応用力学論文集 Vol.11, pp.467-474　(2008年8月)　土木学会

異方性超弾性モデルによる織布強化ゴム特性の数値解

Numerical Solution of Reinforced Rubber Based by Using the Anisotropic Hyperelasticity

浅井光輝*・木村嘉之**・西本安志***・西野好生****・園田佳巨†
Mitsuteru ASAI, Yoshiyuki KIMURA, Yasushi NISHIMOTO, Yoshio NISHINO and Yoshimi SONODA

*正会員　博士（工学）　九州大学准教授　工学研究院建設デザイン部門（〒819-0395 福岡市西区元岡 744）
**学生会員　九州大学大学院　工学府建設システム工学専攻（〒819-0395 福岡市西区元岡 744）
***正会員　博士（工学）　シバタ工業株式会社　技術開発部（〒672-0082　明石市魚住町中尾 1058 番地）
****正会員　博士（商船学）　シバタ工業株式会社　技術開発部（〒672-0082　明石市魚住町中尾 1058 番地）
†正会員　博士（工学）　九州大学教授　工学研究院建設デザイン部門（〒819-0395 福岡市西区元岡 744）

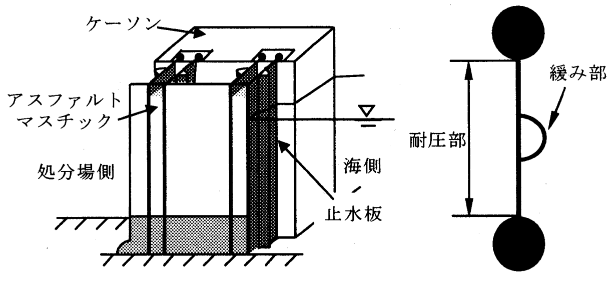
In this paper, we develop a model to describe the anisotropic hyperelastic behavior of rubber sheet reinforced by a textile fabrics of fiber. The isotropic part is modeled by the Mooney-Rivlin model, and the anisotropic behavior is also modeled by using an invariant of the right Cauchy-Green deformation tensor. In addition, we propose a simple reliability varification test for shear behavior. A couple of numerical results shows a practical efficiency, but the results of the validation using the proposed reliability test reveal limitations of the proposed model.

Key Words : *Reinforced Rubber, Anisotropic Hyperelasticity, Finite Deformation Analysis*

1. 緒言

大都市圏では廃棄物の最終処分場用地の確保が困難であり，ケーソン式護岸形式の海面埋立処分場の建設が進められている．隣接するケーソン間の遮水工としては，施工性の良さ・変形追随性の両面からゴム製止水板構造が期待されている．図–1には，著者らが試作中の止水板の概観を示す．緊急時には，耐圧部中央付近でゴム破断が先行して起こることを想定し，後に中央部のドーム状の緩み部が展開し遮水性を確保するといったフェイルセーフの概念を取り入れた遮水構造である．この特徴は，地震時などにおいてケーソン間に目地寸法のずれが生じた場合，アスファルトマスチックの自己充填性とゴム製止水板の形状変化によりケーソンの運動に追従することにある．止水板に使用するゴムは，平織り構造の織布により強化したものを予定しており，緩み部の展開後の特性までを評価するには，繊維破断点までの大変形特性までを精緻にモデル化することが求められる．

ゴムをはじめ，生体軟組織などを含むソフトマターの材料モデル化では，超弾性体の枠組み[1)2)3)]が一定の成功を収め，土木の分野でも活用されはじめている[4)5)]．また近年では，繊維を含む複合材のモデル化も盛んであり，異方性超弾性モデル[6)]へと発展している．ここで，一般的に複合材のマクロ的な特性評価法としては，均質化法などを用いた数値解析的アプローチと材料試験から材料パラメータを同定する実験的アプローチに大別される．前者は構成材料の力学特性と空間的な幾何学特性を事前に把握さえしていれば，数値的に材料



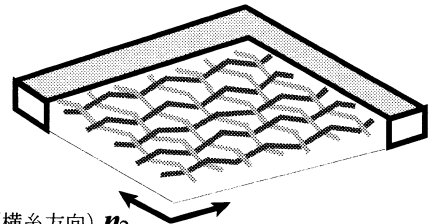
(a) 海面処分場概観　(b) 止水板の上面図

図–1　緩み部を持つ止水板構造

構成モデルが構築できることが特徴であり，主に材料設計に役立てられる．後者は，マクロ的な材料モデルを仮定した上で，モデル内のパラメータを実験結果とのキャリブレーションにより同定するものであり，先の異方性超弾性モデルもこの一例である．特に後者のモデルは，構造解析における構成モデルとして使いやすく実践的である．ただし，多数の同定すべきパラメータを含む複雑な構成モデルにおいては，限定した単純な材料試験のみからパラメータを同定することは困難であり，あらゆる応力パスに対しても同定したパラメータが有効であるのかを十分に検証すべきである．

