応用力学論文集 Vol.11, pp.727-734　(2008年8月)　土木学会

活発な浮遊砂を伴う小規模河床波の線形安定解析

Linear stability analysis of small-scale fluvial bed waves with active suspended sediment load

中里遥介*・泉 典洋**
Yosuke NAKASATO and Norihiro IZUMI

*学生会員　北海道大学大学院工学研究科　環境フィールド工学専攻　(〒060-8628 札幌市北区北14条西8丁目)
**正会員　Ph.D.　北海道大学大学院工学研究科　環境フィールド工学専攻

Small-scale fluvial bed waves such as dunes and antidunes formed on river beds during floods increase the bed resistance, causing rises in water levels. Therefore, it is important to obtain detailed information on the conditions for the formation of bed waves. One of the purposes of this study is to extend the existing linear stability analysis of the formation of small-scale bed waves to the case with active suspended sediment transport. The analysis reveals that the critical Froude number for the formation of dunes is reduced, and the dune formation tends to be inhibited with increasing suspended sediment load.

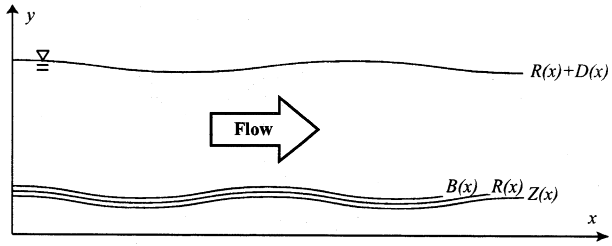
Key Words : *dune, antidune, linear stability analysis, suspended sediment*

1. はじめに

流量が大きく変化する状況下では，河床形態は流量の変化に応じて複雑な挙動を示すことが知られている．Froude数が比較的小さいとき，平坦床は不安定であり，河床上はduneと呼ばれる河床波で覆われる．Froude数がある値を上回るとduneは消滅し，平坦床かantiduneが現れる．duneは下流側に勾配の急な斜面を有しており，そこで流れの剥離が発生するため，流水に対して大きな抵抗となることが知られている．duneの形成により河道抵抗の増加とそれによる水位の上昇が生じるため，duneの発生条件を精度良く知ることは河川工学的にも重要な問題である．

Colombini[2]は開水路の乱流モデルとして混合距離仮説を用い，独自の掃流層モデルを導入することによって，duneだけでなくantiduneの実験結果まで良好に説明できる河床波の線形安定解析を提案している．また泉[1]は，Colombini[2]の線形安定解析を弱非線形領域に拡張し，ある条件下ではdune-平坦床遷移が亜臨界分岐で特徴付けられることを示している．彼らの研究は，duneとantiduneの発生領域をより精密に再現し，その非線形安定性まで明らかにした点で画期的ではあるものの，土砂の輸送形態として掃流砂のみしか考慮されておらず，活発な浮遊砂を伴う条件下における小規模河床形態の発生や遷移現象に適用することはできない．

本研究の目的は，既存のモデルに浮遊砂の移流拡散方程式を導入すると同時に，河床高の時間変化式に浮遊砂による河床変化の項を導入することによって，浮遊砂が活発に生じる場合に適用できる河床波の線形安定解析を提案することである．解析によって，活発な



図–1 流れと座標系の概念図

浮遊砂が河床波の発生メカニズムにどのような影響を与えるのかを理論的に明らかにする．

2. 支配方程式

2.1 流れの方程式

流れの支配方程式はReynolds平均を取った二次元のNavier-Stokesの運動方程式および連続の式である．移動床現象では，河床変動の時間スケールと比較して流れの変動の時間スケールが十分に早い．そこで非定常効果は河床高の時間変化式でのみ考慮し，流れは定常とみなす準定常の仮定が可能となる．この仮定を用いると流れの方程式は次式のようになる．

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+1+\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+S^{-1}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \quad (3)$$

ここでxおよびyはそれぞれ流下方向および水深方向の座標，UおよびVはそれぞれxおよびy方向の流速，SおよびPはそれぞれ平均河床勾配および圧力，

$T_{ij}(i,j=x,y)$ は Reynods 応力テンソルである．

混合距離仮説を用いると Reynolds 応力テンソルは次のように表される．

$$T_{xx} = 2\nu_T \frac{\partial U}{\partial x} \tag{4}$$

$$T_{yy} = 2\nu_T \frac{\partial V}{\partial y} \tag{5}$$

$$T_{xy} = \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \tag{6}$$

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \tag{7}$$

$$l = \kappa(y - Z) \left(\frac{D + R - y}{D} \right)^{1/2} \tag{8}$$

ここで ν_T は渦動粘性係数，l および D, Z, R はそれぞれ混合距離および水深，底面高さ，基準面高さ（対数分布則で流速がゼロとなる高さ．**図–1** 参照）であり，κ は Kármán 定数 ($= 0.4$) である．

また上式ではすでに次のような無次元化が行われている．

$$(\tilde{U}, \tilde{V}) = \tilde{U}_{f0}(U, V) \tag{9}$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{D}, \tilde{Z}, \tilde{R}, \tilde{d}_s) = \tilde{D}_0(x, y, l, D, Z, R, d_s) \tag{10}$$

$$(\tilde{P}, \tilde{T}_{ij}) = \rho \tilde{D}_0^2 (P, T_{ij}) \tag{11}$$

$$\tilde{\nu}_T = \tilde{U}_{f0} \tilde{D}_0 \nu_T \tag{12}$$

ここで $(\tilde{\ })$ は有次元の変数を表し，$\tilde{U}_{f0}(= \sqrt{g\tilde{D}_0 S})$ および $\tilde{D}_0$ はそれぞれ平坦床基準状態における底面摩擦速度および水深，d_s は河床材料の無次元粒径，ρ は水の密度，g は重力加速度 ($= 9.8\ \mathrm{m^2/s}$) である．

