応用力学論文集 Vol.11, pp.557-563 (2008年8月) 土木学会

傾斜側壁を持つ貯水池におけるスロッシングの固有周期

Foundamental Period of Liquid Sloshing in Sloping Wall Reservoir

小野祐輔*・緒方浩二**・Charles Scawthorn***
Yusuke ONO, Koji OGATA and Charles SCAWTHORN

*正会員 博(工) 京都大学助教 工学研究科(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)
**非会員 修(工) 京都大学大学院 工学研究科(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)
***正会員 工博 京都大学特命教授 工学研究科(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

This study aimed to clarify the influence of sloping wall to sloshing in a reservoir by numerical analysis called the SPH method. We compared SPH simulations with some theoretical equations and with some experiments. Finally, we proposed the equation which gave the natural circular frequency as the function of slope angle. The equation means that the natural circular frequency of sloping wall reservoir is almost the same as that of rectangular tank which has the same surface length as the intended sloping wall reservoir. We considered the reason is the velocity distribution of water particle is similar between these systems.

Key Words : *sloshing, reservoir, SPH, natural circular frequency*

1. はじめに

ため池や汚水処理施設などの貯水池では，建設コストの低さから鉛直ではなく傾斜した側壁が用いられることがある．2003年十勝沖地震で石油タンクにスロッシングが発生したように，これらの貯水池でも地震によって波高の大きな振幅のスロッシングが引き起こされ，貯水池から内溶液が溢れ出る恐れがある．その際，内溶液に汚染物質や危険物質が含まれていれば，周囲に多大な悪影響を及ぼすことになる．したがって，将来ある程度の規模以上の地震動を受けることが予測されている地域では，事前評価と対策が必要である．

これまで何度も大きな被害が発生した円筒型タンクとは対照的に，傾斜壁を持つ貯水池でのスロッシングによる深刻な被害が発生した事例が存在しないため，その特性に着目した研究も行われていない．そこで，本論文では，傾斜壁を持つ貯水池でのスロッシングの固有周期と側壁の傾斜角の関係について調べる．具体的な手順としては，数値解析によって，側壁の傾斜角を変えた多数のモデルをさまざまな周期の正弦波で加振して一次モードの固有周期の変化を見る．

数値解析の手法としては，ALE有限要素法[1)2)]を利用することが考えられるが，著者らの手元に既に計算コードが存在することや，将来越流量の予測にも発展させることを考えてSPH(Smoothed Hydrodynamics Particle Dynamics) 法[3)4)]を用いることにした．SPH法は，先に挙げたALE有限要素法に比べると計算精度の信頼性が低い恐れがあるので，本論文では静水圧分布，ダム崩壊のベンチマークテスト，振動台実験との比較によって利用した解析コードを検証した後，傾斜側壁を持つ貯水池のスロッシングの数値解析に進む．

2. SPH法

SPH法は連続体の運動を解く数値解析法であり，SPH粒子と呼ばれる粒子によって連続体を離散化するため，粒子法の一種と位置づけられている．同じく粒子法と分類されるものでは，個別要素法が土木分野では良く知られている．ただし，個別要素法では対象とする物質が離散体であったり，連続体を力学モデルによって離散化した後に支配方程式を設定することから，連続体に対する支配方程式を立てた後に粒子に離散化するSPH法とは本質的に異なる数値解析法である．

本論文では貯水池内の液体を非圧縮性粘性流体と想定し，そのNavier-Stokes方程式をMonaghan[5)]に従ってSPH法により解く．Navier-Stokes方程式のSPH法による離散化の過程はLiu[6)]に詳しいので，ここでは最終的に得られる支配方程式のみを以下に示す．

$$\frac{1}{\rho_i}\cdot\frac{\partial\sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}=\sum_{j=1}^{N}m_j\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}+\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i\rho_j}\left(\frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\beta}\right)_i+b_i \quad (1)$$

$$\rho_i=\sum_{j=1}^{N}m_jW_{ij} \quad (2)$$

$$\sigma_i^{\alpha\beta}=-p_i\delta^{\alpha\beta}+\tau_i^{\alpha\beta} \quad (3)$$

