応用力学論文集 Vol.11, pp.851-857　(2008年8月)　土木学会

デューン–平坦床遷移に及ぼす圧力勾配の影響

The effect of pressure gradient on the dune-flat bed transition

泉　典洋*・佐藤博重**
Norihiro IZUMI and Hiroshige SATO

*正会員　PhD　北海道大学教授　大学院工学研究科環境フィールド工学専攻
**正会員　工修　秋田県　鹿角地域振興局

The effect of pressure gradient on the dune-flat bed transition is studied in terms of linear and weakly nonlinear stability analysis. We employ the Kovacs & Parker bedload transport formula[1] extended to incorporate the effect of pressure gradient on the lee side of dunes proposed by Yamaguchi & Izumi[2]. The linear anlysis reveals that the critical Froude number is slightly increased due to the effect of pressure gradient. The nonlinear stability analysis reveals that the effect of pressure gradient renders the bifurcation pattern at the dune-flat bed transition subcritical in the range of relatively large resistance coefficients.

Key Words : *pressure gradient, dune-flat bed transition, linear stability analysis, weakly nonlinear stability analysis*

1. はじめに

デューン（砂堆）と呼ばれる河床波は，洪水時に流量の増減に応じて発生と消滅を繰り返すが，その際，同じ流量下でもデューンと平坦床の二通りの河床形態が現れることがある．山口，泉[3]および泉，山口[4]は，弱非線形安定解析を行うことによって，この原因の一つが，デューン–平坦床遷移時に現れる亜臨界分岐である可能性を示している．彼らの解析が，Engelund[5]やFredsøe[6]の用いた定剪断層近似を用いた解析であったのに対して，泉[7]およびIzumi[8]，Colombini & Stocchino[9]は，より開水路乱流を精度良く表すと考えられている混合距離モデルを用いた弱非線形安定解析を行っている．ところが，その結果によると，抵抗係数がかなり小さい領域にならないと亜臨界分岐は生じないことが明らかとなっており，比較的大きな抵抗係数の領域で河床形態の二価性が現れている Guy, Simons & Richardson[10]の実験結果を説明することはできないことになる．

本研究では，泉[7]および Izumi[8]，Colombini & Stocchino[9]と同様に混合距離モデルを用いながら，さらにデューン下流に発生する剥離の影響を取り入れるために，山口，泉[2]が Kovacs & Parker[1]の式を基に提案した圧力勾配の影響を取り入れた掃流砂量式を用いたデューンの弱非線形安定解析によって，圧力勾配がデューン–平坦床遷移に与える影響を明らかにする．

2. 逆圧力勾配と流れの剥離

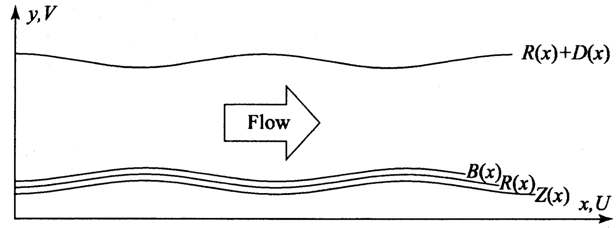
デューンは lower regime（常流域）において発生する河床波である．発達したデューンは下流側に剥離を伴った非対称な形状を呈するが，ここでは比較的波高の小さい発達初期のデューンを考える．デューンのクレスト下流のように河床高が流下方向に低下している順勾配の斜面上では，斜面方向に働く重力の影響によって掃流砂量が増加する．一方，デューンが発生するような常流の場合，クレスト下流では流速の減少によって圧力が上昇し，逆圧力勾配が発生する．この逆圧力勾配は，流れや砂粒子に対し下流から上流に向かって力を及ぼし，重力とは相反する作用を有している．逆圧力勾配の大きさは減速の程度，ひいては波高の大きさによって決定される．波高が大きくなり逆圧力勾配が十分に大きくなると，逆流を伴う明確な剥離域が形成されるようになる．逆にこのことは，波高が小さいデューン発生初期においても，逆圧力勾配は波高と同程度の影響を持ち，単純に無視することはできないことを示唆している．つまり，逆圧力勾配の影響がデューンの波高程度の影響を持つとすれば，デューンの波高を微小パラメータとした線形安定解析では，たとえ発生段階においても逆圧力勾配の影響を無視することはできないことになる．

そこで本研究では，Kovacs & Parker[1]の掃流砂量式を基に山口，泉[2]が提案した圧力勾配の影響を考慮した掃流砂量式を用いて泉[7]が行ったのと同様の弱非線形安定解析を行い，圧力勾配がデューン–平坦床遷移に及ぼす影響を明らかにする．

3. 定式化

3.1 支配方程式

流れの概念図および座標系を**図–1** に示す．開水路内の流れは Reynolds 平均（乱流変動に関するアンサンブル平均）を取った二次元 Navier-Stokes 方程式を用いて



図–1 流れの概念図と座標系

記述できる．その際，流れの変動の時間スケールは河床変動の時間スケールに比べると十分早いので，非定常効果は河床変化式でのみ考慮し，流れは定常とみなしてよい（準定常の仮定）．この仮定を用いると無次元 Navier-Stokes 方程式は次のようになる．

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+1+\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}-S^{-1}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \quad (3)$$

ここで x および y はそれぞれ流下方向および水深方向の座標，U および V はそれぞれ x および y 方向の流速，S および P はそれぞれ平均河床勾配および圧力，T_{ij} $(i,j=x,y)$ は Reynolds 応力テンソルであり，既に式 (6) に示すような無次元化が施されている．Reynolods 応力テンソルは次式で表される．

$$T_{xx}=2\nu_T\frac{\partial U}{\partial x},\quad T_{yy}=2\nu_T\frac{\partial V}{\partial y} \quad (4a,b)$$

$$T_{xy}=\nu_T\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right) \quad (4c)$$

