応用力学論文集 Vol.11, pp.991-996 (2008年8月) 土木学会

時間域BIEMによるレーザ超音波計測データを用いた表面クラックの深さ決定解析

Determination of depth of surface crack in a laser ultrasonic measurement with time domain BIEM

吉川仁*・川田朋和**・西村直志***
Hitoshi YOSHIKAWA, Tomokazu KAWADA, and Naoshi NISHIMURA

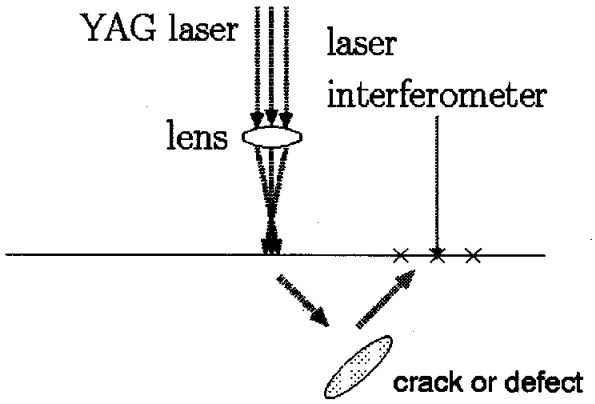
*正会員 工博 京都大学助教 学術情報メディアセンター (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂Cクラスター)
**非会員 工修 大阪ガス (〒541-0046 大阪市中央区平野町四丁目1番2号)
***正会員 工博 京都大学教授 情報学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

This paper discusses determination of depth of surface crack with time domain BIEM in a laser-ultrasonic non-destructive evaluation (NDE) problems. We generate Rayleigh waves having the wavelength longer than the depth of the surface crack with a pulsed Q-switch YAG laser generator. The waveform of the scattered Rayleigh surface waves differ with the depth parameter of the surface crack in the numerical analysis. The depth parameter is then determined by a comparison between the computed waveforms and the corresponding measured data. Determination of the depth of the surface crack is carried out acculately in laser-ultrasonic NDE with time domain BIEM.

Key Words : *time domain BIEM, laser ultrasonic, crack determination*

1. はじめに

著者らは、レーザ超音波[1),2),3)]による定量的非破壊評価に関する研究を行ってきている。レーザ超音波非破壊評価法では、パルスレーザによって材料内部に弾性波動を励起し、材料内部の欠陥・クラックによる散乱波動場を計測し、欠陥・クラックの情報を得る。散乱波動場の計測は、材料表面にてレーザ干渉計を用いて行われる (図–1)。レーザ干渉計を用いれば、レーザ照射点での法線方向速度成分の時間履歴が波形データとして計測できる。これまでに著者らは、パルスレーザによる超音波励起のメカニズムをレーザ計測波形データを用いた逆解析により決定した[4)]。また、クラックの位置をパラメータで表現し、レーザ励起された弾性波動場における欠陥・クラックによる散乱波動場を時間域の境界積分方程式法 (BIEM)[5),6)]を用いて数値的に復元し、レーザ超音波試験で得られた計測データと数値解を比較する事で表面クラックの位置を決定している[4),7),8)]。しかし、これまでの著者らの研究では表面クラックの深さは決定していない。表面クラックの深さ決定は非破壊評価において重要な問題であり、検査対象の耐久性能に深く関連する。本論文では、表面クラックの深さを定量的に求めることを目的とする。構造物を検査対象とする場合、表面クラックの深さが決定できれば、構造物の補修が適切に行えるようになり安全面の向上が見込める。著者らがこれまで行ったレーザ計測では、表面クラックの深さに対して励起された弾性波動の波長が短く、励起された表面波の殆どが表面クラックにより反射しており、レーザ干渉計で計測される散乱波波形には表面クラックの深さによる違いが見られず、クラックの深さ決定は行われていない[8)](図–2)。そのため、はじめにクラックの深さよりも長い波長の (低周波の) 弾性波動を励起させることを試みる (図–3)。

