

管路における砂-水界面の安定性

Stability of sand-water boundary in pipes

関 陽平*・泉 典洋**

Yohei SEKI and Norihiro IZUMI

* 北海道大学大学院 工学研究科 (〒060-8628 北海道札幌市北区北 13 条)

** 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科 (〒060-8628 北海道札幌市北区北 13 条)

It is commonly known that the flat bed is unstable in open channels in the range of small and large Froude numbers, in which the presence of the free water surface is important to the instability. However, instability of the flat bed without free water surface has not been well understood. In this study, we perform a linear stability analysis of the boundary between sediment and water in pipes transporting sediment with the use of the mixing length turbulent model. The analysis reveals that the governing parameter is the Euler number, and that the boundary is unstable in the range of relatively small Euler numbers.

Key Words: linear stability analysis, dunes formation, pipe flow

キーワード: 線形安定解析, デューン形成, 管路流

1. はじめに

底面が砂などの移動床で構成されている開水路では, ある条件下において平坦床は不安定となり, 河床にはデューンやアンチデューンなどの河床波が形成されることが知られている. これらの河床波は, 河床形状と底面剪断力あるいは流砂量の間に生じる位相差が原因となって発生することが知られている¹⁾が, この際, 河床形状と水面形状の間にも位相差が生じる. このことから, デューンやアンチデューンの発生には自由水面の存在が重要であることが推測されるが, 自由表面の存在がどの程度重要であるかについては, 著者の知る限り判っていない. そこで本研究では, 自由水面の存在しない管路内における砂-水界面の安定性について, 理論的に明らかにすることを目的とする. 開水路における河床波の安定解析に倣い線形安定解析を行うことによって, 安定性を支配するパラメータを明らかにすると同時に, 砂-水界面が不安定となる条件を明らかにする.

2. 壁面からの影響

図-1 に示すように自由表面がない管路内流れを考える. 対象としている管路は以下の条件を満たすもの

とする. 管路は矩形断面で, なおかつ幅が高さに比べて十分に大きく, 勾配がないものとする. 勾配がないため, 流れは圧力差だけで生じる. さらに管路内の流れが定常である場合を考える.

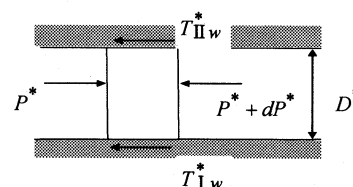


図-1 単位幅当たりに働く力の釣り合い

このとき, 図-1 で流下方向を x 軸とすると, 単位幅当たりの管路内の流体にかかる力のつりあいは以下の式で与えられる.

$$P^* D^* - (P^* + dP^*) D^* = (T_{Iw}^* - T_{IIw}^*) dx^* \quad (1)$$

ここで上付きのアスタリスクは次元を持つ量を表し, 下の壁面から影響を受ける範囲を領域 I, 上の壁面から影響を受ける範囲を領域 II とする. 式(1)で D^* は管の直径, P^* , T_{Iw}^* および T_{IIw}^* は圧力および壁面での剪断力をそれぞれ表している. 式(1)を変形すると式(2)が得られ, 管の直径, 圧力勾配および壁面剪断力の間の関係を示している.

$$-\frac{dP^*}{dx^*} D^* = T_{Iw}^* + T_{IIw}^* \quad (2)$$

次に図-2に示すように、微小要素の流体に着目すると、微小要素に働く剪断力と圧力の力の釣り合いから、次式が得られる。

$$P^* dy^* - (P^* + dP^*) dy^* + T_{xy}^* dx - (T_{xy}^* + dT_{xy}^*) dx = 0 \quad (3)$$

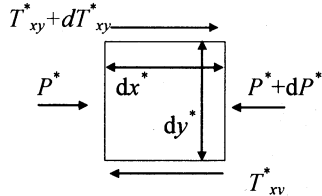


図-2 微小要素に作用する力の釣り合い

式(3)を変形すると次の式が得られる。

$$\frac{dT_{xy}^*}{dy^*} = - \left(- \frac{dP^*}{dx^*} \right) \quad (4)$$

ここで、圧力勾配 $-dP^*/dx^*$ は y^* 方向に対して一定であるので、式(4)より剪断力は y^* 方向の一次関数として表される。この式を上下それぞれの壁面から高さ方向に積分すると次の式がそれぞれ得られる。

$$T_{Ixy}^* = T_{Iw}^* - \left(- \frac{dP^*}{dx^*} \right) y_I, \quad T_{IIxy}^* = T_{IIw}^* - \left(- \frac{dP^*}{dx^*} \right) y_{II} \quad (5-a,b)$$

両式で剪断力が0になる高さ H^* を求めるとそれぞれ次のようになる。

$$H_I^* = T_{Iw}^* \left(- \frac{dP^*}{dx^*} \right)^{-1}, \quad H_{II}^* = T_{IIw}^* \left(- \frac{dP^*}{dx^*} \right)^{-1} \quad (6-a,b)$$

境界面までの高さを y^* とし、 y^* と管の直径との関係は次式で与えられる。

$$H_I^* + H_{II}^* = D^* \quad (7)$$

式(2)および式(7)を式(6-b)に代入すると次の関係が得られる。

$$D^* - H_I^* = D^* - T_{Iw}^* \left(- \frac{dP^*}{dx^*} \right)^{-1} \quad (8)$$

この式の中で右辺の第2項が式(6-a)の H_I^* と等しい。そのため、 H_I^* と H_{II}^* は同一の点であることがわかる。従って、この点を境にして壁面の影響を受ける領域を上下2つ別々に考えることが出来る。その様子を図-3に示す。