また ν_T は渦動粘性係数であり，次式で表されるものと仮定する．

$$\nu_T=l^2\frac{\partial U}{\partial y},\quad l=\kappa(y-Z)\left(\frac{D+R-y}{D+R}\right)^{1/2} \quad (5a,b)$$

ここで l は混合距離，Z および R はそれぞれ河床面（原点）および対数分布則で流速がゼロとなる点の y 座標（以降，基準面高さと呼ぶ），D は水深である．式 (5) の混合距離モデルは，平坦な底面上の乱流を良好に表現できることが判っているが，ここで取り扱っているような波状の底面に対しても適用できるかどうかはよく判っていない．ただし，本研究で取り扱っているのは，河床波の波高が有限ではあってもあまり大きくない弱非線形領域における河床波の分岐形態であるので，式 (5) が近似的に成立するものと仮定する．また，ここで考えている底面は十分に粗面であるので，粘性底層は十分に薄く，底面の極近傍まで式 (5) で良好に表せることが期待できる．

上式中の各変数に対して，次のような無次元化が行われている．

$$(U^*,V^*)=U_{f0}^*(U,V) \quad (6a)$$

$$(x^*,y^*,Z^*,D^*,R^*,B^*,d_s^*)=D_0^*(x,y,Z,D,R,B,d_s) \quad (6b)$$

$$\left(P^*,T_{ij}^*\right)=\rho U_{f0}^{*2}\left(P,T_{ij}\right),\quad t^*=\frac{(R_sgd_s^*)^{1/2}d_s^*}{(1-\lambda_p)D_0^{*2}}t \quad (6c,d)$$

ここで $()^*$ は有次元の変数を表しており，B^* は後述する掃流層上面の y^* 座標，d_s^* は粒径，R_s は砂粒子の水中比重 (= 1.65)，λ_p は空隙率である．また U_{f0}^* および D_0^* はそれぞれ平坦床等流状態における摩擦速度および水深であり，次式が成立する．

$$U_{f0}^*=\sqrt{\frac{\tau_{b0}^*}{\rho}}=\sqrt{gD_0^*S} \quad (7)$$

ここで τ_{b0}^* は平坦床等流状態における底面剪断力である．

3.2 Exner 方程式と掃流砂量式

河床高の時間変化は次の Exner 方程式で表される．

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0 \quad (8)$$

ここで Φ は $(R_sgd_s^*)^{1/2}d_s^*$ で無次元化した掃流砂量である．掃流砂量式は山口，泉[2]が Kovacs & Parker 式を基に圧力勾配の影響を取り入れた次式を用いる．

$$\Phi=\frac{a^{1/2}}{\mu_c\gamma}(\theta_b-\gamma\theta_{ch})\left(\theta_b^{1/2}-\gamma^{1/2}\theta_{ch}^{1/2}\right) \quad (9a)$$

ここで

$$\gamma=\frac{S}{R_s}P_{z,x}(R)\left(\sin\phi+\frac{\cos\phi}{\mu_C}\right)+\left(1+\frac{S}{R_s}P_{z,y}(R)\right)\left(\cos\phi-\frac{\sin\phi}{\mu_C}\right) \quad (9b)$$

また θ_b および θ_{ch} は $\rho R_sgd_s^*$ で無次元化したそれぞれ掃流層上面での剪断力および平坦床に対応する限界剪断力，ϕ は底面の勾配角，P_z はピエゾ圧力，$()_{,x}$ および $()_{,y}$ はそれぞれ x 微分および y 微分である．したがって $P_{z,x}(R)$ および $P_{z,y}(R)$ は基準面におけるそれぞれ x および y 方向のピエゾ圧力勾配を表している．μ_c はクーロンの動摩擦係数であり，Kovacs & Parker[1]に倣って 0.84 とする．

掃流層厚さ h_b は Colombini[11]に倣って次式で与える．

$$h_b=l_bd_s,\quad l_b=1+1.3\left(\frac{\tau_r-\tau_c}{\tau_c}\right)^{0.55} \quad (10a,b)$$

ここで τ_r および τ_c は ρU_{f0}^{*2} で無次元化したそれぞれ基準面高さにおける無次元剪断力および無次元限界剪断力である．原点を平均高さ（砂粒子の凹凸をならした高さ）に取れば，砂粒子の最も高い点は $d_s/6$ となる．そこから h_b だけ上に掃流層上面があるとすれば，掃流層上面高さ B は次のように表される．

$$B=h_b+\frac{d_s}{6}=\left(l_b+\frac{1}{6}\right)d_s \quad (11)$$

Colombini[11]は，掃流層厚さは摂動によって影響を受けないと仮定している．ここでもそれに倣って掃流層厚さは摂動によって変化しないものとする．

3.3 境界条件

水面および底面における境界条件は次のようになる．

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{ns}=0 \quad \text{at} \quad y=H \tag{12}$$

$$\boldsymbol{e}_{ns}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{e}_{ns}=0 \quad \text{at} \quad y=H \tag{13}$$

$$\boldsymbol{e}_{ts}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{e}_{ns}=0 \quad \text{at} \quad y=H \tag{14}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{tr}=0 \quad \text{at} \quad y=R \tag{15}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{nr}=0 \quad \text{at} \quad y=R \tag{16}$$

ここで H は水面高さ $(=D+R)$，$\boldsymbol{u}$ は流速ベクトル $(=(u,v))$ である．また $\boldsymbol{e}_{ts}$ および $\boldsymbol{e}_{ns}$，$\boldsymbol{e}_{tr}$ および $\boldsymbol{e}_{nr}$ はそれぞれ水面における接線および法線方向の単位ベクトル，底面における接線および法線方向の単位ベクトルであり，次式で与えられる．

$$\boldsymbol{e}_{ts}=\frac{(1,\partial H/\partial x)}{\sqrt{1+(\partial H/\partial x)^2}},\quad \boldsymbol{e}_{ns}=\frac{(-\partial H/\partial x,1)}{\sqrt{1+(\partial H/\partial x)^2}} \tag{17a, b}$$

$$\boldsymbol{e}_{tr}=\frac{(1,\partial R/\partial x)}{\sqrt{1+(\partial R/\partial x)^2}},\quad \boldsymbol{e}_{nr}=\frac{(-\partial R/\partial x,1)}{\sqrt{1+(\partial R/\partial x)^2}} \tag{17c, d}$$