次のような流関数 ψ を導入する．

$$(U, V) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \tag{13}$$

流関数を用いると式 (1) および (2) は次のように書き直される．

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\nu_T \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} \right) + 1 + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_T \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] \tag{14}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(2\nu_T \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} \right) - S^{-1} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu_T \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] \tag{15}$$

上式から P を消去すると次式が得られる．

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - 4\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\nu_T \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)\left[\nu_T \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \tag{16}$$

ここで ∇^2 はラプラシアンであり次式で表される．

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{17}$$

2.2 浮遊砂の移流拡散方程式

浮遊砂の移流拡散方程式は次のように表される．

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = 0 \tag{18}$$

上式では流れの支配方程式と同様に，準定常の仮定を用いている．また F_x および F_y はそれぞれ $\tilde{U}_{f0}$ で無次元化された x および y 方向の浮遊砂フラックスであり，次式で表される．

$$F_x = UC - \nu_T \frac{\partial C}{\partial x} \tag{19}$$

$$F_y = (V - v_s)C - \nu_T \frac{\partial C}{\partial y} \tag{20}$$

ここで C は浮遊砂濃度であり，v_s は浮遊砂粒子の沈降速度である．またここでは浮遊砂の拡散係数は渦動粘性係数 ν_T とほぼ等しいと仮定した．

式 (18)-(20) より浮遊砂の移流拡散方程式は次のように書き直される．

$$U\frac{\partial C}{\partial x} + (V - v_s)\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_T \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_T \frac{\partial C}{\partial y} \right) \tag{21}$$

また浮遊砂粒子の無次元沈降速度 v_s は Rubey の実験式より次のように表される．

$$v_s = \frac{\tilde{v}_s}{\sqrt{R_s g \tilde{d}_s}} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36}{{R_p}^2}} - \frac{6}{R_p} \tag{22}$$

ここで R_p は粒子 Reynolds 数と呼ばれる無次元パラメータであり，以下の式で表される．

$$R_p = \frac{\sqrt{R_s g \tilde{d}_s}\tilde{d}_s}{\nu} \tag{23}$$

ここで ν は動粘性係数 ($= 1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$) である．

3. 変数変換

水面および底面において境界条件の適用を容易にするために次のような変数変換を行う．

$$\xi = x \tag{24}$$

$$\eta = \frac{y - R(x)}{D(x)} \tag{25}$$

すると x および y に関する微分は次のように変換される．

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta D_{,x} + R_{,x}}{D}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{27}$$

ここで $()_{,x}$ は x に関する偏微分を表す．この変数変換により境界条件を適用する水面および底面はそれぞれ $\eta = 1$ および $\eta = 0$ に対応する．

また上式の変数変換を用いると，無次元混合距離 l は次のように表される．

$$l = \kappa D\left(\eta + \frac{R-Z}{D}\right)\left[\left(\frac{1}{1+(R-Z)/D}\right)(1-\eta)\right]^{1/2} \tag{28}$$

ここで $(R-Z)/D << 1$ として無視すると上式は次のようになる．

$$l = \kappa D\left(\eta + \frac{R-Z}{D}\right)(1-\eta)^{1/2} \tag{29}$$

4. 境界条件

水面および底面における流れの境界条件は次のようになる．

$$\vec{U}\cdot\vec{e}_{ns} = 0 \text{ at } \eta = 1 \tag{30}$$

$$\vec{e}_{ns}\cdot\mathbf{T}\cdot\vec{e}_{ns} = 0 \text{ at } \eta = 1 \tag{31}$$

$$\vec{e}_{ts}\cdot\mathbf{T}\cdot\vec{e}_{ns} = 0 \text{ at } \eta = 1 \tag{32}$$

$$\vec{U}\cdot\vec{e}_{nb} = 0 \text{ at } \eta = 0 \tag{33}$$

$$\vec{U}\cdot\vec{e}_{tb} = 0 \text{ at } \eta = 0 \tag{34}$$

ここで $\vec{U}$ は流速ベクトル $(=(U,V))$ であり，$\vec{e}_{ns}$ および $\vec{e}_{ts}$ は水面に対するそれぞれ法線および接線方向の単位ベクトル，$\vec{e}_{nb}$ および $\vec{e}_{tb}$ は底面に対するそれぞれ法線および接線方向の単位ベクトル，$\mathbf{T}$ は応力テンソルであり，それぞれ次式で表される．

$$\vec{e}_{ns} = \frac{(-(R+D)_{,x}, 1)}{[1+(R+D)^2{}_{,x}]^{1/2}} \tag{35}$$

$$\vec{e}_{ts} = \frac{(1, (R+D)_{,x})}{[1+(R+D)^2{}_{,x}]^{1/2}} \tag{36}$$

$$\vec{e}_{nb} = \frac{(-R_{,x}, 1)}{[1+R^2{}_{,x}]^{1/2}} \tag{37}$$

$$\vec{e}_{tb} = \frac{(1, R_{,x})}{[1+R^2{}_{,x}]^{1/2}} \tag{38}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -P+T_{xx} & T_{xy} \\ T_{xy} & -P+T_{yy} \end{bmatrix} \tag{39}$$