$$\tau_i^{\alpha\beta}=\mu\epsilon_i^{\alpha\beta} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\epsilon_i^{\alpha\beta}&=\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}(v_j^\beta-v_i^\beta)\left(\frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\alpha}\right)_i\\&+\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}(v_j^\alpha-v_i^\alpha)\left(\frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\beta}\right)_i\\&-\frac{2}{3}\delta^{\alpha\beta}\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}(v_j^\gamma-v_i^\gamma)\left(\frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\gamma}\right)_i\end{aligned} \quad (5)$$

ここで，$i j$ は粒子番号，m は質量，ρ は密度，N はカーネル関数の響半径内に含まれる総粒子数，t は時間，α,β，γ は座標軸方向，b は物体力，$\delta^{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタである．W はカーネル関数で本論文では三次スプライン関数[6]を用いる．μ は粘性係数で，本論文で示す以下の数値解析例ではすべて μ は 0.001Pa・s（水の値）に設定している．また，本論文では Monaghan と同様に非圧縮性流体を擬似圧縮性流体として取り扱い，流体の圧力を次の密度変化の関数（状態方程式）で求める[6]．

$$p = B\left\{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^7 - 1\right\} \tag{6}$$

ここで，定数 B は流体の非圧縮性が十分に近似できるよう十分に大きな値を設定する必要がある．本論文で示す解析は，解析結果の密度変化が 1%以上生じた場合には，さらに大きなBの値を用いて最初から計算をやり直している．また，式 (6) では初期状態よりも密度が低下した際には負圧が発生し粒子間に引張力が発生することになるので，計算途中に負の圧力が発生した際には強制的に圧力をゼロに置き換える．

SPH 法では粒子法の計算を安定化させるために次の人工粘性項が運動方程式に加えられることが多い[6]．

$$-\sum_{j=1}^{N} m_j \delta^{\alpha\beta}\Pi_{ij}\left(\frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\beta}\right)_i \tag{7}$$

ここに，

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha_\Pi \bar{c}_{ij}\phi_{ij} + \beta_\Pi \phi_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & (\boldsymbol{v}_{ij}\cdot\boldsymbol{x}_{ij} < 0) \\ 0 & (\boldsymbol{v}_{ij}\cdot\boldsymbol{x}_{ij} \geq 0) \end{cases} \tag{8}$$

$$\phi_{ij} = \frac{h_{ij}\boldsymbol{v}_{ij}\cdot\boldsymbol{x}_{ij}}{|\boldsymbol{x}_{ij}|^2 + 0.01h_{ij}^2} \tag{9}$$

$$\bar{c}_{ij} = \frac{1}{2}(c_i + c_j) \tag{10}$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j) \tag{11}$$

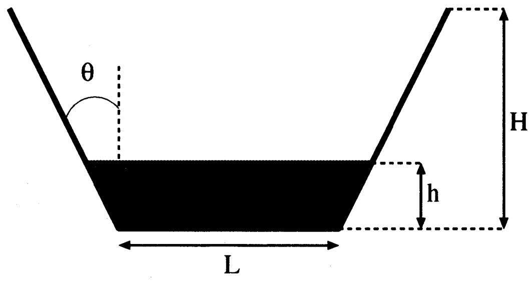
$$h_{ij} = \frac{1}{2}(h_i + h_j) \tag{12}$$

$$\boldsymbol{v}_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{x}_{ij} = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j \tag{13}$$

ここで α_Π, β_Π は定数，c は音速を表している．この人工粘性項は本来，SPH 粒子同士の過度の接近や不合理なすれ違いを抑制することを目的に導入されたものであるが，定数 α_Π, β_Π の値によっては，対象連続体の持つ粘性よりも大きな粘性力を生じることが起こり得るので，その設定に当たっては十分な注意が必要である．