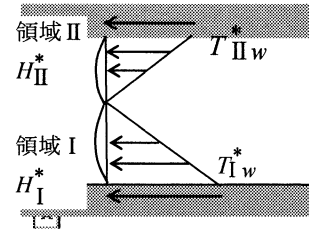


図-3 剪断力の分布

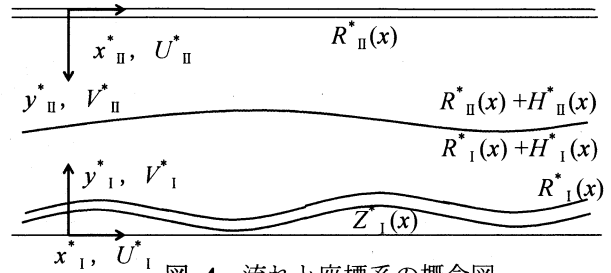


図-4 流れと座標系の概念図

3. 定式化

前節より、管路内の流れは剪断力分布により上下2つの領域に分けて考えることが出来る。今後、特に断りがない限り、支配方程式は2つの領域に共通であることに注意する。図-4では管路内の流れの座標系とその他の変数を示している。この図で x^* および y^* はそれぞれ流下方向、水深方向の座標系を表しており、 U^* および V^* はそれぞれ x^* 、 y^* 方向の流速を表している。 y^* はそれぞれ管壁に原点を持つ。 R^* は対数分布則で流速が0となる砂面からの高さを表し、以後、基準高さと呼ぶ。また、 H^* および Z^* は基準高さの位置からそれぞれ領域I、IIの境界面までの高さおよび砂面の高さを表している。

管路内の流れはそれぞれ無次元化を行った連続の式と Reynolds 平均をとった Navier-Stokes 方程式で表され、以下のようなになる。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (9)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

ここでは準定常の仮定を導入したため、非定常項を無視している。また、管路内の流れにおいて、以下の無次元化をすでに行っている。

$$(U^*, V^*, U_f^*) = U_{f0}^* (U, V, U_f) \quad (12-a)$$

$$(x^*, y^*, l^*, Z^*, R^*) = H_0^* (x, y, l, Z, R) \quad (12-b)$$

$$(P^*, T_{ij}^*) = \rho^* U_{f0}^{*2} (P, T_{ij}), \quad \nu^* = U_{f0}^* H_0^* \nu_T \quad (12-c,d)$$

式(12-a)において、 U_f^* は摩擦速度を表している。同様

に式(12-b)で、 l^* は混合距離を表し、式(12-c)で $T_{ij}^*(i, j = x, y)$ は Reynolds 応力、式(12-d)で ν_T^* は渦動粘性係数を表している。無次元化は ρ^* , H_0^* および U_{f0}^* を用いて行っている。 ρ^* は水の密度、 H_0^* は基準高さから境界面までの高さ、 U_{f0}^* は摩擦速度である。また添え字の 0 は平坦床等流状態を示している。無次元化で用いている U_{f0}^* は平坦床等流状態の圧力勾配を用いて以下のように表わされる。

$$U_{f0}^* = \sqrt{\frac{H_0^*}{\rho^*} \left(-\frac{dP_0}{dx} \right)} \quad (13)$$

式(9)および(10)に現れる Reynolds 応力は混合距離モデルを用いると、次のように表される。

$$\begin{aligned} T_{xx} &= 2\gamma_T \frac{\partial U}{\partial x}, \quad T_{yy} = 2\gamma_T \frac{\partial V}{\partial y}, \quad T_{xy} = \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ \nu_T &= l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, \quad l = \kappa(y-Z) \left(\frac{H-y}{H} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (14-a,b,c,d,e)$$

ここで、 κ はカルマン定数で 0.4 である

式(9)から(11)を解くために、流れ関数 Ψ を導入する。流れ関数を用いると、流速は以下のように表すことができる。

$$(U, V) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (15)$$

これを式 (9)に代入すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_T \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

同様に式(10)にも流れ関数を代入し、その式と式(16)から圧力 P を消去すると以下の 4 階の偏微分方程式が導き出される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial y} - 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\gamma_T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right) \\ + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\nu_T \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

上式を解くにあたり、底面および境界面での境界条件を適用しやすくするために、次のような変数変換を行う。

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y-R(x)}{H(x)} \quad (18)$$

上式より変数変換後の η は 0 から 1 の値をとる。無次元混合距離に対しても同様の変数変換を行うと、以下のように表すことができる。

$$l = \kappa H \left(\eta + \frac{R-Z}{H} \right) \left(1 - \frac{R}{H} - \eta \right)^{1/2} \quad (19)$$

式(17)に対しても同様の変数変換を行うが、式が複雑

なのでその結果はスペースの都合上、省略する。

それぞれの領域の底面と境界面で、次式を満たす境界条件を与える。

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{ns} = V_h \quad (\eta=1) \quad (20-a)$$

$$\mathbf{e}_{ts} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad (\eta=1) \quad (20-b)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{nb} = 0 \quad (\eta=0) \quad (20-c)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{tb} = 0 \quad (\eta=0) \quad (20-d)$$