本研究で対象とする織布強化ゴムは，製造プロセス上からロットにより特性が大きく変動する．これは，ゴム自身の材料特性の変動に加え，織布を構成する繊維の初期テンションが製造プロセスにより変化することに起因するものと考えられる．そこで本研究では，異方性超弾性モデルを仮定した実験的アプローチにより，各ロットごとのマクロ材料モデリングする方針にし，そ

の一連の手順を確立する．また，数値解析結果と実験の比較により精度確認を行う．特に構成モデルの特性上，物理的な意味の希薄な材料パラメータを多く含むため，材料パラメータ同定のために有効な材料試験法を提示すると伴に，その手順の確立を目指す．ただし本研究では，静的な単調載荷時の力学モデリングのみを対象とする．



図–2 平織り織布の繊維方向

2. 改良型異方性超弾性体モデル

ここでは，Reese ら[6)]により提案された異方性超弾性モデルを概説した後，構成モデルの解釈と改良案を提示する．

2.1 異方性を含んだ超弾性モデル

ゴム材料は特有な非線形弾性挙動を示し，しばしば Ogden モデルあるいは Mooney-Rivlin モデルなどの超弾性体としてモデル化される．本研究では，右 Cauchy-Green 変形テンソル $\boldsymbol{C}$ の不変量の関数として表現する構成モデルの一つである拡張 Mooney-Rivlin モデルを基礎とした異方性モデルを採用した．

$$W_{\mathrm{iso}}=c_{10}(I_1-3)+c_{01}(I_2-3)+c_{11}(I_1-3)(I_2-3)+c_{20}(I_1-3)^2+c_{30}(I_1-3)^3 \quad (1)$$

ここで，c_{ij} は Mooney-Rivlin 定数であり，$I_1(=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{I}), I_2(=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{C}$ の不変量である．異方性超弾性モデルでは，織布に蓄えられる歪みエネルギ密度関数 W_{ani} を同様に C の不変量により記述し，全体の歪みエネルギ密度関数は次式により与えられるものとする．

$$W=W_{\mathrm{iso}}(\boldsymbol{C})+W_{\mathrm{ani}}(\boldsymbol{C}) \quad (2)$$

Reese らは次式により異方性に関与する歪みエネルギ密度関数 $W_{\mathrm{ani}}^{\mathrm{ORG}}$ を与えた．

$$W_{\mathrm{ani}}^{\mathrm{ORG}}=K_1(I_4-1)^{\gamma_1}+K_2(I_5-1)^{\gamma_2}+K_3(I_6-1)^{\gamma_3}+K_4(I_7-1)^{\gamma_4}+K_5(I_1-3)^{\gamma_5}(I_4-1)^{\gamma_5}+K_6(I_1-3)^{\gamma_6}(I_6-1)^{\gamma_6}+K_7(I_4-1)^{\gamma_7}(I_6-1)^{\gamma_7} \quad (3)$$

K_i, γ_i は材料定数であり，先のゴムに対応したパラメータを含めると全部で 19 個ものパラメータを同定しなくてはならない．ここで，I_4〜I_7 は，図–**2** に示すように平織り構造を定義する 2 方向の単位テンソル $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ より定義される構造テンソル $\boldsymbol{M}_i(=\boldsymbol{n}_i\otimes\boldsymbol{n}_i)$ を用いて次式により評価されるテンソル不変量である．

$$I_4=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{M}_1,\quad I_5=\boldsymbol{C}^2:\boldsymbol{M}_1 \quad (4)$$
$$I_6=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{M}_2,\quad I_7=\boldsymbol{C}^2:\boldsymbol{M}_2$$

上記のように歪みエネルギー密度関数がテンソル $\boldsymbol{C}$ の不変量により表記されるため，あとは通常の超弾性体の構成則における手順に従い $\boldsymbol{C}$ で偏微分することで第 2Piola-Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{S}=2\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{C}}$ が定義され，再度偏微分することで接線係数テンソル $\mathbb{C}=4\frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{C}\partial \boldsymbol{C}}$ が評価される．上記のモデルを用いた際の応力および接線係数テンソルの具体的な中身は付録にて整理して記述する．