同様に水面および底面における浮遊砂輸送の境界条件は次のようになる．

$$\vec{F}\cdot\vec{e}_{ns} = 0 \text{ at } \eta = 1 \tag{40}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{e}_{nb} = \frac{\tilde{E}_s}{\tilde{U}_{f0}} \text{ at } \eta = 0 \tag{41}$$

ここで $\vec{F}$ は浮遊砂フラックスベクトル $(=(F_x, F_y))$ であり，$\tilde{E}_s$ は浮遊砂の巻き上げ速度である．巻き上げ速度については様々な式が提案されているが，本研究では，従来の実験結果を良好に表すことがわかっている，泉，田中，坪井，伊達[3]が提案した以下の式を用いることとする．

$$E_s = 1.0\times 10^{-5}\left(\frac{U_f}{v_s}\right)^4 \tag{42}$$

他の巻き上げ量式を用いると，解析結果も定量的な影響を受ける可能性があるが，それについては今後の課題である．

5. 掃流砂の輸送

掃流砂量式として，河床の局所勾配の影響を取り入れた次の Meyer-Peter & Müller 式を用いる．

$$\Phi = \frac{\tilde{q}_B}{\sqrt{R_s g\tilde{d}_s}\tilde{d}_s} = 8(\theta_b - \theta_c)^{3/2} \tag{43}$$

ここで Φ および $\tilde{q}_B$ はそれぞれ無次元および有次元の掃流砂量，R_s は水中比重 $(=1.65)$ であり，掃流層上面 $(\eta = \eta_b)$ における無次元掃流力 θ_b および無次元限界掃流力 θ_c は次式で表される．

$$\theta_b = \frac{S}{R_s d_s}\tau_b \tag{44}$$

$$\theta_c = \theta_{ch} - \mu\left(S - \frac{\partial B}{\partial x}\right) \tag{45}$$

ここで B は掃流層上面の高さ (**図–2** 参照)，θ_{ch} は平坦床における限界無次元掃流力 $(=0.047)$，μ は河床勾配の効果を表すパラメータ $(=0.1)$ である．また掃流層上面での無次元剪断力 τ_b は次式で表される．

$$\tau_b = [\vec{e}_{tb}\cdot\mathbf{T}\cdot\vec{e}_{nb}]_{\eta=\eta_b} \tag{46}$$

Colombini[2]によれば，掃流層厚さ h_b は次のように表される．

$$h_b = l_b d_s \tag{47}$$

$$l_b = 1 + 1.3\left(\frac{\tau_r - \tau_c}{\tau_c}\right)^{0.55} \tag{48}$$

ここで τ_r および τ_c はそれぞれ基準高さにおける剪断応力および限界剪断応力である．掃流層の厚さは摂動によって変化しない．すなわち $B-R$ は一定 $(B_0 - R_0)$ であるとする．そのとき掃流層上面の位置 η_b は次のように表される．

$$\eta_b = B_0 - R_0 = h_b + \frac{d_s}{12} = \left(l_b + \frac{1}{12}\right)d_s \tag{49}$$

6. 河床高さの時間変化

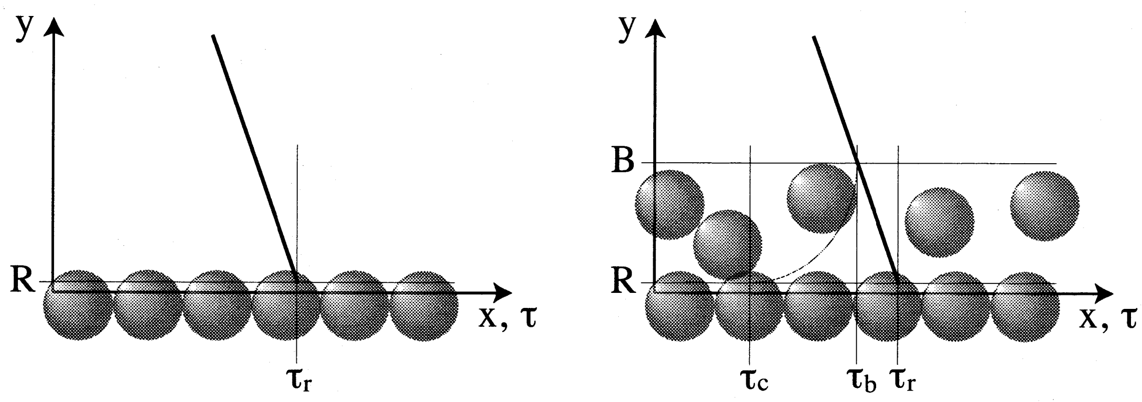
河床形状の時間変化は，浮遊砂を考慮した Exner 方程式で次のように表される．

$$(1-\lambda_p)\frac{\partial\tilde{B}}{\partial\tilde{t}} + \frac{\partial\tilde{q}_B}{\partial\tilde{x}} + \tilde{E}_s - \tilde{D}_p = 0 \tag{50}$$

ここで λ_p は空隙率，$\tilde{E}_s$ および $\tilde{D}_p$ はそれぞれ浮遊砂の巻き上げ速度および沈降速度であり，次のように表される．

$$\tilde{E}_s = \tilde{v}_s E_s \tag{51}$$

$$\tilde{D}_p = \tilde{v}_s C[\xi, \eta_b] \tag{52}$$



図–2 掃流層の定義[2)]

上式を代入し，(50) を無次元化すると，Exner 方程式は次のようになる．

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{v_s}{d_s}\sqrt{\frac{S}{R_s d_s}}(E_s - C[\xi, \eta_b]) \qquad (53)$$

ここで時間 t は次の無次元化を行っている．

$$\tilde{t} = \frac{(1-\lambda_p)\tilde{D}_0^2}{\sqrt{R_s g \tilde{d}_s}\tilde{d}_s} t \qquad (54)$$