ここで $\mathbf{u}$ は流速ベクトル(= (u, v)), $\mathbf{e}_{ms}$ および $\mathbf{e}_{ts}$ は境界面に対する法線および接線方向の単位ベクトル, $\mathbf{e}_{nb}$ および $\mathbf{e}_{tb}$ は底面に対する法線および接線方向の単位ベクトル, V_h は境界面における法線方向の流速であり、未知数として与えている。 $\mathbf{T}$ は応力テンソルで、次式のように表すことができる。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -P + T_{xx} & T_{xy} \\ T_{xy} & -P + T_{yy} \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここで、解くべき偏微分方程式は 4 階であるので 4 つの境界条件が必要である。しかし、境界条件の中に未知数 V_h が含まれるので、さらに条件が必要である。その条件は領域 I と II の境界面で与えられ、その条件を接続条件と呼ぶこととする。接続条件は 2 つあり、境界面において流速と圧力が連続であることである。まず、流速の接続条件は次のように表すことができる。

$$(U_I, V_I) = \gamma (U_{II}, -V_{II}) \quad (22)$$

上式で領域 I と II では、図-4 で示したように y 座標の正の向きが反対であり、領域 I の座標に適応させるため、 V_{II} に負号がついている。 γ は無次元化をした流速で表すために導入した値で、両領域の摩擦速度の比である。

$$\gamma = \frac{U_{If0}^*}{U_{IIf0}^*} = \sqrt{\left(\frac{U_{If0}^*}{U_{IIf0}^*} \right)^2} = \sqrt{\frac{H_{I0}^* + R_{I0}^*}{H_{II0}^* + R_{II0}^*}} \approx \sqrt{\frac{H_{I0}^*}{H_{II0}^*}} \quad (23)$$

上式中で基準高さ R は境界面までの高さ H に比べて非常に小さいため、無視した。無次元化を行った圧力を用いると、圧力の連続の条件は以下ようになる。

$$P_I = \gamma^2 P_{II} \quad (24)$$

4. 線形安定解析

流れ関数や圧力などに対して、次のような摂動展開を導入する。

$$(\Psi, P, H, Z, R, B) = (\Psi_0, P_0, 1, 0, R_0, B_0) + \varepsilon (\hat{\Psi}_1, \hat{P}_1, \hat{H}_1, \hat{Z}_1, \hat{R}_1, \hat{B}_1) \quad (25)$$

ここで、添え字の 0 と 1 はそれぞれ基本状態と摂動を与えた状態を表している。前記の摂動展開された各変数を式(17)に代入し、整理すると ε のオーダーごとにまとめることができる。

4.1 O(1)

O(1)では平坦床等流を基本状態と考えている。このとき、式(9)、(14-a)、(14-c)および(14-e)は次のように簡略化される。

$$-\frac{dP_0}{d\xi} + \frac{dT_{xy0}}{d\eta} = 0 \quad (26-a)$$

$$T_{xy0} = \nu T_0 \frac{dU_0}{d\eta} \quad (26-b)$$

$$\nu T_0 = l_0^2 \frac{dU_0}{d\eta} \quad (26-c)$$

$$l_0 = \kappa(\eta + R_0)(1 - R_0 - \eta)^{1/2} \quad (26-d)$$

上式で $-dP_0/d\xi$ は式(12-c)および(13)のため、1である。式(26-a,b,c,d)から U_0 を解くために次の境界条件を用いる。

$$U_0 = 0, \quad T_{xy0} = 1 - R_0 \quad (\eta = 0) \quad (27-a,b)$$

以上より、次の対数分布則を求めることができる。

$$U_0 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\eta + R_0}{R_0} \right) \quad (28)$$

前式と式(15)を変数変換したものをを用いて解くと Ψ_0 が得られる。また、上式を $\eta=0$ から1の間で積分すると、次の抵抗則が得られる。

$$C^{-1} = \frac{\bar{U}_0^*}{U_{f0}^*} = \frac{1}{\kappa} \left[(1 + R_0) \ln \left(\frac{1 + R_0}{R_0} \right) - 1 \right] \quad (29)$$

ここで C は抵抗係数であり、 $\bar{U}_0^*$ は平均流速を表している。

ここで、基本状態における基準高さ R_0 の値を検討する。まず、式(9)、(10)および(11)に対して変数変換を行わず、流速分布を求めると次の対数分布則になる。

$$U_0 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{k_s} \right) + 8.5 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{30y}{md_s} \right) \quad (30)$$

ここで k_s および d_s はそれぞれ H_0^* で無次元化した等価粗度高さおよび砂の粒径であり、 m は無次元化された等価粗度高さと粒径の比である。上式から U_0 が0となる高さ R_0 を求めると、 $R_0 = md_s/30$ となる。一般に等価粗度高さは粒径の1から3倍とされているため、 m は1から3の値をとる。そのとき、 R_0 は $d_s/30$ から $d_s/10$ までの値をとる。

4.2 O(ε)

O(ε)で各変数は次のようになる。

$$\varepsilon (\hat{\Psi}_1, \hat{P}_1, \hat{H}_1, \hat{Z}_1, \hat{R}_1, \hat{B}_1) = \varepsilon (\Psi_1, P_1, H_1, R_1, R_1, R_1) \exp[i(\alpha\xi - \Omega t)] \quad (31)$$

ここで ε 、 α および Ω はそれぞれ摂動を表す振幅、摂動の波数および複素角周波数である。ここで領域IIは固定床であるため、 $R_1=0$ となる。支配方程式に上式を

代入し、整理すると摂動項は次のようにまとめることができる。

$$\mathcal{L}^\Psi \Psi_1 + \mathcal{L}^H H_1 + \mathcal{L}^R R_1 = 0 \quad (32)$$

$$i\alpha P_1 + \mathcal{P}^\Psi \Psi_1 + \mathcal{P}^H H_1 + \mathcal{P}^R R_1 = 0 \quad (33)$$