2.2 異方性歪みエネルギ密度関数の改良

異方性を考慮するために追加された歪みエネルギ密度関数は構造テンソルを用いて表記しているが，無変形時にゼロとなる制約が有る程度で，標準的な超弾性体モデルと同様にモデルの拡張が可能である．これまでの過去の事例や著者らの経験から判断すると，Reese らのモデルの 5 項目以降の項は数値解析結果に及ぼす影響が小さいため[6)]，4 項目までに限定して使用することにし，他に追加すべき項を検討した．

ここで再度，4 項目までの物理的な意味を確認する．以下では，説明の簡略化のため，$\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$ に限定して話を進める．このとき，I_4 から I_6 までの項は次のように右 Cauchy-Green 変形テンソルの成分と対応付けられる．

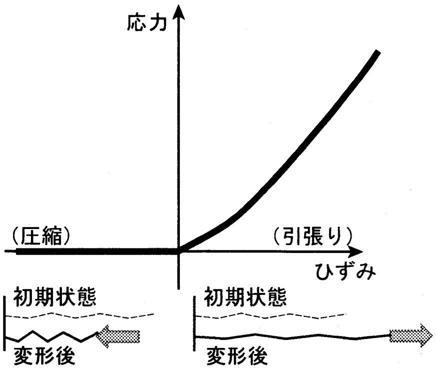
$$I_4=C_{11},\quad I_5=C_{11}^2+C_{12}^2+C_{13}^2$$
$$I_6=C_{22},\quad I_7=C_{21}^2+C_{22}^2+C_{23}^2 \quad (5)$$

I_4, I_6 は各繊維方向への剛性に関与する成分，I_5, I_7 は主にせん断変形に関与する成分であることがわかる．ただし，I_5, I_7 は各糸方向への単純引張変形時においても C_{ii}^2 は残るため，一軸引張り試験においても C_{ii} の 2 乗に比例することに注意しなくてはならない．以下では，式 (3) の第 2，4 項がせん断変形にのみ関与する項として限定して利用することで，材料パラメータの同定を容易にするモデルへと改良する．

拡張 Mooney-Rivlin モデル (1) を参考に，同定パラメータである指数定数をすべて低次の整数値に固定し，次式によりひずみエネルギ密度関数 $W_{\mathrm{ani}}^{\mathrm{MOD}}$ を与えるものとする．

$$W_{\mathrm{ani}}^{\mathrm{MOD}}=K_1^1(I_4-1)+K_1^2(I_4-1)^2+K_1^3(I_4-1)^3+K_2^1(I_6-1)+K_2^2(I_6-1)^2+K_2^3(I_6-1)^3+K_1^s(I_5-1)+K_2^s(I_7-1) \quad (6)$$

はじめの 6 項のパラメータは各繊維糸方向への一軸引張り試験より同定し，せん断変形に関する残りのパラメータは別の試験結果から決定するという方針である．



図–3　繊維に作用する応力〜ひずみ関係

以下にはその要点を説明する．

各繊維軸方向への一軸引張り試験では，せん断に関するパラメータの影響は小さいものと考え，$k_s = K_1^s, K_2^s = 0.0$ と仮定し，応力〜ひずみ関係をカーブフィットすることで，各繊維軸方向に対応する 6 つのパラメータ (K_1^1, K_1^2, K_1^3, K_2^1, K_2^2, K_2^3) を同定する．その後，K_1^s, K_2^s の値は別途実施するせん断特性試験から同定する．

2.3　繊維圧縮時の取扱い

図–3 には，繊維の応力〜ひずみ関係の模式図を示す．繊維は引張りには耐力を示し，圧縮時にはすぐに座屈してしまい抵抗力が働かない．このため，繊維方向に圧縮変形が作用した際には，異方性ひずみエネルギ密度関数を強制的にゼロとすることで剛性が消滅することを表現する．ここで，繊維方向への変形は I_4, I_6 により評価できるため，式 (6) 内の各係数を次のように修正すればよい．

$$\begin{aligned} K_1^{i\prime} &= K_1^i \mathbf{inv}(I_4) \\ K_2^{i\prime} &= K_2^i \mathbf{inv}(I_6) \end{aligned} \tag{7}$$