3. 解析コードの検証

本論文の数値解析で使用した SPH 法による解析コードは著者らによって書かれたものであるので，解析結果に問題がないことを確認しておくために，理論解や実験値との比較を行う．



図–1 タンクモデル

表–1 モデルのパラメタ

	Case 1	Case 2
$\theta(°)$	20	20
水粒子数	531	2127

3.1 静水圧分布

ここでは SPH 法で計算した結果得られた静水圧分布と，式 (14) で計算される理論値を比較した結果を示す．

$$p = \rho g z \tag{14}$$

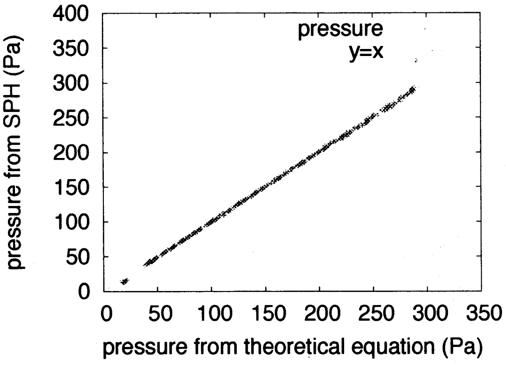
ここで，p は圧力，ρ は密度，g は重力加速度，z は水深を表している．図–1 に使用したモデルの概念図、表–1 に各パラメタの値を示す．なお，図–1 中の L，H は 0.06m，h は 0.03m，解析時間増分は 1.0×10^{-4}sec，式 (6) 中の定数 B は 1.0×10^4Pa とした．

図–2 に SPH 法と式 (14) で計算した静水圧を比較したものを示す．図中にはすべての粒子がプロットしてあり，横軸は理論式による静水圧，縦軸は SPH 法による静水圧を示しているので，傾き 1 の直線上にプロット点があれば理論値と解析値が一致していることを意味する．

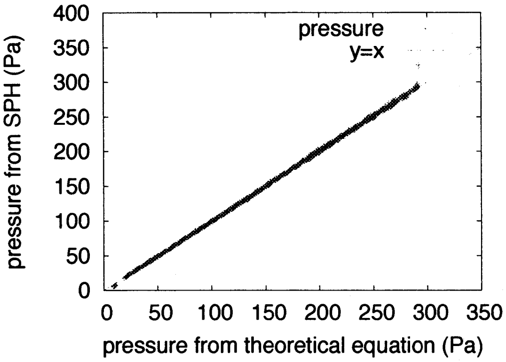
圧力の高い領域において SPH 法での計算結果が理論値を上回っている．これらの値が発生している SPH 粒子の分布を調べたところ，タンク底端部付近の粒子であった．これらの SPH 粒子を除き，SPH 法による計算結果は理論値に良く一致している．また粒子数による差もほとんど見られないことから，圧力計算においては少ない SPH 粒子であっても安定した解析結果が得られることが分かる．

3.2 ダム崩壊のベンチマークテスト

文献[5]において，ダム崩壊のベンチマークテストを用いて，SPH 法による計算結果と実験値の比較が行われている．ここでは，本論文で用いる解析コードによって同一の問題を解析し，その妥当性を確認しておく．図–3(a) は初期の SPH 粒子配置状態を示している．