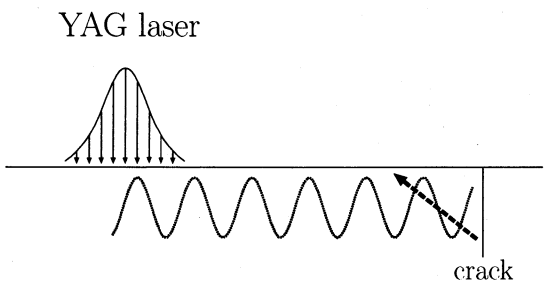


図–1 レーザ超音波非破壊試験

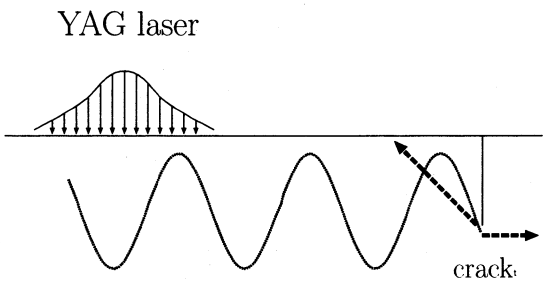
2. 低周波弾性波動のレーザ励起

2.1 レーザ励起弾性波動場 (T モード)

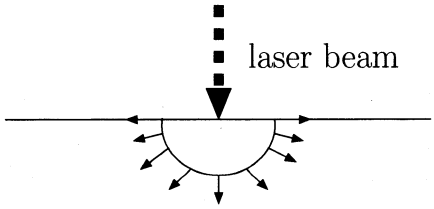
パルスレーザにより励起される弾性波動には2つのモードが存在する。供試体に照射されるパルスレーザ



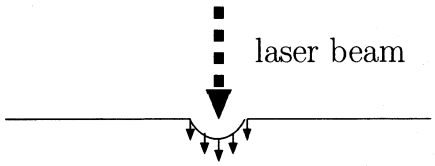
図–2 高周波弾性波動場



図–3 低周波弾性波動場



図–4 T モード



図–5 A モード

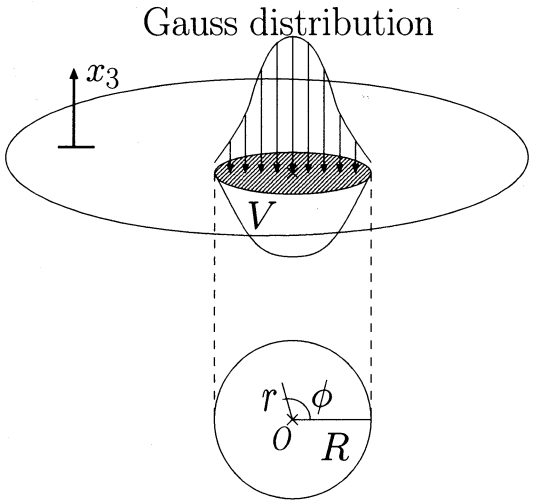
の強度が弱ければ、照射部付近に熱膨張が起こり弾性波動が発生する (T モード) (図–4)。パルスレーザの強度が強くなると、供試体表面にアブレーションが生じ、その影響により弾性波動が発生する (A モード) (図–5)。本論文では、T モードによる低周波弾性波動場の励起を検討する。

T モード励起では、パルスレーザの照射による供試体の熱膨張により弾性波動場が形成される。熱ひずみを $\varepsilon^T_{k\ell}$、弾性ひずみを $\varepsilon^{ED}_{k\ell}$ とし、等方性を仮定すると、

$$\varepsilon^{ED}_{k\ell} = \varepsilon_{k\ell} - \varepsilon^T_{k\ell}, \quad \varepsilon^T_{k\ell} = \alpha T \delta_{k\ell}$$

であり、熱応力は次式で与えられる。

$$\tau_{ij} = C_{ijk\ell}\varepsilon^{ED}_{k\ell}$$



図–6 パルスレーザの強度分布

$$= \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \alpha(3\lambda + 2\mu)T\delta_{ij}$$