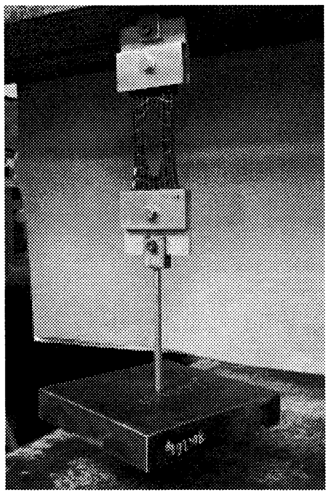
ここで，I_i は次式にて与えられるバイナリ関数として定義する．

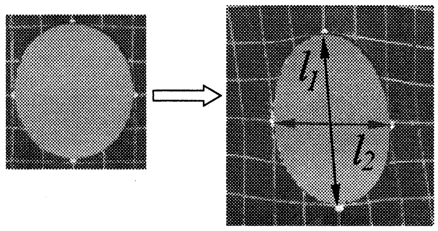
$$\mathbf{inv}(I_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{1 + \mathrm{sign}(I_i - 1)\} & \text{if } I_i - 1 \neq 0 \\ 0 & \text{if } I_i - 1 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

本研究では，上記の構成モデルを商用 FEM ソフトウェア MSC.Marc のユーザ定義関数 Hypela2 を用いて実装し，有限変形有限要素解析を実施した．

3.　簡易検証用実験

すべての材料パラメータ同定には，前述のように各繊維方向への一軸試験に加え，せん断試験に対応する実験が必要不可欠である．本研究で対象とする織布強化ゴムは，織布を 2 枚のゴムシートで挟んだ後，ホットプレス加工により薄片状シートとして一体化されるため，薄片のまま簡易的に試験することが望ましい．ここでは，シート状のゴム試験片から容易にせん断特性を把握可能な試験法を提示し，変形状態を表す形状に対する再現性から計算誤差を評価し，構成式の有効性を検証する．


図–4　重錘式引張り試験



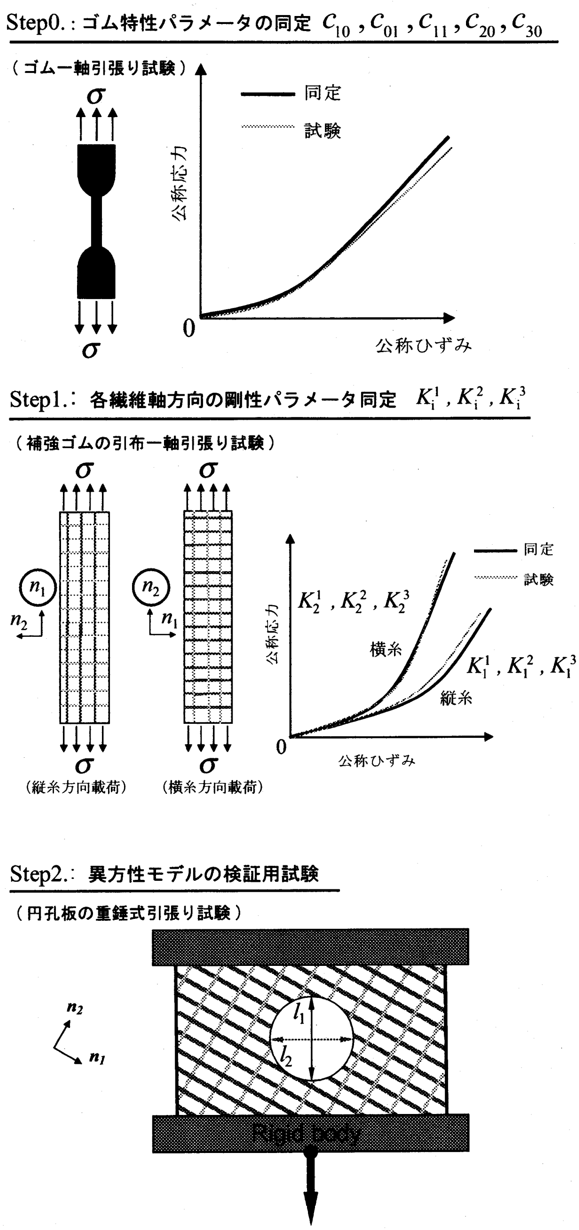
図–5　検証用変数の設定

3.1　円孔板の重錘式引張り試験の利用

円孔板には孔周辺に応力が集中しやすく，変形時には円の形状変化が顕著となる．特に，繊維の配置方向によってはせん断変形が生じ，円の形状が大きく歪む．この特性を活かし，主に円の形状変化を誤差と定めることでせん断に関与する材料パラメータの同定を試みる．ここで，図–4 に示す重錘式の引張り試験を採用したのは，水平方向への変形の拘束がないため，異方性の影響による形状変化がより増幅されるためである．一方，水平方向変位を拘束したまま，鉛直方向へ強制変位を与えることで一軸引張り試験を行うと，孔周辺にのみ過剰な変形が集中することにより面外方向に捲れ上がる現象[1)]（幾何学的非線形に伴う分岐現象）が生じてしまうため，材料試験としては不適切となる．