また $\mathbf{T}$ は応力テンソルであり，次のように表される．

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}-P+T_{xx} & T_{xy}\\ T_{yx} & -P+T_{yy}\end{bmatrix} \tag{18}$$

次式で定義される流れ関数を導入する．

$$(U,V)=\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y},-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) \tag{19}$$

このとき，式 (1) および式 (2) は次のように書き直される．

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=-\frac{\partial P}{\partial x}+1 +\frac{\partial}{\partial x}\left(2\nu_T\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_T\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)\right] \tag{20}$$

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}-S^{-1} +\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu_T\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(2\nu_T\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right) \tag{21}$$

上式から圧力 P を消去して次式を得る．

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial y}-4\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\nu_T\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right) +\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\nu_T\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)\right]=0 \tag{22}$$

3.4 座標変換

次のような座標変換を導入する．

$$(\xi,\eta)=\left(x,\frac{y-R(x)}{D(x)}\right) \tag{23}$$

上式の座標変換によって，河床底面および水面での境界条件の適用が容易になる．

4. 線形安定解析

4.1 摂動展開

基本解に対して摂動を与える．各変数を次のように展開する．

$$(\Psi,D,Z,R,B)=(\Psi_0,1,0,R_0,B_0) +A\left(\hat{\Psi}_1,\hat{D}_1,\hat{R}_1,\hat{R}_1,\hat{R}_1\right)+\text{c.c.} \tag{24a}$$

$$\left(\hat{\Psi}_1,\hat{P}_1,\hat{D}_1,\hat{R}_1\right)=(\Psi_1,P_1,D_1,R_1)\exp[\mathrm{i}(\alpha\xi-\Omega t)] \tag{24b}$$

ここで A は摂動の振幅を表すパラメータであり，線形安定解析のスキームでは無限小と考える．また c.c. は直前の項の複素共役を表し，α および Ω はそれぞれ擾乱の波数および角周波数である．上式を支配方程式および境界条件に代入して，$O(1)$ および $O(A)$ について整理する．

$O(1)$ では次のような解が得られる．

$$P_0(\eta)=S^{-1}(1-\eta) \tag{25}$$

$$\Psi_0(\eta)=\frac{1}{\kappa}\left[(R+\eta)\ln\left(\frac{R+\eta}{R}\right)-\eta\right] \tag{26}$$

$O(A)$ では式 (20) および (22) から次のような式が得られる．

$$\mathrm{i}\alpha P_1(\eta)+\mathcal{P}^{\Psi}(\eta)\Psi_1(\eta)+\mathcal{P}^{D}(\eta)D_1+\mathcal{P}^{R}(\eta)R_1=0 \tag{27}$$

$$\mathcal{L}^{\Psi}(\eta)\Psi_1(\eta)+\mathcal{L}^{D}(\eta)D_1+\mathcal{L}^{R}(\eta)R_1=0 \tag{28}$$

ここで $\mathcal{P}$ および $\mathcal{L}$ はそれぞれ式 (20) および (22) から得られる線形演算子である．

$O(A)$ では境界条件 (12)–(16) から以下の式が得られる．

$$\Psi_1(1)=0,\quad P_1(1)=0 \tag{29a, b}$$

$$\Psi_1(0)=0,\quad \mathcal{D}\Psi_1(0)=0 \tag{29c, d}$$

ここで $\mathcal{D}=\partial/\partial\eta$，また式 (14) は常に成立するため必要ないことに注意する．

流れ関数 Ψ_1 を Chebyshev 多項式展開を用いて次のように展開する．

$$\Psi_1=\sum_{n=0}^{N}a_nT_n(\zeta) \tag{30}$$

ここで，T_n および a_n は n 次の Chebyshev 多項式およびその係数，ζ は Chebyshev 多項式の変数であり，その値の範囲は [-1,1] でなければならない．よって河床面 $(\eta=0)$ で $\zeta=-1$，水面 $(\eta=1)$ で $\zeta=1$ となるように，ζ に対して次のような変換を行う．

$$\zeta=\frac{2\ln\left[(\eta+R_0)/R_0\right]}{\ln\left[(1+R_0)/R_0\right]}-1 \tag{31}$$

式 (28) を次の Gauss-Lobatto 点で評価する．

$$\zeta_j=\cos(j\pi/N),\quad (j=1,2,\cdots,N-2) \tag{32}$$

以上を整理すると，次のような線形代数方程式系が得られる．

$$\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{l}R_1 \tag{33a}$$

ここで

$$\boldsymbol{a}=[a_0,a_1,\cdots,a_N,D_1] \tag{33b}$$

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} \check{\mathcal{P}}^{\Psi}T_0(1) & \cdots & \check{\mathcal{P}}^{\Psi}T_N(1) & \check{\mathcal{P}}^{D}(1) \\ T_0(1) & \cdots & T_N(1) & 0 \\ \check{\mathcal{L}}^{\Psi}T_0(\zeta_1) & \cdots & \check{\mathcal{L}}^{\Psi}T_N(\zeta_1) & \check{\mathcal{L}}^{D}(\zeta_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \check{\mathcal{L}}^{\Psi}T_0(\zeta_{N-2}) & \cdots & \check{\mathcal{L}}^{\Psi}T_N(\zeta_{N-2}) & \check{\mathcal{L}}^{D}(\zeta_{N-2}) \\ \check{\mathcal{D}}T_0(-1) & \cdots & \check{\mathcal{D}}T_N(-1) & 0 \\ T_0(-1) & \cdots & T_N(-1) & 0 \end{bmatrix} \tag{33c}$$

$$\boldsymbol{l}=\left[-\check{\mathcal{P}}^{R},0,-\check{\mathcal{L}}^{R}(\zeta_1),\cdots,-\check{\mathcal{L}}^{R}(\zeta_{N-2}),0,0\right] \tag{33d}$$