ここで、α は線膨張率、T は温度上昇、$C_{ijk\ell}$ は弾性定数、λ, μ は Lamé 定数である。

計測に用いるパルスレーザはガウス型の空間強度分布を持つ[2)]。また、Q スイッチを用いた場合、パルスレーザの照射時間は 10〜15 nsec と非常に短い。そのため、T モードの励起弾性波動場を、3 次元半無限弾性領域 $D(x_3 \leq 0)$ において境界 $x_3 = 0$ に空間分布 $\frac{q_{\rm abs}}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$、時間変動 $\delta(t)$ の熱量が与えられたときの弾性波動場と考える (σ^2 はガウス分布の分散、$q_{\rm abs}$ は材料に吸収される熱量)(図–6)。このとき、温度上昇 T、変位 $\boldsymbol{u}(r, z, t)$ は次の初期値境界値問題の解として得られる。

$$\mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} + \alpha(3\lambda+2\mu)\nabla T \quad \text{in } D \qquad (1)$$

$$\Delta T - \frac{1}{\kappa^2}\dot{T} = 0 \text{ in } D \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{0} \text{ for } t \leq 0 \\ \tau_{zz} = \tau_{zr} &= 0 \text{ on } x_3 = 0, \text{ for } t \geq 0 \\ T &= 0 \text{ for } t \leq 0 \\ \frac{\partial T}{\partial n} &= \frac{\delta(t) q_{\rm abs}}{2\pi K\sigma^2}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{2\sigma^2}\right) \\ &\quad \text{on } x_3 = 0, \text{ for } t \geq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

ここで、ρ は密度、K は熱伝導率、κ^2 は温度拡散率で $\kappa^2 = \frac{K}{\rho c}$, ($c$ は比熱)、$\boldsymbol{n}$ は境界での外向き単位法線ベクトルで $(0,0,1)$、$\frac{\partial}{\partial n}$ は法線微分を、'$(\dot{\ })$' は時間微分を表す。なお、供試体 (アルミニウム合金を想定) の熱伝導度が空気の熱伝導度に比べ極めて大きいため断熱の境界条件 (式 (3)) を課す。

表–1 アルミニウム合金の諸量

密度 ρ	2.70×10^6[g/m^3]
比熱 c	0.896[J/deg · g]
線膨張率 α^T	2.313×10^{-5}[1/deg]
熱伝導率 K	203.9[J/m · sec · deg]
温度拡散率 κ^2	8.432×10^{-5}[m^2/sec]
P 波速度 c_L	6380[m/sec]
S 波速度 c_T	3180[m/sec]

2.2 低周波弾性波動のレーザ励起

動弾性問題の支配方程式 (式 (1)) の右辺から、パルスレーザにより熱膨張を起こす領域の温度勾配によって、材料内部に励起される弾性波動場の周波数が変化する事がわかる。つまり、低周波弾性波動場を励起するには、熱膨張を起こす領域の温度勾配をなだらかにすれば良い。式 (2)、式 (3) より、材料内部の温度分布は、半無限領域の熱伝導方程式の Green 関数とパルスレーザの強度分布との畳み込み積分の形で得られる (図–**6**)。

$$T(r,z,t) = \frac{2\kappa^2}{K} q_{\mathrm{abs}} \left(\frac{1}{4\pi\kappa^2 t}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\kappa^2 t}\right) \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(r-R\cos\phi)^2 + R^2\sin\phi^2}{4\kappa^2 t}\right) \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) R\, dR\, d\phi \quad (4)$$

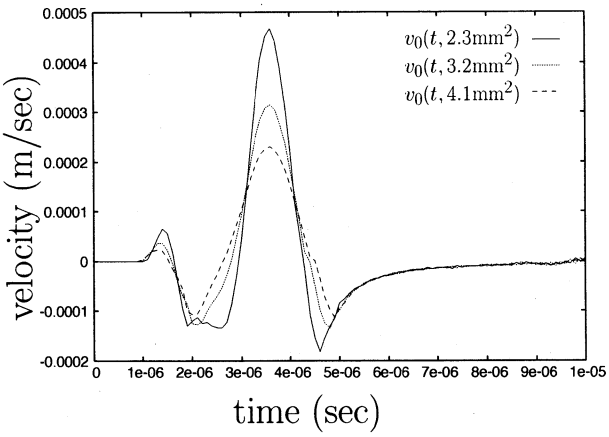
式 (4) により得られた温度分布のもと、式 (1) を時間域 BIEM(付録 **A**. 参照) を用いて解き、照射したパルスレーザが持つ強度分布のガウス分布の分散 σ^2 を変化させる事で、材料内部に低周波弾性波動場が励起できているかを数値的に検証する。ガウス分布の分散 σ^2 を $\sigma^2 = 2.3\mathrm{mm}^2$、$\sigma^2 = 3.2\mathrm{mm}^2$、$\sigma^2 = 4.1\mathrm{mm}^2$ と変化させた時の、材料表面パルスレーザの照射中心から 10mm 離れた計測点 M_0 での法線方向速度 $v_0(t,\sigma^2)$ を図–**7** に示す。なお、$q_{\mathrm{abs}} = 2.9$mJ とし、材料としてアルミニウム合金を想定し表–1 の値を解析に用いた。