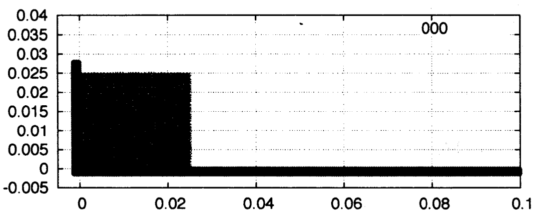


(a) Case 1

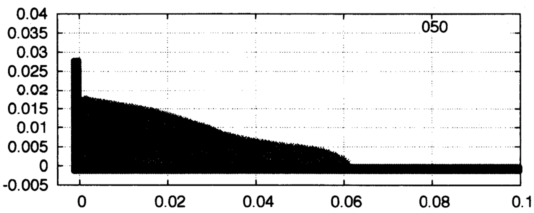


(b) Case 2

図–2 SPH 法と理論式の圧力計算結果



(a) 粒子の初期配置



(b) 変形状態

図–3 ダム崩壊のベンチマークテストのスナップショット

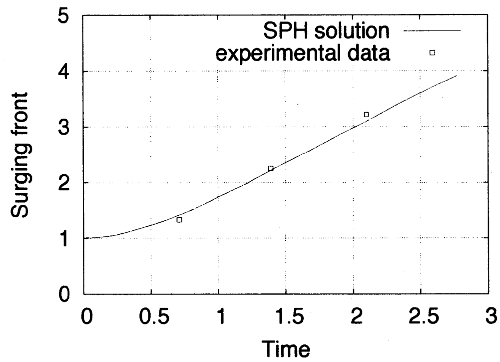
0.025m 四方の水塊がタンク側壁に隣接した状態となっており，時間が経過すると重力によって図–3(b) のように水面形状が変化して行く．

解析結果は人工粘性の定数 α_Π，β_Π の値の影響を受ける．そこで，これらの値を様々に変え最良の値を求めた．ただし，β_Π の掛かる項は流速の大きな場合に効果が生じる[5]ものなので，β_Π は 0 に固定した．式 (8) 中では $\alpha_\Pi \bar{c}_{ij}$ を一つの定数として考えることができるのでこの値を新たに α' と書き直す．α' は水同士，水と壁の間で異なる値を用いることにし，前者を α'_w，後者を α'_t と表記する．解析において，時間増分は 1.0×10^{-4}sec，水を表す SPH 粒子数は 2500 個とする．

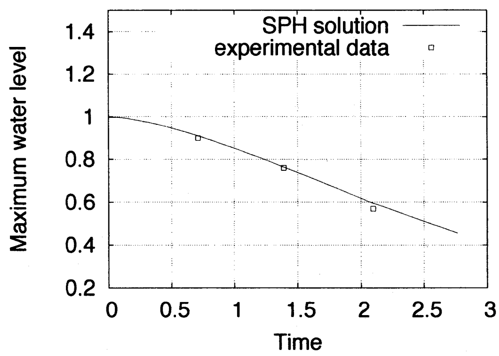
試行錯誤の結果，α'_w が 3.0 から 4.0，α'_t が 0.4 から 0.5 の間で実験値と良く合う結果が得られた．α'_w が 3.4，α'_t が 0.49 のときの計算結果を表–2，図–4 並びに図–5 に示す．水面先端位置（SF）及び水面最大高さ（HT）は初期水面高さ HT_0 で，時間は $\sqrt{T_0/g}$ で正規化されており，添字の s は SPH 法，exp は実験値を表している．実験と解析において最大の差が見られるのは無次元時間 (Time) が 0.71 のときの水面先端位置（SF）であるが，ここでもその差は 7%に収まっている．

表–2 水面先端位置 (SF) と水面最大高さ (HT) の比較

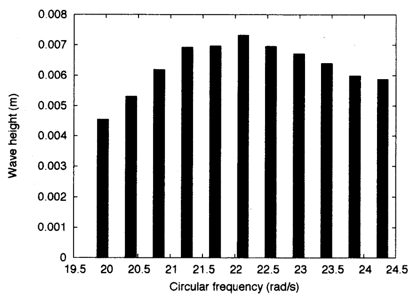
Time	SF_{exp}	SF_s	HT_{exp}	HT_s
0.71	1.33	1.42	0.90	0.91
1.39	2.25	2.22	0.76	0.76
2.10	3.22	3.09	0.57	0.60