ここで$\check{}$はηをζに座標変換した線形演算子である．$\mathbf{L}$は$(N+1)\times(N+1)$行列であり，上から1行目および2行目は水面における境界条件(29a)および(29b)であり，3行目からN行目までは流れの方程式(28)をGauss-Lobatto点で評価したものであり，最後の2行は底面における境界条件(29c)および(29d)である．$\mathbf{L}$は正則であるので，式(33a)は容易に解けて次のようになる．

$$\boldsymbol{a}=\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{l}R_1 \tag{34}$$

したがってΨ_1およびD_1は次のように表される．

$$\Psi_1=\tilde{\Psi}_1(\zeta)R_1,\quad \tilde{\Psi}_1(\zeta)=\sum_{n=0}^{N}\left\langle\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{l}\right\rangle_{n+1}T_n(\zeta) \tag{35a, b}$$

$$D_1=\tilde{D}_1R_1,\quad \tilde{D}_1=\left\langle\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{l}\right\rangle_{N+2} \tag{36a, b}$$

すなわちいずれも基準面高さの摂動R_1を因数として持つことが分かる．

4.2 掃流砂の摂動展開

掃流砂についても同様にして以下のように摂動展開を行う．

$$\Phi=\Phi_0+A\Phi_1\exp\left[\mathrm{i}(\alpha\xi-\Omega t)\right] \tag{37}$$

ここでΦはΨおよびD, Rで表されることから，次のように表すことができる．

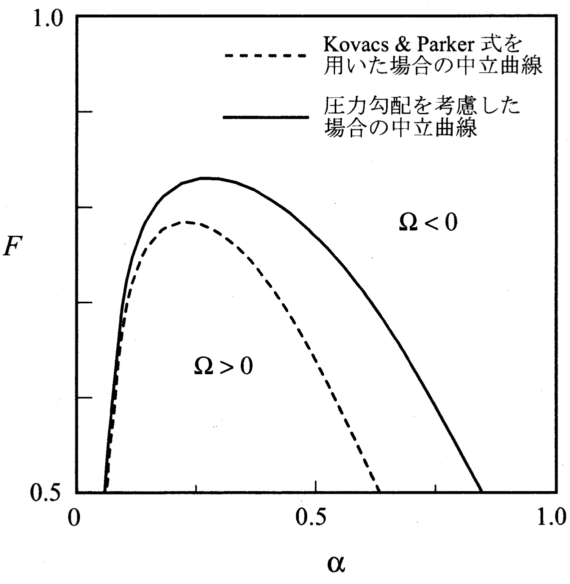
$$\Phi_1=\Phi_{,\Psi_0}\Psi_1(\zeta_b)+\Phi_{,D_0}D_1+\Phi_{,R_0}R_1 \tag{38}$$

ここでζ_bは$\eta=B_0$に対応するζ座標であり，$\Phi_{,\Psi_0}=\Phi_{,\Psi}|_{\Psi=\Psi_0}$および$\Phi_{,D_0}=\Phi_{,D}|_{D=1}$，$\Phi_{,R_0}=\Phi_{,R}|_{R=R_0}$である．上式をExner方程式に代入すると$\Omega$が次のように得られる．

$$\Omega=\mathrm{i}\alpha\left[\Phi_{,\Psi_0}\tilde{\Psi}_1(\zeta_b)+\Phi_{,D_0}\tilde{D}_1+\Phi_{,R_0}\right] \tag{39}$$

結局，増幅率Ωは次のような形に帰着できる．

$$\Omega=f(\alpha,F;C,\mu_c) \tag{40}$$



図–2 中立曲線図（$C^{-1}=20,\mu_c=0.84$）

ここで，FおよびCはそれぞれFroude数および抵抗係数であり，流速を底面から水面まで積分した次の式で関係付けられる．．

$$C^{-1}=\frac{F}{S^{1/2}}=\frac{U^*_{a0}}{U^*_{f0}}=\frac{1}{\kappa}\left[(1+R_0)\ln\left(\frac{1+R_0}{R_0}\right)-1\right] \tag{41}$$

ここでU^*_{a0}は基本状態における水深平均流速である．

4.3 解析結果

図–2は，ここで行った圧力勾配を考慮した掃流砂量式を用いた線形安定解析結果をα–F平面上に表したものである．図の実線が圧力勾配を考慮した場合の中立曲線であり，破線は圧力勾配を考慮しないKovacs & Parker[1)]の式を用いた場合の中立曲線である．図中$\Omega>0$の領域がデューンの発生領域である．圧力勾配の影響によって，デューンの発生領域は波数αおよびFroude数Fのより大きい領域へ広がっているのが分かる．また，デューン発生の臨界Froude数およびそれに対応する卓越波数の値が大きくなっている．

5. 弱非線形安定解析

5.1 摂動展開

増幅率展開法および多重尺度法を用いて弱非線形安定解析を行う．Froude数Fを臨界Froude数F_cの近傍で次のように展開する．

$$F=F_c-\epsilon^2F_c \tag{42}$$

同時に遅い時間T_1を導入する．

$$T_0=T,\quad T_1=\epsilon^2T \tag{43a, b}$$

ここでT_1はTがϵ^{-2}程度になって初めて1のオーダーになる，“ゆっくりと経過する時間”を表している．そ

のとき時間微分は次のように表される．

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial T_0}{\partial T}\frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{\partial T_1}{\partial T}\frac{\partial}{\partial T_1} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial T_1} \tag{44}$$