7. 基本解

7.1 流れの基本解

安定解析の基本状態は平坦床等流状態である．基本状態では各パラメータは次のように表すことができる．

$$(U, V, D, Z, R, C) = (U_0(\eta), 0, 1, 0, R_0, C_0(\eta)) \qquad (55)$$

基本状態のとき流れの支配方程式は次のように単純化される．

$$1 + \frac{dT_{xy0}}{d\eta} = 0 \qquad (56)$$

$$T_{xy0} = \nu_{T0}\frac{dU_0}{d\eta} \qquad (57)$$

$$\nu_{T0} = l_0^2 \frac{dU_0}{d\eta} \qquad (58)$$

$$l_0 = \kappa(\eta + R_0)(1-\eta)^{1/2} \qquad (59)$$

添字 0 で表されているのは基本状態における解である．境界条件は次のようになる．

$$U_0 = 0,\ T_{xy0} = 1 \ \text{ at } \ \eta = 0 \qquad (60)$$

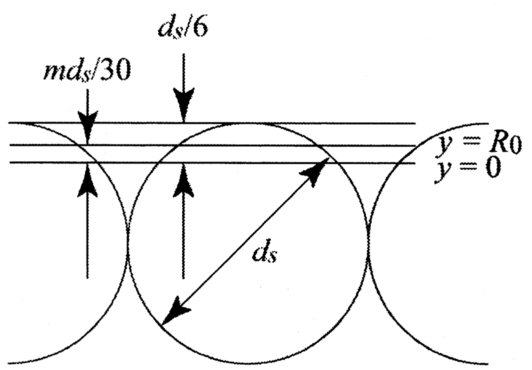
式 (56)-(60) より次の対数分布則が得られる．

$$U_0(\eta) = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{\eta + R_0}{R_0}\right) \qquad (61)$$

上式を $\eta = 0$ から $\eta = 1$ まで積分すると抵抗係数 C_r が次のように得られる．

$$C_r^{-1} = \frac{\tilde{U}_{a0}}{\tilde{U}_{f0}} = \frac{1}{\kappa}\left[\ln\left(\frac{1+R_0}{R_0}\right) - 1\right] \qquad (62)$$

ここで $\tilde{U}_{a0}$ は基本状態における水深平均流速である．



図–3 砂の粒径と原点および基準高さの関係

従来の開水路乱流での対数分布則を書き表すと次のようになる．

$$U = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{y}{k_s}\right) + 8.5 = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{30y}{md_s}\right) \qquad (63)$$

ここで k_s は $\tilde{D}_0$ で無次元化したそれぞれ粗度高さ，m は k_s/d_s である．上式より $y = md_s/30$ のとき $U = 0$ なので，$R_0 = md_s/30$ となる．通常 $m = 1 \sim 3$ の値をとるため，$R_0 = d_s/30 \sim d_s/10$ 程度となることがわかる．本研究では $m = 2.5$ を採用し，$R_0 = d_s/12$ とした．このとき無次元粒径 d_s は式 (62) より以下の式で表される．

$$d_s = 12\left[\exp\left(\kappa C_r^{-1} + 1\right) - 1\right]^{-1} \qquad (64)$$

通常の混合距離モデルでは，原点近傍における特異性のために流速が急激に減少し負に発散してしまう．そのため，実際の流速分布を適切に表すことは出来ない．そこで $y = 0$ を粒子の最上点より $d_s/6$ だけ下（体積平均をとった場合の河床面）に取ることとする (**図–3** 参照)．これにより特異性を有する層の厚さは河床近傍のごく狭い領域に限られ，その他の領域では実際の流速分布を再現できると考えられる．

7.2 浮遊砂輸送の基本解

流れの基本解同様，浮遊砂濃度分布の基本解を求める．平坦床等流状態のとき式 (21) は次のように単純化される．

$$-\upsilon_s \frac{dC_0}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}\left(\nu_{T0}\frac{dC_0}{d\eta}\right) \tag{65}$$

ここで ν_{T0} は次の式で表される．

$$\nu_{T0} = \kappa(\eta + R_0)(1-\eta) \tag{66}$$

境界条件は次の二つである．

$$\upsilon_s C_0 + \nu_{T0}\frac{\partial C_0}{\partial \eta} = 0 \ \text{ at } \ \eta = 1 \tag{67}$$

$$C_0 = C_b \ \text{ at } \ \eta = 0 \tag{68}$$

ここで C_b は底面近傍における浮遊砂濃度である．平坦床等流状態では，河床変動は生じないため，浮遊砂の巻き上げ量と堆積量は等しい．したがって C_b は次のように表される．

$$C_b = E_{s0} \tag{69}$$

$$E_{s0} = 1.0\times 10^{-5}\left(\frac{U_{f0}}{\upsilon_s}\right)^4 \tag{70}$$

境界条件のもとで，式 (65) を積分すると，平坦床等流状態の浮遊砂濃度分布として次のような Rouse 分布が得られる．

$$C_0(\eta) = C_b\left[\frac{R_0(1-\eta)}{\eta + R_0}\right]^{\upsilon_s/\kappa(1+R_0)} \tag{71}$$

8. 線形安定解析

8.1 摂動展開

先に求めた平坦床等流状態における河床 Z に対し，$Z = A\hat{Z}_1$ の摂動を与える．それに合わせて各パラメータを次のように摂動展開する．

$$\begin{aligned}(\psi, P, D, Z, R, B, C) &= (\psi_0, P_0, 1, 0, R_0, B_0, C_0)\\ &\quad + A(\hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{D}_1, \hat{R}_1, \hat{R}_1, \hat{R}_1, \hat{C}_1)\end{aligned} \tag{72}$$