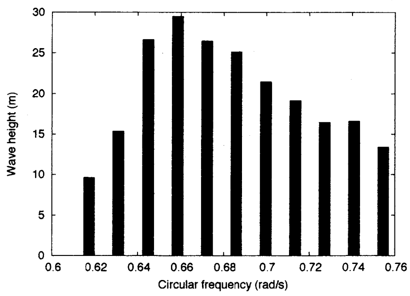
図–4 水面先端位置 (SF) の比較



図–5 水面最大高さ (HT) の比較



(a) Case 1



(b) Case 2

図–6 円振動数ごとの最大波高

表–3 直方体型タンクモデルのパラメタ

	Case1	Case2
L	0.06m	60m
h	0.03m	30m

3.3 スロッシングの固有円振動数

二次元直方体タンクには，以下の式で示される 1 次モードの固有円振動数 ω の理論解が存在する．

$$\omega = \sqrt{gk \tanh kh} \tag{15}$$

$$k = \frac{\pi}{L} \tag{16}$$

ここで g は重力加速度，h は初期水深，L はタンク幅である．ここでは，表–3 に示した 2 つのモデルを対象として，SPH 法による解析結果から固有周期を求めた結果と式 (15)，(16) で求めた理論値を比較する．

タンクに入力する正弦波加速度 a を次式で定義する．

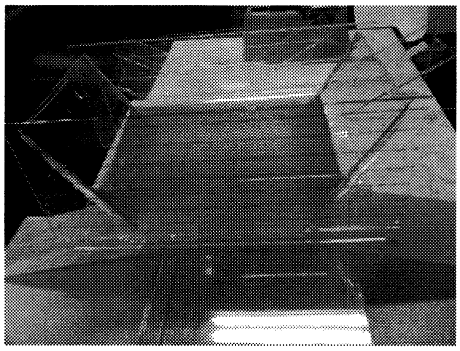
$$a = -\omega^2 A \sin \omega t \tag{17}$$

ここで A は変位振幅である．式 (17) 中の ω の値を変化させて 10 周期分の時間解析を行い，その中で観測された壁近傍粒子の最大の波高をプロットしたものが図–6 である．この中で波高の最大値が得られたものをそのモデルの固有周期と見なす．

一方，表–4 に解析により得られたスロッシング固有円振動数と式 (15) で求めた理論値との比較を示す．表–4 から分かるように，SPH 法での計算結果は，理論値に対して 5%以内の誤差となっており，SPH 法によってスロッシングの固有円振動数が精度良く得られたことが分かる．

表–4 直方体型タンクの固有円振動数 (rad/s)

	Case1	Case2
理論値	21.7	0.686
SPH	22.1	0.659



図–7 実験に用いた貯水池模型

3.4 振動台実験との比較

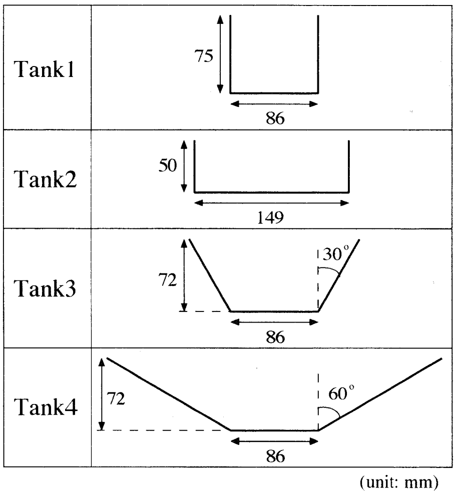
次に現実の水の挙動と SPH 法の計算結果を比較するために振動台による実験を行った．図–7 は使用した貯水池模型の写真である．貯水池模型は市販のアクリル板を切り出し，接着して組み立てて製作した．

加振に用いた振動台は横幅 34cm，奥行き 17cm であり，一方向のみに変位振幅 0.5cm で手動でハンドルを回転させることで振動する．模型と加速度計，ビデオカメラを振動台上に固定し，水の挙動をビデオにより確認する．また得られた加速度時刻歴を SPH 法による計算での入力データとして同じモデルでの解析を行い，スロッシングの様子を実験結果と比較する．