図–**7** より、照射レーザの強度分布であるガウス分布の分散を大きくとれば、材料内部に低周波弾性波動場を励起できる事が確認できる。

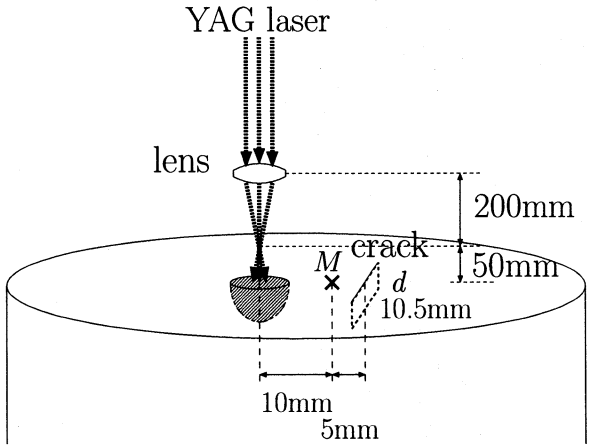
3. 表面クラックの深さ決定の数値的検証

次に、材料内部に低周波弾性波動場を励起する事で、表面クラックの深さが決定できるかを数値的に検証する。表面クラック S をもつ半無限領域 $D(x_3 \le 0)$ における T モード励起に相当する次の初期値境界値問題を考える。

$$\mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} + \alpha(3\lambda+2\mu)\nabla T \quad \text{in } D\setminus S \quad (5)$$



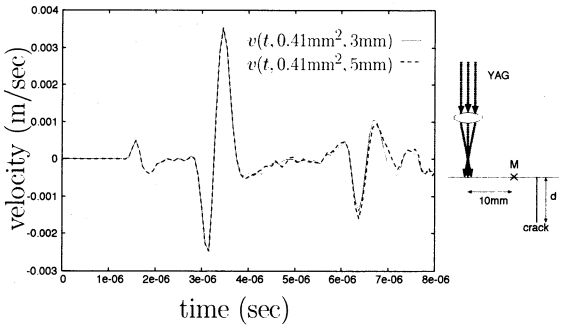
図–**7** $v_0(t, 2.3\mathrm{mm}^2)$, $v_0(t, 3.2\mathrm{mm}^2)$, $v_0(t, 4.1\mathrm{mm}^2)$



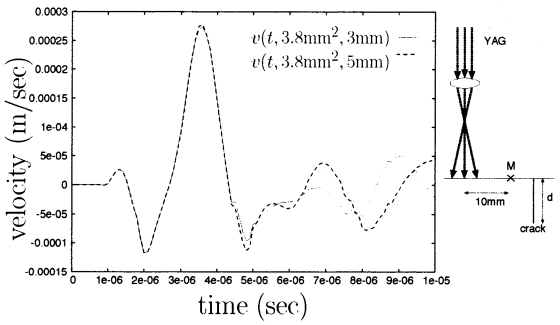
図–**8** レーザ超音波計測

$$\begin{aligned}
\Delta T - \frac{1}{\kappa^2}\dot{T} &= 0 \text{ in } D\setminus S \\
\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{0} \text{ for } t \le 0 \\
\tau_{zz} = \tau_{zr} &= 0 \text{ on } x_3 = 0, \text{ for } t \ge 0 \\
\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^- &= \boldsymbol{0} \text{ on } \partial S \\
T &= 0 \text{ for } t \le 0 \\
\frac{\partial T}{\partial n} &= \frac{\delta(t) q_{\mathrm{abs}}}{2\pi K\sigma^2}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{2\sigma^2}\right) \\
&\quad \text{on } x_3 = 0, \text{ for } t \ge 0
\end{aligned}$$