各変数を次のように展開する．

$$(\Psi, D, R) = (\Psi_0, 1, R_0) + \sum_{i=1}^{3}\epsilon^i(\Psi_i, D_i, R_i) \tag{45}$$

上式を支配方程式および境界条件に代入し，ϵ のオーダーで整理すると，各々のオーダーの方程式系が得られる．$O(\epsilon)$ では，線形安定解析で与えた次式で表されるような基本擾乱を与える．

$$(\Psi_1, D_1, R_1) = A\,(\Psi_{11}, D_{11}, R_{11})\,E + \mathrm{c.c.} \tag{46}$$

ここで $E = \exp[i(\alpha_c\xi - \Omega_c t)]$ であり，α_c および Ω_c は臨界フルード数に対応する波数および複素角周波数である．すると $O(\epsilon^2)$ および $O(\epsilon^3)$ における解はそれぞれ次のような形を有していることが予想される．

$$(\Psi_2, D_2, R_2) = A^2(\Psi_{22}, D_{22}, R_{22})E^2 + \mathrm{c.c.} + A\bar{A}(\Psi_{20}, D_{20}, R_{20}) + (\Psi_{00}, 0, R_{00}) \tag{47}$$

$$(\Psi_3, D_3, R_3) = A^3(\Psi_{33}, D_{33}, R_{33})E^3 + \mathrm{c.c.} + A^2\bar{A}(\Psi_{31}, D_{31}, R_{31})E + \mathrm{c.c.} \tag{48}$$

式 (45)–(48) を式 (20) および (22)，(29) に代入して整理すると，ϵ の各オーダーにおいて次のような式が得られる．

$O(\epsilon)$:

$$\mathcal{L}_1^{\Psi}\Psi_{11} + \mathcal{L}_1^{D}D_{11} + \mathcal{L}_1^{R}R_{11} = 0 \tag{49}$$

$$\Psi_{11}(1) = 0 \tag{50}$$

$$\mathcal{P}_1^{\Psi}\Psi_{11}(1) + \mathcal{P}_1^{D}(1)D_{11} + \mathcal{P}_1^{R}(1)R_{11} = 0 \tag{51}$$

$$\Psi_{11}(0) = 0 \tag{52}$$

$$\mathcal{D}\Psi_{11}(0) = 0 \tag{53}$$

$O(\epsilon^2)$:

$$\mathcal{L}_2^{\Psi}\Psi_{22} + \mathcal{L}_2^{D}D_{22} + \mathcal{L}_2^{R}R_{22} = \mathcal{M}_{22}R_{11}^2 \tag{54}$$

$$\Psi_{22}(1) = 0 \tag{55}$$

$$\mathcal{P}_2^{\Psi}\Psi_{22}(1) + \mathcal{P}_2^{D}(1)D_{22} + \mathcal{P}_2^{R}(1)R_{22} - Q_{22}(1)R_{11}^2 \tag{56}$$

$$\Psi_{22}(0) = 0 \tag{57}$$

$$\mathcal{D}\Psi_{22}(0) = 0 \tag{58}$$

$$\mathcal{L}_0^{\Psi}\Psi_{20} + \mathcal{L}_0^{D}D_{20} + \mathcal{L}_0^{R}R_{20} = \mathcal{M}_{20}R_{11}\bar{R}_{11} \tag{59}$$

$$\Psi_{20}(1) = 0 \tag{60}$$

$$\mathcal{P}_0^{\Psi}\Psi_{20}(1) + \mathcal{P}_0^{D}(1)D_{20} + \mathcal{P}_0^{R}(1)R_{20} = Q_{20}(1)R_{11}\bar{R}_{11} \tag{61}$$

$$\Psi_{20}(0) = 0 \tag{62}$$

$$\mathcal{D}\Psi_{20}(0) = 0 \tag{63}$$

$O(\epsilon^3)$:

$$\mathcal{L}_3^{\Psi}\Psi_{31} + \mathcal{L}_3^{D}D_{31} + \mathcal{L}_3^{R}R_{31} = \mathcal{M}_{31}^{(2)}R_{22}\bar{R}_{11} + \mathcal{M}_{31}^{(1)}R_{11}^2\bar{R}_{11} + \mathcal{M}_{31}^{(0)}R_{11} \tag{64}$$

$$\Psi_{31}(1) = 0 \tag{65}$$

$$\mathcal{P}_3^{\Psi}\Psi_{31}(1) + \mathcal{P}_3^{D}D_{31}(1) + \mathcal{P}_3^{R}R_{31}(1) = Q_{31}^{(2)}(1)R_{22}\bar{R}_{11} + Q_{31}^{(1)}(1)R_{11}^2\bar{R}_{11} + Q_{31}^{(0)}(1)R_{11} \tag{66}$$

$$\Psi_{31}(0) = 0 \tag{67}$$

$$\mathcal{D}\Psi_{31}(0) = 0 \tag{68}$$

ここで $\mathcal{L}_n^j$ および $\mathcal{P}_n^j$ ($j = \Psi, D, R;\ n = 1, 2, 3$) はそれぞれ $\mathcal{L}^j$ および $\mathcal{P}^j$ において $\Omega = \Omega_c$ および $(F, \alpha) = (F_c, n\alpha_c)$ とした線形演算子，$\mathcal{M}_{ij}$ および Q_{ij} ($(i, j) = (1,1), (2,2), (2,0), (3,1)$) はより低次の解からなる非同次項を表している．