ここで、 $\mathcal{L}^i$ および $\mathcal{P}^i$ ($i=\Psi, H, R$)は i に対しての線形演算子を表している。ただし、その詳細はスペースの都合上省略する。上式中でも、領域IIでは R_1 が0のため、式(32)の第3項と式(33)の第4項は0になる。同様の理由により、領域IIでは今後も R_1 に関する項は含まれない。

底面の境界条件を用いると次式が得られる。

$$\Psi_1(0) = 0, \quad \mathcal{D}\Psi_1(0) = 0 \quad (34-a,b)$$

ここで $\mathcal{D}$ は $d/d\eta$ を表している。境界面における法線方向の流速 V_h を $\varepsilon V_{h1} \exp[i(\alpha\xi - \Omega t)]$ と展開すると、 $V = -\Psi_{,\xi}$ であるから境界条件は次のようになる。

$$\Psi_1(1) = -V_{h1} \quad (35)$$

ここで $(\cdot)_{,\xi}$ は括弧内を ξ で偏微分することを表している。

Ψ_1 を求めるために Chebyshev 多項式展開によるスペクトル法を用いる。 Ψ_1 を次のように Chebyshev 多項式展開を行う。

$$\Psi_1 = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\zeta) \quad (36)$$

ここで $T_n(\zeta)$ は Chebyshev 多項式であり、 a_n は Chebyshev 多項式の係数である。ここで Chebyshev 多項式の定義域は $[-1, 1]$ であり、この定義域と変数変換後の領域とを対応させるために、次の変数変換を行う。

$$\zeta = \frac{2 \ln[(\eta + R_0)/R_0]}{\ln[(1 + R_0)/R_0]} - 1 \quad (37)$$

この変換で底面($\eta=0$)は $\zeta=-1$ に、境界面($\eta=1$)は $\zeta=1$ に対応する。これらを式(32)に用い、Gauss-Lobatto点でそれぞれ式を評価する。Gauss-Lobatto点は次のように表される。

$$\zeta_j = \cos \left(\frac{j\pi}{N} \right) \quad (j=0, 1, \dots, N) \quad (38)$$

式(32)と式(38)から次の $N+1$ 個の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_0 T_0(\zeta_0) + \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_1 T_1(\zeta_0) + \dots + \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_N T_N(\zeta_0) \\ & \quad + \tilde{\mathcal{L}}^H H_1 + \tilde{\mathcal{L}}^R R_1 = 0 \\ & \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_0 T_0(\zeta_1) + \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_1 T_1(\zeta_1) + \dots + \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_N T_N(\zeta_1) \\ & \quad + \tilde{\mathcal{L}}^H H_1 + \tilde{\mathcal{L}}^R R_1 = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_0 T_0(\zeta_{N-1}) + \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_1 T_1(\zeta_{N-1}) + \dots + \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_N T_N(\zeta_{N-1}) \\ & \quad + \tilde{\mathcal{L}}^H H_1 + \tilde{\mathcal{L}}^R R_1 = 0 \\ & \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_0 T_0(\zeta_N) + \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_1 T_1(\zeta_N) + \dots + \tilde{\mathcal{L}}^\Psi a_N T_N(\zeta_N) \\ & \quad + \tilde{\mathcal{L}}^H H_1 + \tilde{\mathcal{L}}^R R_1 = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

ここで $\tilde{\cdot}$ は η から ζ に変数変換を行った線形演算子である。境界条件は次のようになる。

$$a_0 T_0(-1) + a_1 T_1(-1) + a_2 T_2(-1) + \dots + a_{N-1} T_{N-1}(-1) + a_N T_N(-1) = 0 \quad (40)$$

$$a_0 \tilde{D}T_0(-1) + a_1 \tilde{D}T_1(-1) + a_2 \tilde{D}T_2(-1) + \dots + a_{N-1} \tilde{D}T_{N-1}(-1) + a_N \tilde{D}T_N(-1) = 0 \quad (41)$$

$$a_0 T_0(1) + a_1 T_1(1) + a_2 T_2(1) + \dots + a_{N-1} T_{N-1}(1) + a_N T_N(1) = 0 \quad (42)$$

式(39), (40), (41)および(42)に対してスペクトル法を用い, a_n を決定する。この3本の境界条件を式(39)の底面と境界面の式3つと交換し線形代数の操作を行い, a_n を決定することができる。式(39), (40), (41)および(42)を行列の形に整理すると, 次のようになる。

$$\mathbf{L}\mathbf{a} + \mathbf{h}H_1 + \mathbf{r}R = -\mathbf{v}V_{hl} \quad (43)$$

ここで $\mathbf{L}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{r}$ および $\mathbf{v}$ はそれぞれ次のように表される。

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} T_0(-1) & \dots & T_{N-1}(-1) & T_N(-1) \\ \tilde{D}T_0(-1) & \dots & \tilde{D}T_{N-1}(-1) & \tilde{D}T_N(-1) \\ T_0(1) & \dots & T_{N-1}(1) & T_N(1) \\ \tilde{L}^\psi T_0(\zeta_1) & \dots & \tilde{L}^\psi T_{N-1}(\zeta_1) & \tilde{L}^\psi T_N(\zeta_1) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \tilde{L}^\psi T_0(\zeta_{N-3}) & \dots & \tilde{L}^\psi T_{N-1}(\zeta_{N-3}) & \tilde{L}^\psi T_N(\zeta_{N-3}) \\ \tilde{L}^\psi T_0(\zeta_{N-2}) & \dots & \tilde{L}^\psi T_{N-1}(\zeta_{N-2}) & \tilde{L}^\psi T_N(\zeta_{N-2}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{L}^H \\ \vdots \\ \tilde{L}^H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{L}^R \\ \vdots \\ \tilde{L}^R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44, 45-a, b, c, d)$$