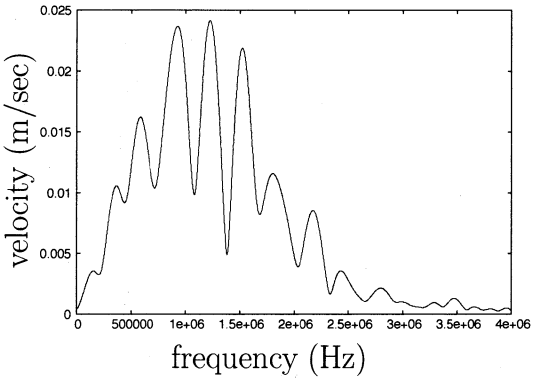
長さ 10.5mm、深さ d の長方形表面クラックがレーザ照射中心から 15mm の箇所に垂直に切れ込んでいるアルミニウム合金の供試体を想定し、レーザ照射中心から 10mm の材料表面の点 M での法線速度成分 $v(t,\sigma^2,d)$ を数値的に求める (図–**8**)。$q_{\mathrm{abs}} = 2.9$mJ とし、パルスレーザの強度分布の分散が $\sigma^2 = 0.41\mathrm{mm}^2$ と $\sigma^2 = 3.8\mathrm{mm}^2$ の 2 ケースについて、クラック深さを $d = 3$mm と $d = 5$mm とし時間域 BIEM による数値解析を行った (図–**9**, 図–**11**)。また、図–**10**, 図–**12** にそれぞれ $v(t, 0.41\mathrm{mm}^2, 3\mathrm{mm})$, $v(t, 3.8\mathrm{mm}^2, 3\mathrm{mm})$ の周波数スペクトルを示した。



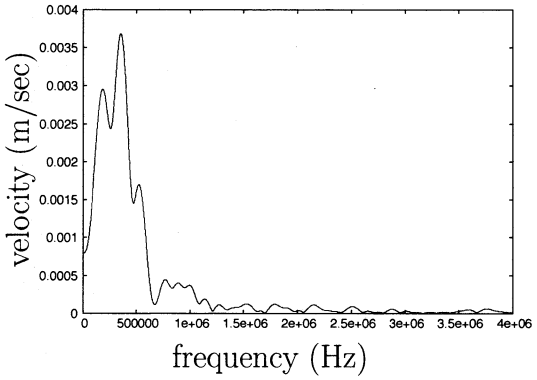
図–9 $v(t, 0.41\text{mm}^2, 3\text{mm})$, $v(t, 0.41\text{mm}^2, 5\text{mm})$



図–11 $v(t, 3.8\text{mm}^2, 3\text{mm})$, $v(t, 3.8\text{mm}^2, 5\text{mm})$



図–10 $|v(\omega, 0.41\text{mm}^2, 3\text{mm})|$



図–12 $|v(\omega, 3.8\text{mm}^2, 3\text{mm})|$

パルスレーザの強度分布の分散 $\sigma^2 = 0.41\text{mm}^2$ の場合、励起される弾性波動場の周波数は高く (中心周波数約 1MHz) 材料表面付近を伝播する Rayleigh 波の波長が短いため、殆どの波動が表面クラックで反射する。このため、表面クラックの深さを 3mm から 5mm と変化させても、計測点で得られるクラックからの散乱波波形 ($t - 6\mu$sec 付近) に違いはあまり見られない (図–**9**)。一方、分散 $\sigma^2 = 3.8\text{mm}^2$ の場合、励起される弾性波動場の周波数は低い (中心周波数約 300KHz)。材料表面を伝播する Rayleigh 波の波長が長くなり、表面波の一部が表面クラックを越えて伝播する。計測点で得られるクラックからの散乱波波形 ($t = 6\mu$sec 付近) に、表面クラック深さ d による違い見られる (図–**11**)。つまり、図–**11** に示された散乱波波形には、表面クラックの深さの情報が含まれている。これらの表面クラックの深さ情報を持つ散乱波形データを用いて、レーザ超音波計測と時間域 BIEM による数値解析により表面クラック深さを決定する。

