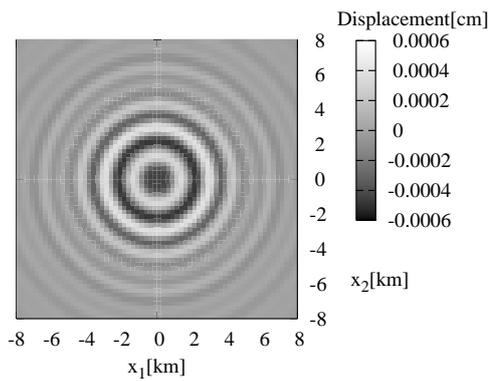


図-11 高速変換アルゴリズムを用いない積分方程式法による水平断面の散乱波の変位振幅 (実部)($x_2=0$)

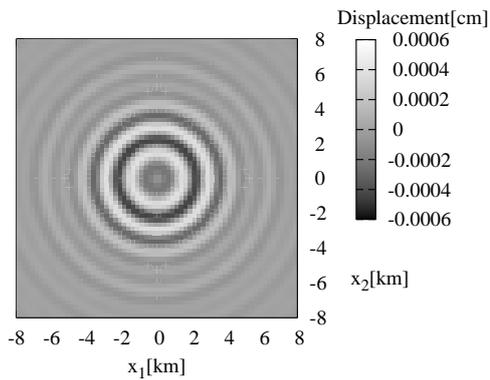


図-12 高速変換アルゴリズムを用いた積分方程式法による水平断面の散乱波の変位振幅 (実部)($x_2=0$)

ていることが分かる。

4. 結論

著者らの展開してきた半無限弾性波動場のための領域積分方程式法は、一般化 Fourier 変換と Krylov 部分空間反復解法を組み合わせることで、係数行列の導

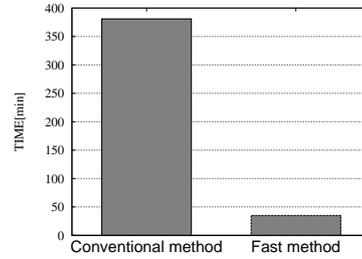


図-13 高速変換アルゴリズムによる演算時間短縮の効果

出を不要とする際立った特色がある。しかしながら、他の数値解析手法との照合、演算時間の短縮などの課題が残されてきた。本論文では、これらの課題を解決するためのいくつかの検討を行った。

本解析手法で演算時間をもっとも消費する部分は、Krylov 部分空間を構成するための一般化 Fourier 変換と逆変換である。本研究では、複雑な形式を持つこの変換を非均質波に関する Laplace 変換、均質波に対する Fourier sine および cosine 変換に分解し、それぞれに高速変換を適用することを試みた。そして、これによって得られる解を Born 近似による解と比較した。Born 近似による解は Hankel 変換に基づき Green 関数を算出する手法と一般化 Fourier 変換を援用する手法を準備した。数値解析結果によれば、高速変換アルゴリズムを考慮した積分方程式の解は Born 近似による解と良好に一致することが分かった。また、演算時間については、高速変換アルゴリズムを考慮することで今回のケースでは十分の 1 程度に削減できることを見出した。

さらに、高速変換アルゴリズムを考慮することで、積分方程式の数値解にも改善が見られることが分かった。具体的には、地中深部での散乱波の誤差を軽減した。この理由は、従来の一般化 Fourier 逆変換で用いてきた波数パラメータを変えたことに起因するものと考えられる。演算時間の削減を受け、今後の課題は、領域積分方程式法の実用化を図ることである。そして、大規模な地下構造モデルの散乱解析を実行することである。

参考文献

- 1) Kitahara, M., Niwa, Y., Hirose, S. and Yamazaki, M.: Coupling of numerical Green's matrix and boundary integral equations for the elastodynamic analysis of inhomogeneous bodies on an elastic half-space, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 8, pp. 397-407, 1984.
- 2) Niwa, Y., Hirose, S. and Kitahara, M.: Elastodynamic analysis of inhomogeneous anisotropic bodies, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 22, pp. 1541-1555, 1986.
- 3) Ikebe, T.: Eigenfunction expansions associated with the Schroedinger operators and their applications to scattering theory, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 5, pp. 1-34, 1960.
- 4) 東平光生, 岩崎健太郎, 小林遼, 木内拓: 領域積分方程式を用いた弾性波の散乱および逆散乱解析手法の展開, 応

- 用力学論文集, Vol. 10, pp. 17-26, 土木学会, 2007.
- 5) 東平光生: 領域積分方程式法を用いた揺らぎを持つ半無限弾性波動場の解析手法, 土木学会論文集 A, vol. 64, No.2, pp. 350-362, 2008.
 - 6) Touhei, T.: Generalized Fourier transform and its application to the volume integral equation for elastic wave propagation in a half space, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 52-73, 2009.
 - 7) 新井朝雄: ヒルベルト空間と量子力学, 共立講座 21 世紀の数学, 朝倉書店, 1997.
 - 8) Reed, M. and Simon, B.: *Method of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Fourier Analysis and Self-adjointness, Academic Press, 1975.
 - 9) Barrett, M., Berry, M., Chan, T.F., Demmel, J., Donato, J. M., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C. and Van der Vorst, H. : *Templates for the solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, 1994.
 - 10) 今村勤: 物理と Green 関数, 岩波書店, 1994.
 - 11) Colton, D. and Kress, R.: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Berlin, Springer, 1998.
 - 12) 西村直志: 計算力学における高速多重極法の 2,3 の話題, 応用力学論文集, Vol. 10, pp. 3-14, 土木学会, 2007.
 - 13) Strain, J.: A fast Laplace transform based on Laguerre functions *Courant Institute of Mathematical Sciences*, 2000
 - 14) Aki, K. and Richards, P.G.: *Quantitative Seismology*, University Science Books, 2002.

(2009 年 4 月 9 日 受付)