上式を解くと次式が得られる。

$$\mathbf{a} = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{h}H_1 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{r}R_1 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{v}V_{hl} \quad (46)$$

ベクトルの i 番目の成分を $\langle \cdot \rangle_i$ で表すと, 係数ベクトルの成分は次式で表される。

$$a_n = -\langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{h} \rangle_{n+1} H_1 - \langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{r} \rangle_{n+1} R_1 - \langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{v} \rangle_{n+1} V_{hl} \quad (47)$$

上式を式(36)に代入すると次式が成立する。

$$\Psi_1(\eta) = -\mathcal{M}^H H_1 - \mathcal{M}^R R_1 - \mathcal{M}^V V_{hl} \quad (48)$$

ここで

$$\mathcal{M}^H = \sum_{n=0}^N \langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{h} \rangle_{n+1} T_n(\zeta), \quad \mathcal{M}^R = \sum_{n=0}^N \langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{r} \rangle_{n+1} T_n(\zeta),$$

$$\mathcal{M}^V = \sum_{n=0}^N \langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{v} \rangle_{n+1} T_n(\zeta) \quad (49-a, b, c)$$

式(48)を式(33)に代入すると圧力 P は次のように表される。

$$P_1(\eta) = -\mathcal{N}^H H_1 - \mathcal{N}^R R_1 - \mathcal{N}^V V_{hl} \quad (50)$$

ここで

$$\mathcal{N}^H = i\alpha^{-1} [\mathcal{P}^\psi \mathcal{M}^H - \mathcal{P}^H], \quad \mathcal{N}^R = i\alpha^{-1} [\mathcal{P}^\psi \mathcal{M}^R - \mathcal{P}^R],$$

$$\mathcal{N}^V = i\alpha^{-1} \mathcal{P}^\psi \mathcal{M}^V \quad (51-a, b, c)$$

式(48)と(50)は領域 I と II でそれぞれ求めることができ, Ψ_1 や P_1 の中に含まれる H_1 , R_1 , V_{hl} は接続条件を用いて消去することができる。式(48)と $U_1 = \tilde{D}\Psi_1$ により, 接線方向の流速の接続条件は次のように書くことができる。

$$\tilde{D}_I \mathcal{M}^{H_I} H_{II} + \tilde{D}_I \mathcal{M}^{R_I} R_{II} + \tilde{D}_I \mathcal{M}^{V_I} V_{II} = \beta (\tilde{D}_{II} \mathcal{M}^{H_{II}} H_{III} + \tilde{D}_{II} \mathcal{M}^{V_{II}} V_{III}) \quad (52)$$

前述したように領域 II の R_1 に関する項がないことに注意する。また式(22)の関係より以下の関係が得られる。

$$V_{Ihl} = -\gamma V_{IIhl} \quad (53)$$

式(24)と領域 I と II の式(50)より次式が得られる。

$$\mathcal{N}^{H_I} H_{II} + \mathcal{N}^{R_I} R_{II} + \mathcal{N}^{V_I} V_{Ihl} = \gamma^2 (\mathcal{N}^{H_{II}} H_{III} + \mathcal{N}^{V_{II}} V_{IIhl}) \quad (54)$$

管路の高さと領域 I と II の境界面までの高さは次の関係を満たさなければならない。

$$R_I^* + H_I^* + R_{II}^* + H_{II}^* = D^* \quad (55)$$

ここで無次元化を行い, 摂動展開した項を代入すると $O(\varepsilon)$ の項で次の条件が求められる。

$$R_{II} + H_{II} + \gamma^2 H_{III} = 0 \quad (56)$$

式(52)と式(54)に対し, 式(53)と式(56)を用い H_{III}^* および V_{III}^* を消去すると, 以下のようになる。

$$(\tilde{D}_I \mathcal{M}^{H_I} + \gamma^{-1} \tilde{D}_{II} \mathcal{M}^{H_{II}}) H_{II} + (\tilde{D}_I \mathcal{M}^{R_I} + \gamma^{-1} \tilde{D}_{II} \mathcal{M}^{R_{II}}) R_{II} + (\tilde{D}_I \mathcal{M}^{V_I} + \gamma^{-1} \tilde{D}_{II} \mathcal{M}^{V_{II}}) V_{Ihl} = 0 \quad (57)$$

$$(\mathcal{N}^{H_I} + \mathcal{N}^{H_{II}}) H_{II} + (\mathcal{N}^{R_I} + \mathcal{N}^{R_{II}}) R_{II} + (\mathcal{N}^{V_I} + \mathcal{N}^{V_{II}}) V_{Ihl} = 0 \quad (58)$$