5.2 数値解法

線形安定解析のときと同様にして，Chebyshev 多項式展開を用いたスペクトルコロケーション法で解く．Ψ_{ij} を次のように展開する．

$$\Psi_{ij} = \sum_{n=0}^{N} a_n^{(ij)}T_n(\zeta) \tag{69}$$

上式を式 (49)–(68) に代入すると，一連の線形代数方程式系が得られる．

$O(\epsilon)$ では次式が得られる．

$$\mathbf{L}_1\boldsymbol{a}_{11} = \boldsymbol{l}_1 R_{11} \tag{70}$$

ここで $\boldsymbol{a}_{11} = (a_0^{(ij)}, a_1^{(ij)}, \cdots, a_N^{(ij)}, D_{ij})^T$，$\mathbf{L}_n$ は $\mathbf{L}$ において $\Omega = \Omega_c$ および $(F, \alpha) = (F_c, n\alpha_c)$ とした行列を表している．上式は容易に解けて次のようになる．

$$\boldsymbol{a}_{11} = \mathbf{L}_1^{-1}\boldsymbol{l}_1 R_{11} \tag{71}$$

よって Ψ_{11} および D_{11} は次のように表せる．

$$\Psi_{11} = \tilde{\Psi}_{11}R_{11}, \quad D_{11} = \tilde{D}_{11}R_{11} \tag{72a, b}$$

$O(\epsilon^2)$ では次式が得られる．

$$\mathbf{L}_2\boldsymbol{a}_{22} = \boldsymbol{l}_2 R_{22} + \boldsymbol{m}_{22}R_{11}^2 \tag{73}$$

$$\mathbf{L}_0\boldsymbol{a}_{20} = \boldsymbol{l}_2 R_{20} + \boldsymbol{m}_{20}R_{11}\bar{R}_{11} \tag{74}$$

ここで

$$\boldsymbol{m}_{ij} = \left[\check{Q}_{ij}, 0, \check{\mathcal{M}}_{ij}(\zeta_1), \cdots, \check{\mathcal{M}}_{ij}(\zeta_{N-2}), 0, 0\right]^T \tag{75}$$

式 (73) および (74) を解くと次のようになる．

$$\boldsymbol{a}_{22} = \mathbf{L}_2^{-1}\boldsymbol{l}_2 R_{22} + \mathbf{L}_2^{-1}\boldsymbol{m}_{22}R_{11}^2 \tag{76}$$

$$\boldsymbol{a}_{20} = \mathbf{L}_0^{-1}\boldsymbol{l}_0 R_{20} + \mathbf{L}_0^{-1}\boldsymbol{m}_{20}R_{11}\bar{R}_{11} \tag{77}$$

よって Ψ_{22} および D_{22}，Ψ_{20}，D_{20} は次のように表せる．

$$\Psi_{22} = \tilde{\Psi}_{22}^{(2)}R_{22} + \tilde{\Psi}_{22}^{(1)}R_{11}^2, \quad D_{22} = \tilde{D}_{22}^{(2)}R_{22} + \tilde{D}_{22}^{(1)}R_{11}^2 \tag{78a, b}$$

$$\Psi_{20} = \tilde{\Psi}_{20}^{(2)}R_{20} + \tilde{\Psi}_{20}^{(1)}R_{11}\bar{R}_{11}, \quad D_{20} = \tilde{D}_{20}^{(2)}R_{20} + \tilde{D}_{20}^{(1)}R_{11}\bar{R}_{11} \tag{78c, d}$$

$O(\epsilon^3)$ では次式が得られる．

$$\mathbf{L}_1\boldsymbol{a}_{31} = \boldsymbol{l}_1 R_{31} + \boldsymbol{m}_{31}^{(2)}R_{22}\bar{R}_{11} + \boldsymbol{m}_{31}^{(1)}R_{11}^2\bar{R}_{11} + \boldsymbol{m}_{31}^{(0)}R_{11} \tag{79}$$

ここで

$$\boldsymbol{m}_{ij}^{(n)} = \left[\check{Q}_{ij}^{(n)}, 0, \check{\mathcal{M}}_{ij}^{(n)}(\zeta_1), \cdots, \check{\mathcal{M}}_{ij}^{(n)}(\zeta_{N-2}), 0, 0\right]^T \tag{80}$$

式 (79) を解くと次のようになる．

$$\boldsymbol{a}_{31} = \mathbf{L}_1^{-1} \boldsymbol{l}_1 R_{31} + \mathbf{L}_1^{-1} \boldsymbol{m}_{31}^{(2)} R_{22} \bar{R}_{11} + \mathbf{L}_1^{-1} \boldsymbol{m}_{31}^{(1)} R_{11}^2 \bar{R}_{11} + \mathbf{L}_1^{-1} \boldsymbol{m}_{31}^{(0)} R_{11} \quad (81)$$

よって Ψ_{22} および D_{22} は次のように表せる．

$$\Psi_{31} = \tilde{\Psi}_{31}^{(3)} R_{31} + \tilde{\Psi}_{31}^{(2)} R_{22} \bar{R}_{11} + \tilde{\Psi}_{31}^{(1)} R_{11}^2 \bar{R}_{11} + \tilde{\Psi}_{31}^{(0)} R_{11} \quad (82a)$$

$$D_{22} = \tilde{D}_{31}^{(3)} R_{31} + \tilde{D}_{31}^{(2)} R_{22} \bar{R}_{11} + \tilde{D}_{31}^{(1)} R_{11}^2 \bar{R}_{11} + \tilde{D}_{31}^{(0)} R_{11} \quad (82b)$$

掃流砂量 Φ は Ψ および D, R とそれらの積であるので，Φ は次のように表せる．

$$\Phi = \Phi_0 + \epsilon A \Phi_{11} E + \epsilon^2 \left(A^2 \Phi_{22} E^2 + A \bar{A} \Phi_{20} + \Phi_{00} \right) + \epsilon^3 \left(A^3 \Phi_{33} E^3 + A^2 \bar{A} \Phi_{31} E + A \Phi_{11}^{\star} E \right) \quad (83a)$$