ここで A は摂動の振幅を表すパラメータであり，線形安定解析のスキームでは無限小であると考える．また $\hat{Z}_1$ および $\hat{B}_1$ は $\hat{R}_1$ と等しいことに注意する．

任意の摂動は，様々な波数を持った正弦関数あるいは余弦関数の足し合わせで表される．そこで単一波数に注目し，摂動を次のような指数関数で表し，normal mode analysis を行う．

$$\begin{aligned}&(\hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{D}_1, \hat{R}_1, \hat{C}_1)\\ &\quad = (\psi_1, P_1, D_1, R_1, C_1)\exp[\mathrm{i}(\alpha\xi - \Omega t)]\end{aligned} \tag{73}$$

ここで α および Ω は摂動の波数および複素角周波数である．式 (72) は次のように書き直される．

$$\begin{aligned}(\psi, P, D, Z, R, B, C) &= (\psi_0, P_0, 1, 0, R_0, B_0, C_0)\\ &\quad + A(\psi_1, P_1, D_1, R_1, C_1)\exp[\mathrm{i}(\alpha\xi - \Omega t)]\end{aligned} \tag{74}$$

8.2 流れの摂動解

式 (74) を流れの支配方程式 (16) および (14) に代入し，A のオーダーで整理すると，$O(A)$ において次式が得られる．

$$\mathcal{L}^{\psi}(\eta)\psi_1(\eta) + \mathcal{L}^{D}(\eta)D_1 + \mathcal{L}^{R}(\eta)R_1 = 0 \tag{75}$$

$$\mathrm{i}\alpha P_1(\eta) + \mathcal{P}^{\psi}(\eta)\psi_1(\eta) + \mathcal{P}^{D}(\eta)D_1 + \mathcal{P}^{R}(\eta)R_1 = 0 \tag{76}$$

ここで $\mathcal{L}^{\phi}$ および $\mathcal{P}^{\phi}(\phi = \psi, D, R)$ は線形演算子であるが，具体的な形については省略する．境界条件 (30)-(34)（式 (32) は常に成立するため不要）からは次式が得られる．

$$\psi_1(1) = 0 \tag{77}$$

$$P_1(1) = 0 \tag{78}$$

$$\psi_1(0) = 0 \tag{79}$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}(0) = 0 \tag{80}$$

また式 (76) および (78) から次式が得られる．

$$\mathcal{P}^{\psi}(1)\psi_1(1) + \mathcal{P}^{D}(1)D_1 + \mathcal{P}^{R}(1)R_1 = 0 \tag{81}$$

ψ_1 を Chebyshev 多項式展開を用いて次のように表す．

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(\zeta) \tag{82}$$

ここで T_n は n 次の Chebyshev 多項式，ζ は $[-1, 1]$ で定義される Chebyshev 多項式の独立変数である．また計算精度をあげるために次の変数変換を用いている．

$$\zeta = 2\left\{\frac{\ln[(\eta + R_0)/R_0]}{\ln[(1 + R_0)/R_0]}\right\} - 1 \tag{83}$$

これらを支配方程式 (75) に代入した後，次の Gauss-Labatte 点において式を評価する．

$$\zeta_j = \cos(j\pi/N) \tag{84}$$

それらを境界条件 (77)-(80) および (81) と合わせると次の線形代数方程式系が得られる．

$$\mathbf{L}\boldsymbol{a} = \mathbf{M}R_1 \tag{85}$$

ここで

$$\boldsymbol{a} = [a_0, a_1, \ldots, a_N, D_1] \tag{86}$$

$$\mathbf{M} = [0, 0, 0, \check{\mathcal{P}}^R, \check{\mathcal{L}}^D, \ldots, \check{\mathcal{L}}^D] \tag{87}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} T_0(-1) & \ldots & T_N(-1) & 0 \\ \check{\mathcal{D}}T_0(-1) & \ldots & \check{\mathcal{D}}T_N(-1) & 0 \\ T_0(1) & \ldots & T_N(1) & 0 \\ \check{\mathcal{P}}^{\psi}T_0(1) & \ldots & \check{\mathcal{P}}^{\psi}T_N(1) & \check{\mathcal{P}}^D \\ \check{\mathcal{L}}^{\psi}T_0(\zeta_2) & \ldots & \check{\mathcal{L}}^{\psi}T_N(\zeta_2) & \check{\mathcal{L}}^D \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \check{\mathcal{L}}^{\psi}T_0(\zeta_{N-2}) & \ldots & \check{\mathcal{L}}^{\psi}T_N(\zeta_{N-2}) & \check{\mathcal{L}}^D \end{bmatrix} \tag{88}$$

上式中の ˇ は η を ζ に変数変換した線形演算子を表している．

上式を解けば次のような解が得られる．

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}R_1 \tag{89}$$

上式より $a_0, a_1, \cdots, a_N$ が求まり，式 (82) より次式が得られる．

$$\psi_1 = \psi_1^*(\eta)R_1 \tag{90}$$

$$D_1 = D_1^* R_1 \tag{91}$$

8.3 浮遊砂輸送の摂動解

流れの摂動解同様，式 (74) を移流拡散方程式 (21) に代入すると，$O(A)$ において次式が得られる．

$$\mathcal{C}^C C_1(\eta) + \mathcal{C}^\psi(\eta)\psi_1(\eta) + \mathcal{C}^D D_1 + \mathcal{C}^R R_1 = 0 \tag{92}$$