式(57)および(58)より H_1 および V_{hl} を R_1 で表すと次のようになる。

$$H_1 = \mathcal{H} R_1, \quad V_{hl} = \mathcal{V} R_1 \quad (59-a, b)$$

ここで $\mathcal{H}$ および $\mathcal{V}$ を次に示す。

$$\mathcal{H} = - \left(\frac{\tilde{D}_I \mathcal{M}^{H_I} + \gamma^{-1} \tilde{D}_{II} \mathcal{M}^{H_{II}}}{\tilde{D}_I \mathcal{M}^{V_I} + \tilde{D}_{II} \mathcal{M}^{V_{II}}} - \frac{\mathcal{N}^{H_I} + \mathcal{N}^{H_{II}}}{\mathcal{N}^{V_I} + \gamma \mathcal{N}^{V_{II}}} \right)^{-1}$$

$$\left(\frac{\tilde{D}_I \mathcal{M}^{R_I} + \gamma^{-1} \tilde{D}_{II} \mathcal{M}^{R_{II}}}{\tilde{D}_I \mathcal{M}^{V_I} + \tilde{D}_{II} \mathcal{M}^{V_{II}}} - \frac{\mathcal{N}^{R_I} + \mathcal{N}^{R_{II}}}{\mathcal{N}^{V_I} + \gamma \mathcal{N}^{V_{II}}} \right) \quad (60)$$

$$\mathcal{V} = - \left(\frac{\tilde{\mathcal{D}}_I M^{V_I} + \tilde{\mathcal{D}}_{II} M^{V_{II}}}{\tilde{\mathcal{D}}_I M^{H_I} + \gamma^{-1} \tilde{\mathcal{D}}_{II} M^{H_{II}}} - \frac{N^{V_I} + \gamma N^{V_{II}}}{N^{H_I} + \gamma N^{H_{II}}} \right)^{-1} \left(\frac{\tilde{\mathcal{D}}_I M^{R_I} + \gamma^{-1} \tilde{\mathcal{D}}_{II} M^{R_{II}}}{\tilde{\mathcal{D}}_I M^{H_I} + \gamma^{-1} \tilde{\mathcal{D}}_{II} M^{H_{II}}} - \frac{N^{R_I} + \gamma N^{R_{II}}}{N^{H_I} + \gamma N^{H_{II}}} \right) \quad (61)$$

このとき、 Ψ_1 は次に示すように R_1 のみを因数にもつ。

$$\Psi_1(\eta) = - (M^H \mathcal{H} + M^V \mathcal{V} + M^R) R_1 \quad (62)$$

5. 砂面変動と掃流砂量

流砂の連続式より砂面変動と単位幅当たりの掃流砂量の関係は次のように表される。

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial q_B}{\partial x} = 0 \quad (63)$$

ここで B は掃流層上面の高さ、 q_B は単位幅あたりの掃流砂量、 λ_p は間隙率である。この式に対して式(12-a,b,c,d)および式(18)より次のようになる。

$$\frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \quad (64)$$

$$t^* = T^* t, \quad T^* = \frac{(1 - \lambda_p) H_0^{*2}}{\sqrt{g R_s d_s^3}} \quad (65-a,b)$$

ここで Φ は無次元掃流砂量、 R_s は砂の水中比重、 t は T^* で無次元化された時間である。掃流砂量式は Colombini²⁾ に倣い、局所勾配の影響を考慮した Meyer-Peter and Müller 公式を用いる。

$$\Phi = 8(\theta_b - \theta_c)^{3/2} \quad (66)$$

$$\theta_b = \frac{\tau_b^*}{\rho R_s g d_s^*} = \frac{U_{f0}^{*2}}{R_s g d_s^*} \tau_b \quad (67)$$

$$\theta_c = \theta_{ch} + \mu \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \mu = \frac{\theta_{ch}}{\tan \Psi} \quad (68-a,b)$$

ここで θ_b , θ_c , θ_{ch} および Ψ はそれぞれ掃流層上面における Shields 数、限界 Shields 数、平坦床に対応する限界 Shields 数および砂の静止摩擦角である。Colombini³⁾ は底面で静止している粒子頂点から掃流層上面までの高さを掃流層厚さとし、次の関数で表した。

$$h_b = l_b d_s, \quad l_b = 1 + 1.3 \left(\frac{\tau_r - \tau_c}{\tau_c} \right)^m \quad (69)$$

ここで h_b は掃流層厚さを表している。また、 m の値は Lee&Hsu³⁾ は 0.575, Lee, You&Lin⁴⁾ は 0.511 としているが、Colombini²⁾ が用いた 0.55 を採用した。式(69)で τ_c および τ_r はそれぞれ無次元限界剪断力および基準高さにおける無次元剪断力である。また、掃流層上面の高さ B と無次元粒径の間には次の関係がある。

$$B = h_b + \frac{d_s}{6} = \left(l_b + \frac{1}{6} \right) d_s \quad (70)$$

6. 砂面の摂動の増幅率

式(69)より無次元剪断力が一定のとき、掃流層自体の厚さは変化しない。このため、掃流層上面の高さは次のように摂動展開できる。

$$B = B_0 + \varepsilon R_1 \exp[i(\alpha \xi - \Omega t)] \quad (71)$$

基準高さにおける限界 Shields 数の式中で

$$B_{,x} = B_{,\xi} = \varepsilon i \alpha R_1 \exp[i(\alpha \xi - \Omega t)] \quad (72)$$

ここで B と同様に θ_b に対しても摂動展開を行うと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \theta_b(\Psi(\eta_b), \Psi_{,\xi}(\eta_b), \dots, H_{,\xi}, \dots, R_{,\xi}, \dots) \\ &= \theta_b(\Psi_0(\eta_b), \Psi_{0,\xi}(\eta_b), \dots, 0, \dots, 0, \dots) \\ &+ \varepsilon \left(\theta_{,\Psi} \Psi_1(\eta_b) + \theta_{,\Psi,\xi} i \alpha \Psi_1(\eta_b) + \dots + \theta_{,H_{,\xi}} i \alpha H_1 \right. \\ &\quad \left. + \dots + \theta_{,R_{,\xi}} i \alpha R_1 + \dots \right) \exp[i(\alpha \xi - \Omega t)] \\ &= \theta_{b0} + \varepsilon \theta_{b1} \exp[i(\alpha \xi - \Omega t)] \end{aligned} \quad (73)$$