ここで

$$\Phi_{11} = \tilde{\Phi}_{11} R_{11} \quad (83b)$$

$$\Phi_{22} = \tilde{\Phi}_{22}^{(2)} R_{22} + \tilde{\Phi}_{22}^{(1)} R_{11}^2 \quad (83c)$$

$$\Phi_{20} = \tilde{\Phi}_{20}^{(2)} R_{20} + \tilde{\Phi}_{20}^{(1)} R_{11} \bar{R}_{11} \quad (83d)$$

$$\Phi_{31} = \tilde{\Phi}_{31}^{(3)} R_{31} + \tilde{\Phi}_{31}^{(2)} R_{22} \bar{R}_{11} + \tilde{\Phi}_{31}^{(1)} R_{11}^2 \bar{R}_{11} + \tilde{\Phi}_{31}^{(0)} R_{11} \quad (83e)$$

$$\Phi_{11}^{\star} = \tilde{\Phi}_{11}^{\star} R_{11} \quad (83f)$$

上式を Exner 方程式 (8) に代入すると ϵ のそれぞれのオーダーで次式が得られる．

$O(\epsilon)$:

$$-\mathrm{i}\Omega R_{11} + \mathrm{i}\alpha \tilde{\Phi}_{11} R_{11} = 0 \quad (84)$$

$O(\epsilon^2)$:

$$-2\mathrm{i}\Omega R_{22} + 2\mathrm{i}\alpha \left(\tilde{\Phi}_{22}^{(2)} R_{22} + \tilde{\Phi}_{22}^{(1)} R_{11}^2 \right) = 0 \quad (85)$$

$O(\epsilon^3)$:

$$R_{11} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T_1} - \mathrm{i}\Omega_c A^2 \bar{A} R_{31} + \mathrm{i}\alpha_c A^2 \bar{A} \left(\tilde{\Phi}_{31}^{(3)} R_{31} + \tilde{\Phi}_{31}^{(2)} R_{22} \bar{R}_{11} + \tilde{\Phi}_{31}^{(1)} R_{11}^2 \bar{R}_{11} \right) + \mathrm{i}A \tilde{\Phi}_{11}^{\star} R_{11} = 0 \quad (86)$$

式 (86) が Landau 方程式であり，第一 Landau 定数は次のように得られる．

$$\lambda_1 = \mathrm{i}\Omega_c R_{31} R_{11}^{-1} - \mathrm{i}\alpha_c \left(\tilde{\Phi}_{31}^{(3)} R_{31} R_{11}^{-1} + \tilde{\Phi}_{31}^{(2)} R_{22} R_{11}^{-1} \bar{R}_{11} + \tilde{\Phi}_{31}^{(1)} R_{11} \bar{R}_{11} \right) \quad (87)$$

5.3 結果および考察

表–1 に線形解析より得られた臨界 Froude 数および弱非線形安定解析より得られた Landau 定数を示す．**表–1** は重力による局所勾配の影響を考慮した Kovacs & Parker の式を掃流砂量式として用いた場合の弱非線形安定解析結果であり，**表–2** は本論文で用いた圧力勾配の影響を取り入れた掃流砂量式 (9) を用いた場合の結果である．表を見ると Kovacs & Parker 式を用いた場合 (**表–1**) は求められたランダウ定数 λ_1 の実部の値がほとんどのケースで負の値であるのに対して，圧力勾配を考慮した式を用いた**表–2** では $C^{-1} = 20$ および 21 のケースで λ_1 の実部が正となっているのがわかる．このことは Kovacs & Parker 式を用いるとデューン–平坦床遷移の分岐形態は超臨界分岐であるが，圧力勾配の影響を考慮すると亜臨界分岐となることを示している．

表–1 弱非線形安定解析結果 (Kovacs & Parker の式を用いた場合)

C^{-1}	μ_c	α	F_c	$Re[\Omega]$	$Re[\lambda_0]$	$Re[\lambda_1]$
20	0.84	0.194	0.7994	10.2	9.6	−3828
20	0.84	0.204	0.7996	10.9	10.2	−5488
20	0.84	0.214	0.7994	11.5	10.8	−6950
21	0.84	0.215	0.8261	23.9	25.5	−5715
21	0.84	0.225	0.8262	25.2	26.9	−9272
21	0.84	0.235	0.8261	26.5	28.2	−12390
22	0.84	0.235	0.8485	53.5	65.2	3273
22	0.84	0.245	0.8487	56.3	68.5	−3559
22	0.84	0.255	0.8485	59	71.7	−9537

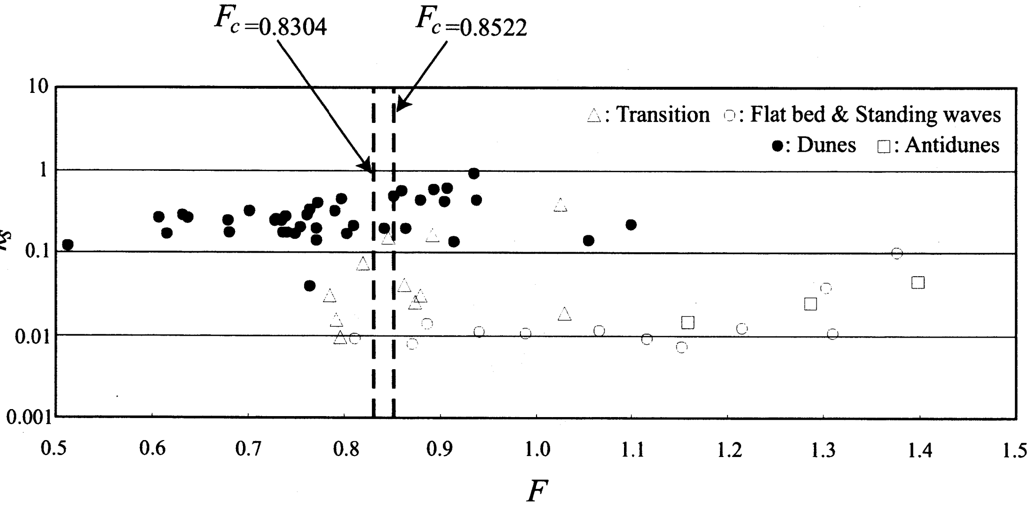
表–2 弱非線形安定解析結果 (圧力勾配を考慮した掃流砂量式 (9) を用いた場合)