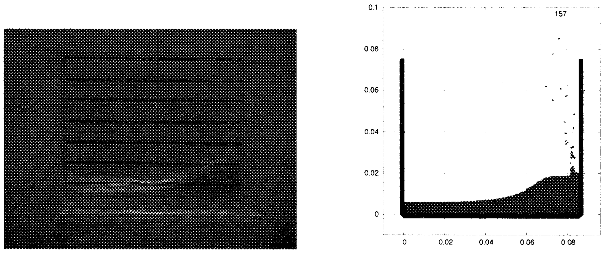
図–8 に示した 4 種類のタンクを使用し，振動台の手回しハンドルの回転を調整することで，スロッシングの波形が様々に変化するようにしながら計 19 回の実験を行った．タンク 1，2 については，蓋を設置した状態の実験も行なった．

SPH 法による解析では，時間増分 1.0×10^{-4}sec，初期粒子間距離は 5.0×10^{-4}m，式 (6) 中の B は 1.0×10^4Pa に設定した．**3.2** を参考にして水深が 0.025m のとき，α'_w は 0.49，α'_t は 3.4 とした．

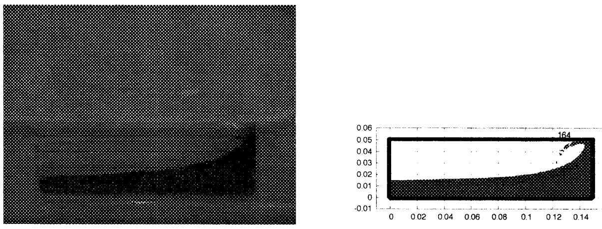
実験時に撮影された水面形状と，同時刻における SPH 解析結果を比較したものを図–9 に示す．SPH 法の計算結果では，初期水深が小さいモデルにおいて，図–9(a) に見られるように，水が大きく飛び散る場合があった．ただし，この場合でもスロッシング中の水面形状の概形は良く似ている．図–9(b) はタンクに蓋を設けた場合



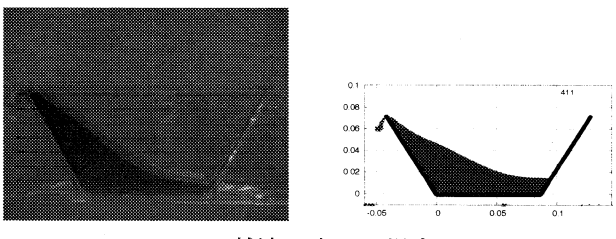
図–8 実験に用いた貯水池模型の寸法



(a) 水が飛散する場合



(b) 蓋に衝突する場合



(c) 越流が生じる場合

図–9 実験と解析の比較

の事例である．蓋に水が衝突した際の水面形状がSPH法によっても良く再現できていることが分かる．また，図–9(c) のように越流が発生している場合においても，高い精度で水面形状を求めることができている．

表–5 SPH 法解析によって求めた傾斜壁を持つ貯水池における一次モードの円振動数

$\theta(°)$ \ h(m)	10	20	30
0	0.520	0.620	0.659
10	0.500	0.570	0.593
20	0.469	0.530	0.530
30	0.439	0.470	0.467
40	0.400	0.421	0.414
50	0.363	0.370	0.351
60	0.316	0.310	0.288

4. 傾斜壁を持つ貯水池の固有周期

前節までにSPH法によって貯水池のスロッシングが精度良く再現できることが確認できたので，壁の傾斜角度を様々に変化させたモデルをSPH法で解析し，スロッシングの一次モードの固有周期の変化を調べる．

4.1 解析条件と結果

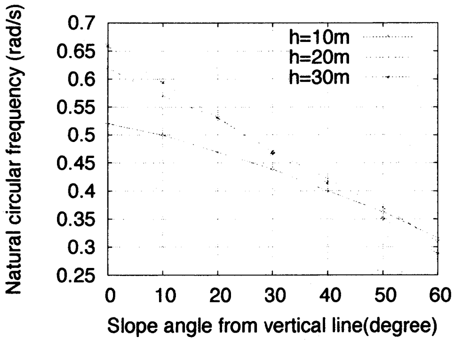
解析の対象とするタンクは L が 60m で固定，h は 10,20,30m の 3 種類，θ は $10°$ 間隔で $0°$ から $60°$ までの 7 種類とする．すなわち，解析の対象とするタンクは全部で 21 種類である．h が 20,30m のときは初期粒子間隔は 1.0m，時間増分は 1.0×10^{-2}sec とし，h が 10m のときは初期粒子間隔は 0.5m，時間増分は 0.5×10^{-2}sec とした．B は 7.5×10^6Pa とした．外力は自重と水平 1 方向の sin 波であり変位振幅は 1m とした．