4. レーザ計測による表面クラック決定解析

4.1 レーザ超音波計測

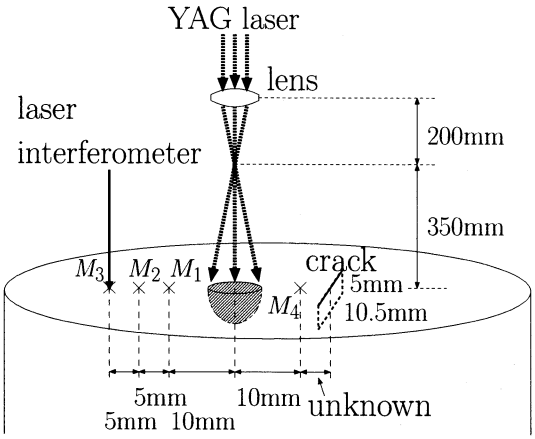
深さ 5mm の表面クラックを持つアルミニウム供試体を用いたレーザ超音波計測を行い、得られた計測データを用いて表面クラックの深さを決定する。

YAG レーザ発生装置 (LOTUS TII LS-2135) に Pump Lamp Energy 29J を加え、表面に角度 90 度で切れ込んだ長方形クラック (長さ 10.5mm、深さ 5mm) を持つアルミニウム合金製の円筒供試体パルスレーザを照射する。レンズから 550mm 離して供試体を設置し照射レーザのスポット径を広げる。これにより、パルスレーザの強度分布の分散は大きくなり、十分に低周波の波動が励起できる。また、図–**13** に示す供試体表面の 4 点 $(M_1, \ldots, M_4)$ の法線方向速度 $V^i (i = 1, \ldots, 4)$ をレーザ干渉計で計測する。

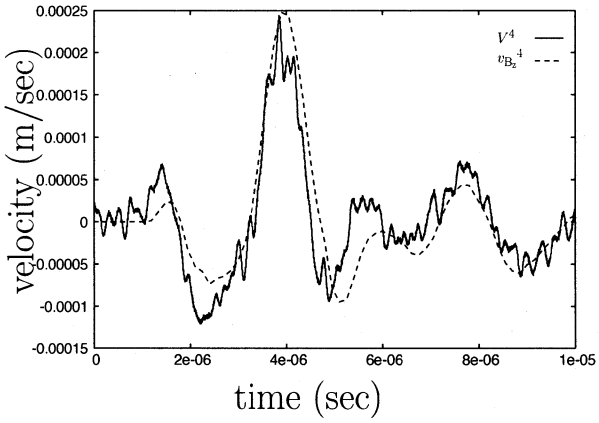
なお、アルミニウム供試体は十分大きく、計測時間内に供試体の底面・側面からの反射波の影響は現れない。また、計測点 $M_i (i = 1, 2, 3)$ は表面クラックから離れており、これらの点で計測される波形には、計測時間内にクラックからの散乱波の影響は現れない。よって、計測点 $M_i (i = 1, 2, 3)$ における計測は半無限領域での計測とみなせる。計測点 M_4 は表面クラックに近く、点 M_4 での計測は表面クラックを含む半無限領域での計測とみなすことができる。

4.2 レーザ励起弾性波動場の同定

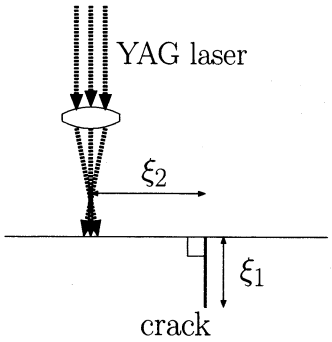
パルスレーザの強度分布の分散 σ^2 と供試体に吸収される熱量 q_{abs} を計測データから決定する。σ^2 と q_{abs} をパラメータとして、計測点 $M_i (i = 1, 2, 3)$ での法線方