C^{-1}	μ_c	α	F_c	$Re[\Omega]$	$Re[\lambda_0]$	$Re[\lambda_1]$
20	0.84	0.239	0.8303	10.2	11.9	10986
20	0.84	0.249	0.8304	10.7	12.5	16550
20	0.84	0.259	0.8304	11.2	13.1	24710
21	0.84	0.261	0.8521	23.2	31.1	714171
21	0.84	0.271	0.8522	24.3	32.6	719476
21	0.84	0.281	0.8521	25.4	34.1	511166
22	0.84	0.276	0.8699	49.4	76.3	-2.67×10^8
22	0.84	0.286	0.87	51.7	80.0	-5.22×10^8
22	0.84	0.269	0.8699	53.9	83.6	-9.01×10^8

6. 実験結果との比較

Guy ら[10)]が行ったデューンの実験結果のうち，$19 < C^{-1} < 21$ の範囲のデータを泉ら[4)]が再構成したものを**図–3** に示す．線形安定解析では，平坦床に対し微小な擾乱を与えることによって基本状態である平坦床の安定性を調べるものであることから，泉ら[4)]は，線形安定解析の支配パラメータとしては，デューンが生じる前の平坦床に対応するフルード数が適当であることを指摘している．**図–3** 中のフルード数 F は，Guy ら[10)]が行ったデューン形成時の実験データを用いて計算された，デューンが形成される前の平坦床に対応したフルード数である．また k_s は水深で無次元化した無次元粗度高さであり，粗度高さは実測された平均流速および水深，河床勾配から逆算したものである．

図を見ると，実験データは明らかに異なる二つのグループに分けられることが分かる．一つは $k_s = 0.1$ から 1 の間に位置するデータ群でありデューンに対応している．もう一つは $k_s \approx 0.01$ 付近に存在しているデータ群であり平坦床に対応している．そして遷移域のデー



図–3 Guy ら[10]の実験結果との比較．実験データ範囲は $19 < C^{-1} < 21$，解析から得られた最大臨界フルード数は $C^{-1}=20$ および 21，m=2.5 のときそれぞれ $F_c = 0.8304$ および $F_c = 0.8522$ である

タがデューンと平坦床の間に存在している様子がわかる．ここで注目すべきは $F = 0.8 \sim 0.9$ の範囲では同じ Froude 数に対してデューンと平坦床の二つの河川形態が存在していることである．これは $F = 0.8 \sim 0.9$ の範囲に二つの安定解（デューンと平坦床）が存在し得ることを示唆している．

解析結果からは，河床形状抵抗の逆数 C^{-1} =20 および 21 のときデューン–平坦床遷移の分岐形態は亜臨界分岐であることが明らかとなった．解析から得られる最大臨界 Froude 数は $20 < C^{-1} < 21$ の範囲で 0.8304 ~ 0.8522 であり．実験から推定される最大臨界 Froude 数 0.8 より若干大きいが，**図–3** において同一 Froude 数の下で異なる河床形態が現れる事実は本解析結果を裏付けるものである．

7. 結論

河床波（デューン）の形成時に見られるフルード数と河床形態の二価性を説明するために，Colombini[11]が用いた混合距離理論とデューンの発生に伴って生じる圧力勾配の影響を考慮した掃流砂量式を用いて線形安定解析および弱非線形安定解析を行った．局所勾配の影響のみを考慮した Kovacs & Parker 式を適用した場合と比べて，デューン発生領域は波数 α および Froude 数 F がより大きい領域へ広がっており，デューン発生の臨界 Froude 数およびそれに対応する卓越波数の値が大きくなることが明らかとなった．弱非線形安定解析結果からは Kovacs & Parker 式を用いるとデューン-平坦床遷移の分岐形態は超臨界分岐となるが，圧力勾配の影響を考慮すると亜臨界分岐となることが明らかとなった．この理論解析結果は Guy [10]らの実験結果と比較しても，良好に一致することがわかった．

参考文献

1) Kovacs, A. & Parker, G.: A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 267, pp. 153–183, 1994.
2) 山口里実，泉　典洋: 圧力勾配を考慮した流砂量式によるデューンの弱非線形安定解析, 水工学論文集, 第 49 巻, pp. 937–942, 2005.
3) 山口里実，泉　典洋: デューン–平坦床遷移過程にみられる亜臨界分岐現象, 土木学会論文集, No. 740/II–64, pp. 75–94, 2003.
4) 泉　典洋, 山口里実: デューン-平坦床遷移再考, 土木学会論文集 B, Vol. 62, No. 4, pp. 360–375, 2006.
5) Engelund, F.: Instability of erodible beds, *J. Fluid Mech.*, Vol. 42, pp. 225–244, 1970.
6) Fredsøe, J.: On the development of dunes in erodible channel, *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, pp. 1–16, 1974.
7) 泉　典洋: 混合距離モデルを用いた河床デューンの弱非線形安定解析, 水工学論文集, 第 51 巻, pp. 1021–1026, 2007.
8) N. Izumi: Weakly nonlinear analysis of the dune-flat bed transition with the mixing length turbulent model, Proceedings of the 5th IAHR Symposium on River, Coastal and Estuarine Morphodynamics, pp. 1021–1028, 2007.
9) Colombini, M. & Stocchino, A.: Bifurcation patterns in dune and antidune instability, Proceedings of the 5th IAHR Symposium on River, Coastal and Estuarine Morphodynamics, pp. 949–960, 2007.
10) Guy, H. P., Simons, D. B. & Richardson, E. V.: Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956–1961, Geological Survey Professional Paper, 462-I, U.S.Government Printing Office, Washington, 1966.
11) Colombini, M.: Revisiting the linear theory of sand dunes formation, *J. Fluid Mech.*, Vol. 502, 1–16, 2004.

(2008 年 4 月 14 日 受付)