ここで

$$\begin{aligned} \theta_{,\Psi} &= \frac{\partial \theta_b}{\partial \Psi} \bigg|_{\Psi=\Psi_0(\eta_b)}, \quad \theta_{,\Psi,\xi} = \frac{\partial \theta_b}{\partial \Psi_{,\xi}} \bigg|_{\Psi_{,\xi}=0}, \dots, \\ \theta_{,H_{,\xi}} &= \frac{\partial \theta_b}{\partial H_{,\xi}} \bigg|_{H_{,\xi}=0}, \dots, \theta_{,R_{,\xi}} = \frac{\partial \theta_b}{\partial R_{,\xi}} \bigg|_{R_{,\xi}=0}, \dots \end{aligned} \quad (74-a,b,c,d)$$

Ψ_1 および H_1 は R_1 を因数に持つため、 θ_{b1} は次式のように表すことができる。

$$\theta_{b1} = \theta_{b1}^R R_1 \quad (75)$$

無次元掃流砂量 Φ は θ_b および $B_{,x}$ の関数であり次のように摂動展開できる。

$$\begin{aligned} \Phi(\theta_b, B_{,x}) &= \Phi(\theta_{b0}, 0) + \varepsilon (\Phi_{,\theta_b} + i \alpha \Phi_{,B_{,x}}) R_1 \exp[i(\alpha \xi - \Omega t)] \\ &= \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1^R R_1 \exp[i(\alpha \xi - \Omega t)] \end{aligned} \quad (76)$$

ここで

$$\theta_{,\Psi} = \frac{\partial \theta_b}{\partial \Psi} \bigg|_{\Psi=\Psi_0(\eta_b)} \quad (77)$$

式(71)および(76)を式(64)に代入し整理すると、次の式が得られる。

$$\Omega = \alpha \Phi_1^R \quad (78)$$

ここで求められた複素角周波数 Ω の虚部が摂動の増幅率に相当する。

7. 結果と考察

摂動の増幅率 $Im[\Omega]$ は α と Φ_1^R を用いて式(78)のように表される。 Φ_1^R は θ_b , γ , Eu の関数である。ここで Eu は Euler 数と呼ばれる無次元数であり、圧力と慣性力の比を表している。また、Euler 数は平坦床等流状態の断面平均流速と摩擦速度を用い次のように表される。

$$Eu = \frac{\bar{U}_0^*}{U_{f0}^*} = \frac{1}{C} \quad (79)$$

Froude 数が $S^{1/2} U_0^* / U_{f0}^*$ と表されることを考えれば、管路における Euler 数は開水路における Froude 数に相当するパラメータであることが推測される。

摂動の増幅率 $Im[\Omega]$ は、結局 α , θ_b , γ , Eu の4つのパラメータの関数となるが、ここでは $\gamma=1$ と仮定する。 $\gamma=1$ のとき式(23)および(55)より、基準高さから境界面までの高さ H と管の直径 D の関係は以下のように表される。

$$H_{10}^* = H_{10}^* = \frac{D^*}{2} \quad (80)$$

上式および式(9-b), (28)より、両領域での R_0 が等しくなり、基本状態では流速分布は管の中央を境にして対称な対数分布則を示すことがわかる。すなわち、 $\gamma=1$ という条件は上下の壁面の粗度が等しいことと等価である。移動床を有する管路の場合、一般的には上下面の粗度は異なると考えられるが、問題を簡単にするためにこの条件を仮定した。

図-5(a)および(b), (c)は掃流層上面での Shields 数 θ_b をそれぞれ 0.25 および 0.5, 1.0 とした場合の摂動の増幅率のコンタ図である。図中、細い実線は摂動の増幅率が正のコンタ、太い実線は0のコンタ(中立曲線)、破線は負のコンタを表している。増幅率が正であるとき摂動は発達し砂-水界面は不安定となるが、負であれば安定となる。したがって図中の太い実線の内部で砂-水界面は不安定となり、界面波が発生することになる。

式(66)からわかるように、 θ_b が大きいほど無次元掃流砂量は大きくなる。ここで、図-5 中の Euler 数と粒径と管径の関係を表-1 に示す。表-1 から分かるように Euler 数が大きいほど、 d_s^*/D^* が小さくなる。すなわち管径に対する相対粒径が小さくなるほど不安定な領域は Euler 数の大きい領域に広がり、増幅率が最大となる波数(卓越波数)は若干大きくなることが判る。

表-1 粒径と管径の比と Euler 数の関係

Euler数	d_s^*/D^*	Euler数	d_s^*/D^*
22.0	3.3×10^{-4}	21.0	5.0×10^{-4}
20.0	7.4×10^{-4}	18.0	1.7×10^{-3}
17.0	2.5×10^{-3}	16.0	3.7×10^{-3}
15.0	5.5×10^{-3}	14.0	8.3×10^{-3}