図–13 レーザ超音波計測



図–15 $V^4(t), v_{B_z}{}^4(t, 5.5\text{mm}, 16.5\text{mm})$



図–14 形状パラメータ ξ_1, ξ_2

向速度 $v_G{}^i(i = 1, 2, 3)$ を動弾性問題の Green 関数を用いて計算し、計測値 $V^i(i = 1, 2, 3)$ との差からなるコスト関数 J_T を導入する。

$$J_T = \sum_{i=1}^{3} \sum_{m} \{V^i(m\Delta t) - v_G{}^i(m\Delta t, \sigma^2, q_{abs})\}^2$$

ここで、Δt は時間ステップ幅である。

$(\sigma^2, q_{abs}) = (3.2\text{mm}^2, 2.3\text{mJ})$ のときコストが最小となり、これらの値を用いてレーザ励起弾性波動場を復元する。

4.3 表面クラック深さ決定解析

決定されたパラメータ $(\sigma^2, q_{abs}) = (3.2\text{mm}^2, 2.3\text{mJ})$ を用いて復元されたレーザ励起波動場において、表面クラックの深さ ξ_1 と、パルスレーザの照射中心からの表面クラックの距離 ξ_2 を未知量とするクラック決定問題を考える (図–14)。

ξ_1, ξ_2 を未知パラメータとして、時間域 BIEM を用いて計測点 M_4 での法線方向速度 $v_{B_z}{}^4(t, \xi_1, \xi_2)$ を計算し、計測値 V^4 と数値解の差からなるコスト関数 J を導入する。

$$J = \sum_{m} \{V^4(m\Delta t) - v_{B_z}{}^4(m\Delta t, \xi_1, \xi_2)\}^2$$

パラメータ ξ_1, ξ_2 についてコスト関数 J の等高線を描き最小値と求めた。コスト J は、$(\xi_1, \xi_2) = (5.5\text{mm}, 16.5\text{mm})$ のとき最小となった。表面クラックの深さ ξ_1 の正解は 5mm であり、多少の誤差は見られるが、わずか一点の計測データのみで決定解析を行った事を考慮すれば、十分な精度でクラックの深さを決定できたといえよう。なお、クラックの位置 ξ_2 は正解 16.5mm と一致した。

決定された形状パラメータを与えて計算された $v_{B_z}{}^4(t, 5.5\text{mm}, 16.5\text{mm})$ を計測データ $V^4(t)$ と併せて図–15 に示す。

5. 結論

本論文では、時間域 BIEM による解析を行い、パルスレーザの強度分布の分散 σ^2 を変化させることで様々な周波数の弾性波動を励起できることを確かめた。また、レーザ超音波計測において、表面クラックの深さ 5mm を検出するのに必要な周波数の弾性波動を励起した。さらに、低周波の弾性波波動場を励起し、表面クラックの深さを決定するクラック決定問題を解いた。わずか 1 点のレーザ超音波計測データのみで、十分な精度で表面クラックの深さが決定できた。しかし、低周波弾性波動場励起のためにパルスレーザ照射径を広げると励起波動の振幅のピークが低くなり (図–7)、レーザ計測波形の S/N 比が悪くなる。より高出力のパルスレーザ、高精度のレーザ干渉計によるレーザ計測が求められる。

筆者らの提案している時間域 BIEM を用いた定量的レーザ超音波非破壊評価法で、表面クラックの深さを決定できた。レーザ超音波計測では、レンズを用いてパルスレーザの絞りを変えるだけで、様々な周波数の

弾性波動を励起できる。クラック位置の決定には計測波形にピークの立つ高周波の弾性波を、クラック深さの決定には低周波の弾性波を励起させるなど、用途に応じた弾性波の励起が可能である。

謝辞

レーザ超音波計測を行う上で、京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻 塚田和彦准教授、中上晋志氏に御協力頂いた。また、本研究は文部科学省科学研究費補助金 (若手研究 (B): 17760375) の援助を受けた。ここに、記して謝意を表す。