解析結果を表–5 に，その点をプロットしたものを図–10 に示す．角度が $0°$ の台形型タンクは直方体型タンクと同じであるので，一次モードの円振動数を式 (15) と比較することができる．h が 10,20,30m のとき，それぞれ理論値は 0.496，0.632，0.686 rad/s となる．一方でSPH法による結果では 0.520，0.620，0.659 rad/s となっており，誤差は 5%以内でありSPH法による解析精度は十分に確保されていると考えられる．図–10 では，側壁の傾斜角が大きくなるにしたがってスロッシングの一次モードの固有周期が大きくなっていくという関係が示されている．これは，傾斜角が大きくなると水面の幅が大きくなることから，当然予想される結果である．

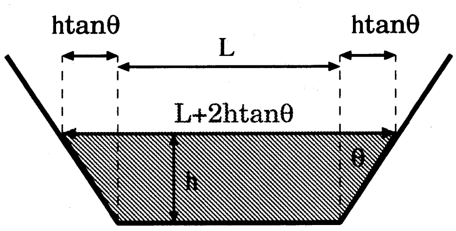
4.2 一次モードの固有円振動数を求める予測式

ここで，図–11 から，壁の傾斜角 θ を持つ貯水池の水面長さ L' は

$$L' = L + 2h\tan\theta \tag{18}$$



図–10 SPH 法解析によって得られた壁の傾斜角と一次モードの円振動数の関係



図–11 傾斜壁を持つ貯水池の水面長さ

となる．今，この横幅 L' を持つ二次元直方体型タンクを考え，このタンクをもとの台形型タンクと等価なタンクと呼ぶことにする．この等価タンクの一次モードの固有円振動数は式 (15)，(16) より，

$$\omega' = \sqrt{gk' \tanh k'h} \tag{19}$$

$$k' = \frac{\pi}{L'} \tag{20}$$

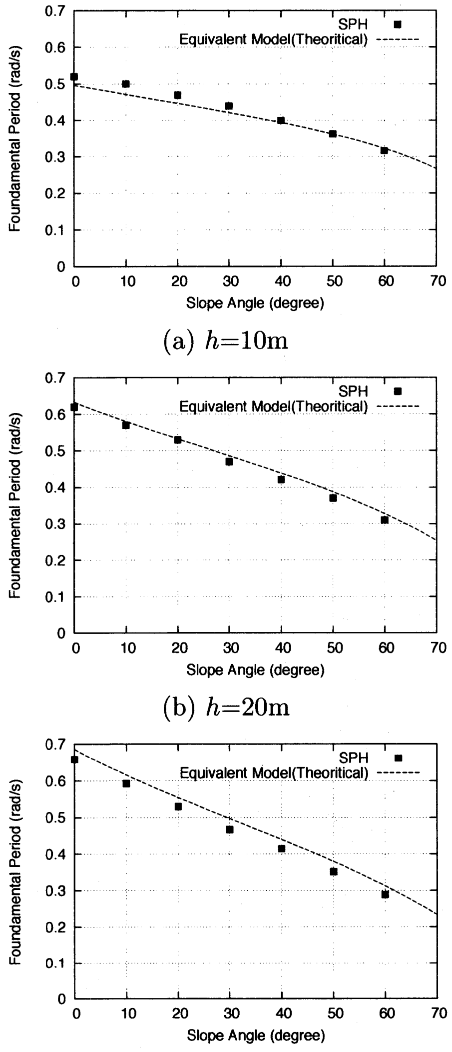
と求めることができる．

図–12 は，SPH 法による数値解析で求めた一次モードの固有円振動数と式 (18) で求めた値とを水深ごとに比較したものである．この図から，式 (18) を，傾斜壁を持つ貯水池の一次モードの固有円振動数を予測する式として用いることができることがわかる．