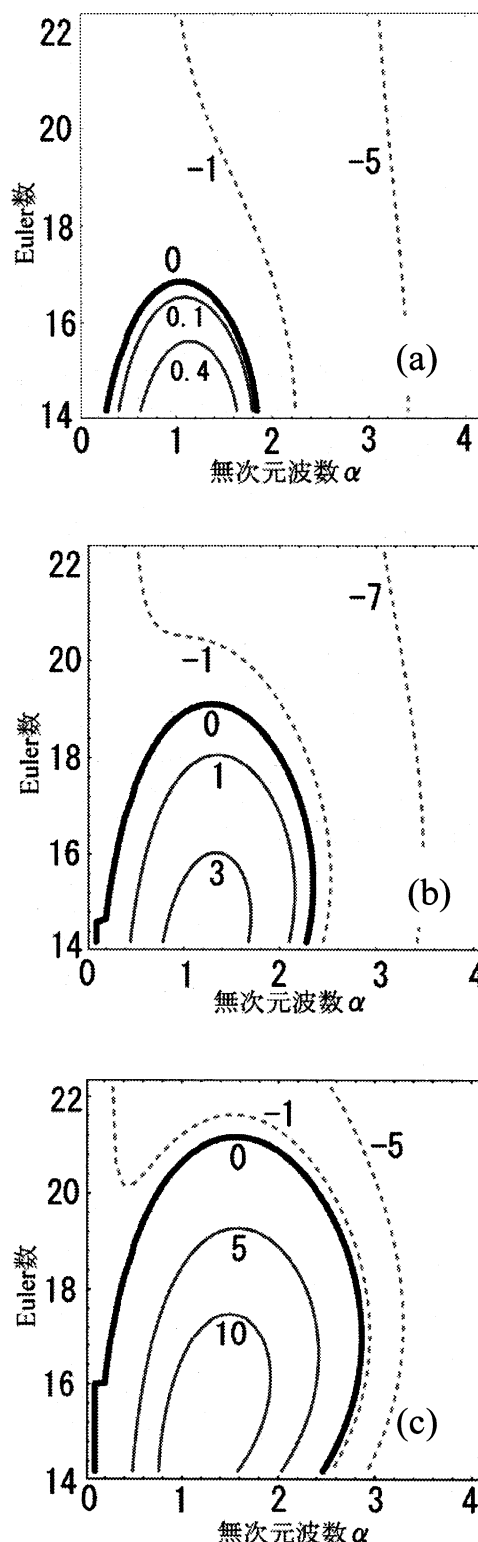


図-5 $Im[\Omega]$ のコンタ

(a) $\theta_b=0.25$ の時, (b) $\theta_b=0.5$ の時, (c) $\theta_b=1.0$ の時

開水路の場合、 $Fr > 1$ および $Fr < 1$ の領域で砂-水界面は不安定²⁾となり、前者の領域ではアンチデューンが、後者の領域ではデューンが発生することがわかっている。それに対して管路の場合、図-5 によれば砂-水界面は Euler 数の小さい領域でのみ不安定となる

ことがわかる。開水路と管路内では、現象を支配する無次元数が異なるため、それぞれの場合における砂－水界面の安定性を単純に比較することはできないが、管路における Euler 数が開水路における Froude 数に対応するとすれば、管路と開水路、いずれの場合もデューンに相当するような界面波は発生するものの、管路の場合、アンチデューンに相当する界面波は発生しないことがわかる。界面波の波長 λ^* は次のように表される。

$$\lambda^* = 2\pi H^* / \alpha \quad (81)$$

図-5 によれば増幅率が最大となる波数（卓越波数）は 1～1.5 であることがわかる。卓越波数に相当する波長の界面波が選択的に発達するとすれば、実際に形成されるデューンの波長は管径の 2～3 倍となることが予想される。一方、開水路に発生するデューンの場合、波長は水深の 5 倍程度となる⁵⁾。ここでも開水路と管路では異なる無次元化が行われているため、単純に比較することはできないが、開水路の水深が管径の 1/2 に相当するとすれば、管路に発生するデューンの方が若干短い波長を持つことになる。ここでは問題を簡単にするために解析の条件を $\gamma=1$ の場合に限った。今後は、上下面の粗度の違いを含めた解析を行い、実験によって理論結果を検証することが必要である。

8. 結論

自由表面の存在しない管水路流れにおける、砂－水

界面の安定性を調べるために、線形安定解析を行った。その結果、次の諸点が明らかとなった。

- ・管路内の砂－水界面の安定性を決定する主要なパラメータは Euler 数と Shields 数である。
- ・ α －Euler 数平面上に instability diagram を描いた結果、Euler 数の小さい領域で砂－水界面は不安定となり、界面波が発生する。
- ・発生する界面波の卓越波長は、Euler 数と Shields 数によって変化するが、管径の概ね 2～3 倍である。
- ・界面波の卓越波長は Shields 数が大きくなるほど小さくなる傾向がある。

参考文献

- 1) Kennedy, J.F. : The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels. *J. Fluid Mech.* **16**, Part4, 1963
- 2) Colombini, M. : Revisiting the linear theory of sand dune formation. *J. Fluid Mech.* **502**, pp.1-16, 2004
- 3) Lee, H. -Y. & Hsu, J. -S. : Investigation of saltating particle motion. *J. Hydraulic Engng.* **120**, pp. 831-845, 1994
- 4) Lee, H. -Y. You, J. -Y. & Lin, Y. -T. : Continuous saltating process of multiple sediment particles. *J. Hydraulic Engng.* **128**, pp.443-450, 2002
- 5) 吉川秀夫: 流砂の水理学. 丸善株式会社. pp.170-177, 1985

(2008 年 4 月 14 日 受付)