上式は式 (90) および (91) より以下のようになる．

$$\mathcal{C}^C C_1(\eta) + \left(\mathcal{C}^\psi(\eta)\psi_1^*(\eta) + \mathcal{C}^D D_1^* + \mathcal{C}^R\right) R_1 = 0 \tag{93}$$

境界条件より次式が得られる．

$$\mathcal{S}^C C_1(1) + \left(\mathcal{S}^\psi(1)\psi_1^*(1) + \mathcal{S}^D D_1^* + \mathcal{S}^R\right) R_1 = 0 \tag{94}$$

$$\mathcal{B}^C C_1(0) + \left(\mathcal{B}^\psi(0)\psi_1^*(0) + \mathcal{B}^D D_1^* + \mathcal{B}^R\right) R_1 = 0 \tag{95}$$

ここで $\mathcal{C}^\phi, \mathcal{S}^\phi, \mathcal{B}^\phi (\phi = \psi, D, R, C)$ は線形演算子である．

C_1 についても次のように Chebyshev 多項式で展開する．

$$C_1 = \sum_{n=0}^{N} b_n T_n(\zeta) \tag{96}$$

Gauss-Labatte 点で評価し，境界条件と合わせる次のような式が得られる．

$$\mathbf{K}\boldsymbol{b} = \mathbf{N}R_1 \tag{97}$$

ここで

$$\boldsymbol{b} = [b_0, b_1, \ldots, b_N] \tag{98}$$

$$\mathbf{N} = -\begin{bmatrix} \check{\mathcal{B}}^\phi \psi_1^*(-1) + \check{\mathcal{B}}^D D_1^* + \check{\mathcal{B}}^R \\ \check{\mathcal{S}}^\phi \psi_1^*(1) + \check{\mathcal{S}}^D D_1^* + \check{\mathcal{S}}^R \\ \check{\mathcal{C}}^\phi \psi_1^*(\zeta_1) + \check{\mathcal{C}}^D D_1^* + \check{\mathcal{C}}^R \\ \vdots \\ \check{\mathcal{C}}^\phi \psi_1^*(\zeta_{N-1}) + \check{\mathcal{C}}^D D_1^* + \check{\mathcal{C}}^R \end{bmatrix} \tag{99}$$

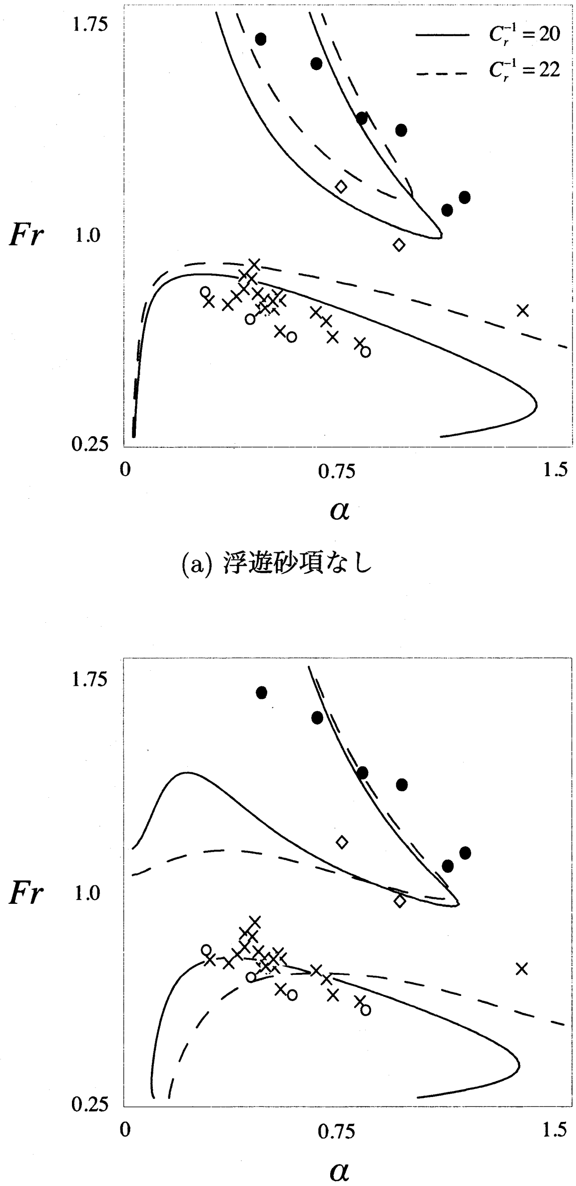
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \check{\mathcal{B}}^C T_0(-1) & \ldots & \check{\mathcal{B}}^C T_N(-1) \\ \check{\mathcal{S}}^C T_0(1) & \ldots & \check{\mathcal{S}}^C T_N(-1) \\ \check{\mathcal{C}}^C T_0(\zeta_1) & \ldots & \check{\mathcal{C}}^C i T_N(\zeta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{\mathcal{C}}^C T_0(\zeta_{N-1}) & \ldots & \check{\mathcal{C}}^C T_N(\zeta_{N-1}) \end{bmatrix} \tag{100}$$

上式を解けば $b_0, b_1, \cdots, b_N$ は次のように得られる．

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{N}R_1 \tag{101}$$

したがって式 (96) より次式が得られる．

$$C_1(\eta) = C_1^*(\eta)R_1 \tag{102}$$



(a) 浮遊砂項なし

(b) 浮遊砂項あり

図–4 式 (103) より得られる増幅率 Ω_i の中率曲線図．$R_p = 10$, —— $C_r^{-1} = 20$, - - - $C_r^{-1} = 22$. × : $C_r^{-1} = 20$ での dune, ○ : $C_r^{-1} = 22$ での dune, ● : $C_r^{-1} = 20$ での antidune, ◇ : $C_r^{-1} = 22$ での antidune.