式 (18) が良い近似値を与える理由を考えるために，スロッシング中の水の動きを調べた．図–13 に，ある時刻における粒子速度の分布を傾斜壁を持つタンクとそれに等価なタンクとで比較したものを示す．図中，粒子速度の小さいものに色を付けている．この図から明らかなように，スロッシングによって運動する水粒子はタンクの形状が矩形であっても水面を長辺とした台形状になっている．これが式 (18) によって良い近似値が得られる理由である．

5. 結論

本論文では，ため池や汚水処理場などの傾斜した側壁を持つ貯水池において地震動によって引き起こされるスロッシングの一次モードの固有周期と，壁の傾斜角の関係についてSPH 法による数値解析を用いて調べた．数値解析を行うにあたり，使用したSPH 法の解析プログラムを静水圧分布とダム崩壊のベンチマークテストによって検証した．また，SPH 法によって傾斜した側壁を持つ貯水池のスロッシングが精度良く再現できることを評価するために振動台実験を行い，振動台実験によって得られた水面形状と，SPH 法による解析で得られたものと良く一致することを確認した．側壁の傾斜角を変えた一連のSPH 法による解析結果に基づき，等価タンクを考えることで，傾斜した貯水池におけるスロッシングの一次モードの固有周期を予測する式を提案した．提案した予測式は，限られたケースを対象とした数値解析結果から経験的に求めたものであり，現時点ではその適用範囲を明確にできていないという問題がある．今後はこの式の適用範囲を明確にするとともに，さらには二次モードにも着目した検討を

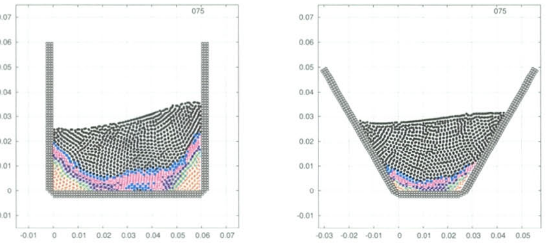


(a) h=10m

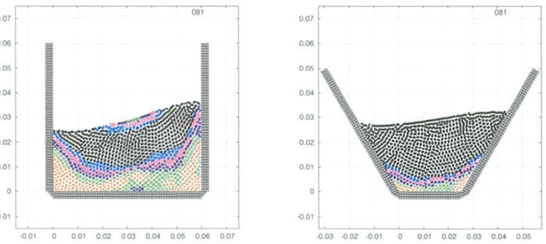
(b) h=20m

(c) h=30m

図–12 台形型タンク，及びそれと等価なタンクの固有円振動数における比較



(a) 3.75s



(b) 4.40s

図–13 台形型タンク及びそれと等価なタンクにおける水粒子の速度分布図の比較 (図中, 横軸・縦軸の単位は m, 初期水面高さ h は 30m)

行ないたい.

参考文献

1) B. Ramaswamy : Numerical Simulation of Unsteady Viscous Free Surface Flow, Journal of Comutational Physics, 90, pp,396-430, 1989.
2) 田中聖三・桜庭雅明・樫山和男: ALE 並列有限要素法による自由表面流れの非線形解析, 第 14 回数値流体力学シンポジウム, 2000.
3) L.B. Lucy : A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, The Astronomical Journal, Vol.82(12), pp.1013-1024, 1977.
4) R. Gingold and J.J. Monaghan : Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to nonspherical stars, Monthly Notes of Royal Astronomical Society, Vol.181, pp.375-389, 1977.
5) Monaghan J.J. : Simulating free surface flow with SPH, Journal of Computational Physics, 110, pp.399-406, 1994.
6) G.R.Liu, M.B.Liu : Smoothed Particle Hydrodynamics a meshfree particle method, World Scientific Publishing, 2003.

(2008 年 4 月 14 日 受付)