A. 付録

A.1 時間域動弾性 BIEM

式 (1) に対応する境界積分方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) &= \int_{\partial D}\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\mathrm{T}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t)dS_y \\ &- \int_{\partial D}\Gamma_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t)dS_y \\ &+ \alpha^T(3\lambda+2\mu)\int_D \Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\nabla T dV_y \quad (6)\end{aligned}$$

ここで、'$*$' は時間に関する畳み込み積分で $f(t)*g(t)=\int f(t-s)g(s)ds$、T はトラクション作用素、$\partial D$ は領域 D の境界である。$\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$,$\Gamma_{Iij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ はそれぞれ動弾性問題の基本解と二重層核であり、各々次式で表される。

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) &= \frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\delta(t-r_0/c_T)}{r_0}\delta_{ij}\right. \\ &- c_T^2\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\left(\frac{(t-r_0/c_T)H(t-r_0/c_T)}{r_0}\right. \\ &\left.\left.-\frac{(t-r_0/c_L)H(t-r_0/c_L)}{r_0}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{Iij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) &= C_{jklm}\frac{\partial}{\partial y_l}\Gamma_{im}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)n_k \\ &= -\lambda\Gamma_{il,l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)n_l \\ &- \mu\Gamma_{ik,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)n_k - \Gamma_{ij,k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)n_k\end{aligned}$$

ここで、$r_0=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$、$(\ \ )_{,i}=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$、$c_L, c_T$ は、それぞれ縦波、横波の弾性波伝播速度で、

$$c_L=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\quad c_T=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

である。

また、クラックを含む領域において式 (5) に対応する境界積分方程式は、$\boldsymbol{x}$ が供試体表面にある場合は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) &= \int_{\partial D}\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\mathrm{T}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t)dS \\ &- \mathrm{v.p.}\int_{\partial D}\Gamma_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t)dS \\ &+ \alpha^T(3\lambda+2\mu)\int_D\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\nabla T dV \\ &+ \int_S\Gamma_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\varphi(\boldsymbol{y},t)dS\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$ がクラック上にある場合は

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\partial D}\mathrm{T}\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\mathrm{T}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t)dS \\ &- \int_{\partial D}\mathrm{T}\Gamma_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t)dS \\ &+ \alpha^T(3\lambda+2\mu)\int_D\mathrm{T}\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\nabla T dV \\ &+ \mathrm{p.f.}\int_S\mathrm{T}\Gamma_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*\varphi(\boldsymbol{y},t)dS\end{aligned}$$

である。ここで、p.f. は発散積分の有限部分を表している。

なお、各々の積分方程式を区分一定の境界要素、区分線形の時間要素を用いて離散化し、数値的に境界上の変位 $\boldsymbol{u}$ を求め、それらの時間差分を取り変位速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$ を求める。

参考文献

1) 超音波 TECHNO, Vol. 18, No. 3, 2006.
2) 大澤敏彦, 小保方富夫: レーザ計測, 裳華房, 1994.
3) L.R.F. Rose: Point-source representation for laser-genetated ultrasound, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.75, No.3, pp.723-732, 1984.
4) 吉川仁, 西村直志: Green 関数を用いた超音波励起レーザのソース同定, 計算数理工学論文集, Vol. 5, pp.95–100, 2005.
5) 小林昭一 他: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
6) P.K. Banerjee and S. Kobayashi: Advanced Dynamic Analysis by Boundary Element Methods, Developments in Boundary Element Methods-7, Elsevier Applied Science, 1992.
7) 吉川仁, 西村直志: 境界積分方程式法を用いたレーザ超音波非破壊評価に関する研究, 計算数理工学論文集, Vol. 5, No. 2, pp.167–170 2005.
8) 吉川仁, 川田朋和, 西村直志: レーザ超音波計測による波形データを用いたクラック決定解析, 応用力学論文集, Vol. 9, pp.123–128, 2006.
9) H. Yoshikawa and N. Nishimura, An improved implementation of time domain elastodynamic BIEM in 3D for large scale problems and its application to ultrasonic NDE, Electronic Journal of Boundary Elements, Vol. 1, Issue 2, pp.201–217, 2003.
10) 玉虫文一他: 理化学事典 第 3 版, 岩波書店, 1971.

(2008 年 4 月 14 日 受付)