8.4 線形安定解析

Exner 方程式 (53) に式 (90) および (91)，(102) を代入すると，最終的に複素角周波数 Ω は次のような関数形で求まる．

$$\Omega = f\left(\alpha, Fr, C_r, R_p\right) \tag{103}$$

ここで求められた Ω の虚部 Ω_i が，摂動の増幅率に相当する．

9. 結果および考察

図–4，5，6 に，$\alpha - Fr$ 平面上に描いた増幅率 Ω_i の中立曲線 ($\Omega_i = 0$) を示す．Froude 数が小さい領域と大きい領域に摂動の増幅率が正となる領域，すなわち河床が不安定となる領域が現れている．前者が dune に後者が antidune に対応している．

9.1 既存のモデルとの比較

図–4(a) は泉[1]による掃流砂のみを考慮した既存のモデルを用いた場合の中率曲線であり，**図–4**(b) は式 (103) より求めた，浮遊砂を考慮した本モデルを用いた場合の中率曲線である．いずれも $C_r^{-1} = 20$ および 22 をそれぞれ実線および破線で示している．また同時に Guy, Simon and Richardson[4]が行った実験データもプロットしてある．ここで，$\times$ および $\circ$ はそれぞれ $C_r^{-1} = 20$ および 22 での dune であり，$\bullet$ および $\diamond$ はそれぞれ $C_r^{-1} = 20$ および 22 での antidune を示している．

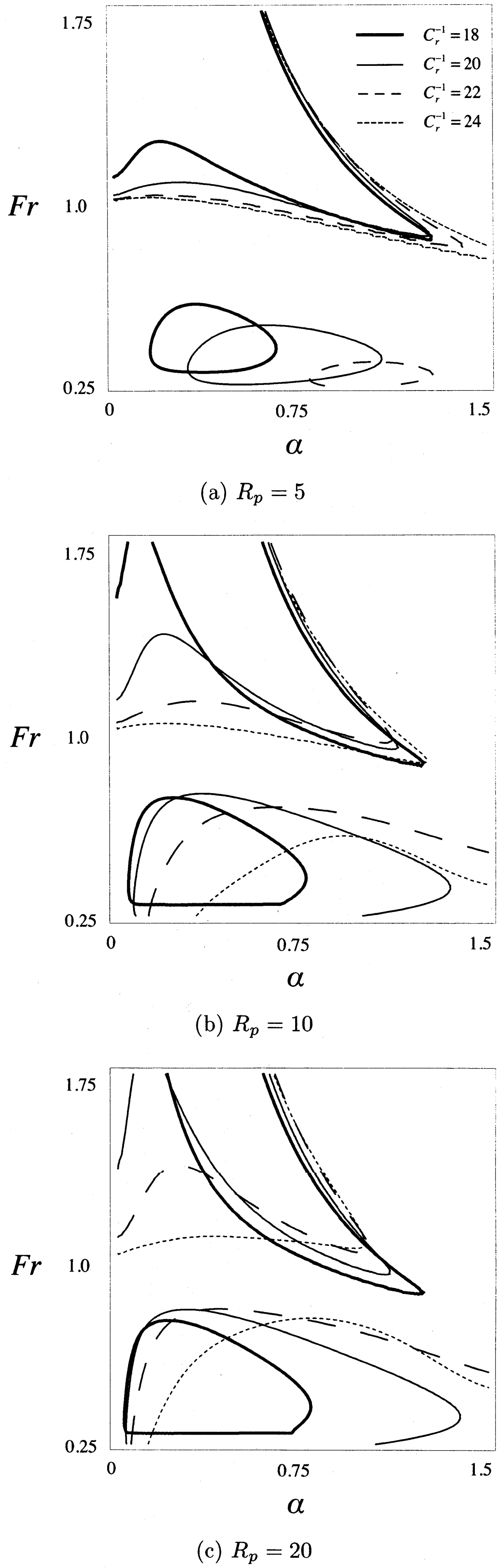
式 (64) より C_r^{-1} の増加は無次元粒径 d_s の減少を意味する．$\times$ および $\bullet$ は $C_r^{-1} = 20$，$\circ$ および $\diamond$ は $C_r^{-1} = 22$ に対応しているため，$\circ$ および $\diamond$ がより粒径が小さく浮遊砂が活発な場合に対応している．すなわち Guy らによる実験結果では，粒径が小さくなるにしたがい dune および antidune が発生する Froude 数の値は減少していることがわかる．しかし浮遊砂を考慮していない**図–4**(a) では C_r^{-1} が増加し粒径が減少すると，dune 発生領域は拡大し，dune 発生の臨界 Froude 数は増加している．また antidune 発生領域も Froude 数の高い方向に移動しており，実験結果と大きく異なることがわかる．

活発な浮遊砂を考慮した場合，dune の発生領域は小さくなり臨界 Froude 数は減少していることが**図–4**(b) よりわかる．一方 antidune の発生領域は Froude 数の値が低い領域に拡大している．以上のことから，浮遊砂項の導入によって実験結果が良好に表されるようになった．

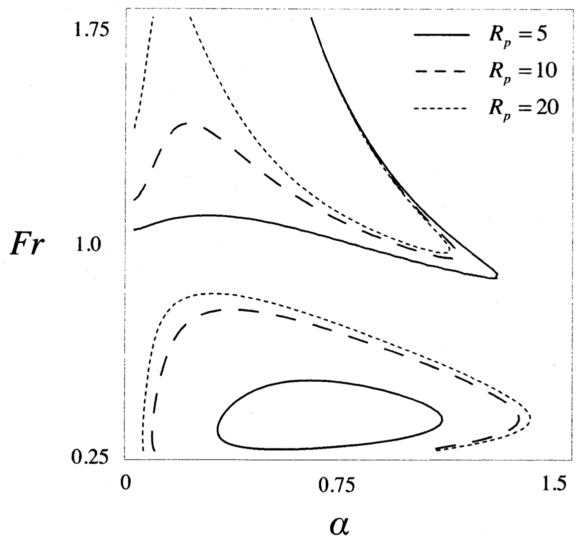
9.2 抵抗係数 C_r による比較

図–5(a) および (b)，(c) はそれぞれ $R_p = 5$ および $10, 20$ の場合の図である．太線，実線，破線，点線はそれぞれ $C_r^{-1} = 18, 20, 22, 24$ を示している．

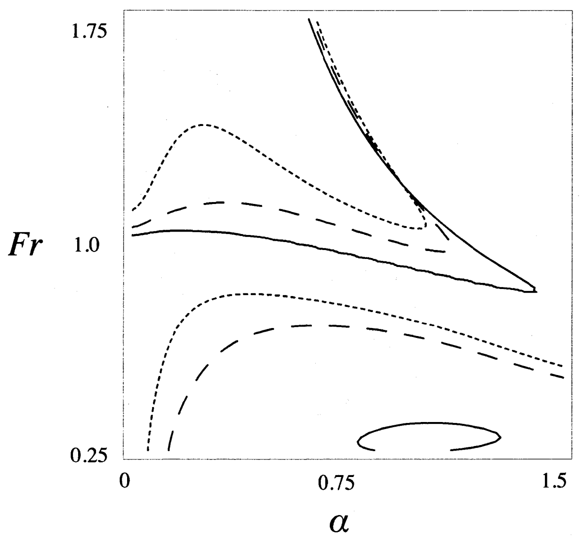
粒子 Reynolds 数 R_p が小さいとき，C_r^{-1} の増加にしたがい dune 発生領域は Froude 数の小さい領域に移動し，臨界 Froude 数も減少する．しかし R_p が大きくなると C_r^{-1} が増加しても，dune 発生領域は波数の大きい領域に移動するものの，臨界 Froude 数はほとんど変化しないことがわかる．一方 antidune の場合，R_p が小さいときの発生領域に大きな変化は見られないが，R_p が大きくなると C_r^{-1} の増加にしたがい臨界 Froude 数が大きくなる様子がわかる．



図–5 式 (103) より得られる増幅率 Ω_i の中率曲線図．太線，実線，破線，点線はそれぞれ $C_r^{-1} = 18, 20, 22, 24$.



(a) $C_r^{-1} = 20$



(b) $C_r^{-1} = 22$

図–6 式 (103) より得られる増幅率 Ω_i の中率曲線図. 実線，破線，点線はそれぞれ $R_p = 5, 10, 20$.

9.3 粒子 Reynolds 数 R_p による比較

図–6(a) および (b) はそれぞれ $C_r^{-1} = 20$ および 22 としたときの図である．実線，破線，点線はそれぞれ $R_p = 5, 10, 20$ を示している．なお式 (23) より，$R_p = 5, 10, 20$ はそれぞれ粒径 $\tilde{d}_s \approx 0.1, 0.2, 0.3$ mm に対応している．

R_p が大きくなるにしたがい，浮遊砂の影響は小さくなり掃流砂のみを考慮した既存のモデルとほぼ同様の結果が得られることがわかる．これは河床材料の粒径が大きくなると，流砂の輸送形態はほぼ掃流砂のみとなるためである．また R_p が減少すると，dune 発生領域は縮小し，antidune 発生領域は拡大していることがわかる．このことより活発な浮遊砂は dune の形成を抑制し，antidune の形成を促進していると考えられる．

10. 結論

活発な浮遊砂が河床波の形成条件にどのような影響を与えるかを理論的に解明するため，浮遊砂の影響を考慮した線形安定解析を行った．解析の結果，得られた成果は次の通りである．

- 浮遊砂が活発に生じるようになると，dune の形成を抑制し，antidune の形成を促進する．
- $C_r^{-1} = 20 \sim 22$ 付近では，実験結果を良好に説明できる．
- R_p が大きくなるにしたがい，掃流砂のみを考慮した既存のモデルに近づく．

参考文献

1) 泉　典洋：混合距離モデルを用いた河床デューンの弱非線形安定解析, 土木学会論文集, 第 51 巻, 2007.
2) Colombini, M.: Revisiting the linear theory of sand dune formation, *J. Fluid Mech*, Vol. 502, pp. 1-16, 2004.
3) 泉　典洋, 田中　仁, 坪井宏介, 伊達政直：河口テラスの初期堆積形状に関する実験, 土木学会論文集, No.740/II-64, pp.109-120, 2003.
4) Guy, H. P., Simons, D. B. and Richardson, E. V.: Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956–61, Geological Survey Professional Paper, 462-I, U.S.Government Printing Office, Washington, 1966.
5) 泉　典洋, 山口里美：浮遊砂を伴うデューン-平坦床遷移過程, 土木学会論文集, No.796/II-72, pp.53-67, 2005.
6) 山口里美, 泉　典洋：デューン-平坦床遷移過程にみられる亜臨界分岐現象, 土木学会論文集, No.740/II-64, pp.75-96, 2003.

(2008 年 4 月 14 日 受付)