3.2　形状変化による誤差指標

試験の結果，図–5 に示すように板下端が右へ移動し，孔の形状も右に回転した楕円状になるものとする．このとき，2 方向の軸長と軸の回転角度を画像計測し，この実測値 ($l_{1\mathrm{exp}}$, $l_{2\mathrm{exp}}$) と対応する計算値 ($l_{1\mathrm{sim}}$, $l_{2\mathrm{sim}}$)



図–6 パラメータ同定手順まとめ

との差を誤差指標として定める．

3.3 パラメータ同定手順のまとめ

最後に，これまでに説明したすべての材料パラメータの同定手順をまとめる．図–6 には一連のフローの概念図を示す．以下にはその補足説明を加える．

Step0.：ゴム特性パラメータの同定 $(c_{10}, c_{01}, c_{11}, c_{20}, c_{30})$

Step1.：各繊維軸方向の剛性に対応するパラメータの同定 (K_i^1, K_i^2, K_i^3)

Step2.：円孔板の重錘式引張り試験による検証（必要であれば，せん断パラメータ k_s を調整）

以上の手順に従えば，全部で 12 個のパラメータが比較的容易に同定できる．上記手順の妥当性，および提案する構成モデルの精度は次節の適用例にて検証する．

4. 適用例

適用例として，6,6-ナイロン繊維により平織りされた織布により強化したゴムを用いた．平織り構造の縦糸は横糸に比べ繊維を高密度で使用している．具体的な諸量は表-1 にまとめて示す．ここで，表中の構成糸の単位 dtex(デシテックス) は，長さ 10,000m での質量が 1g となるときの糸の太さを示す．ホットプレス加工後の強化ゴムの平均厚さは 2.5mm であった．以下では，上記の手順で生成した強化ゴムシートから各試験片に切り出し，前節で示した手順により材料物性値を同定する．また，別の角度に織布を配置した円孔板重錘試験の数値計算結果により，提案する構成モデル，およびパラメータ同定手順の有効性を検証する．

表–1 織布の材料物性値

構成糸 (dtex)	縦糸	1400
	横糸	2100
構成糸密度 (本/5cm)	縦糸	56
	横糸	26
織布強度 (N/cm)	縦糸	2502
	横糸	2468
破断ひずみ (%)	縦糸	49.0
	横糸	22.0

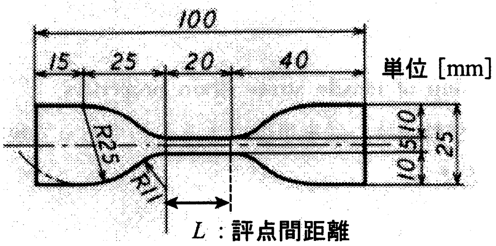
4.1 (Step0) ゴム特性パラメータの同定

ゴムに関与するパラメータ同定のために，JIS K 6251 に準拠し，JIS3 号ダンベル試験片を用い，引張り速度 500mm/min，試験温度 23 ℃の環境で引張り試験を実施した。ダンベル試験片寸法および標線間隔を図–7 に示す．

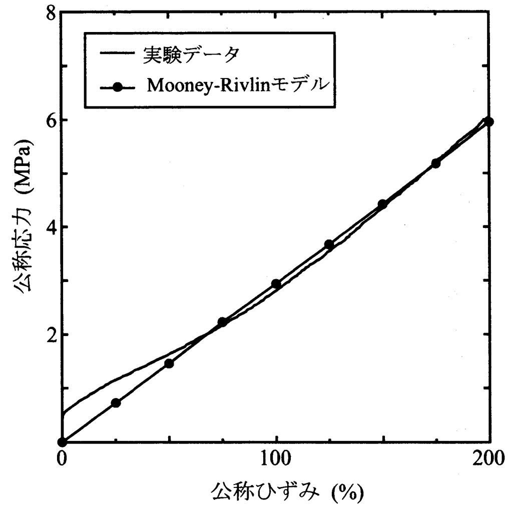
図–8 には試験結果より与えられた公称応力～公称ひずみ関係を示す．同図には MSC.Marc のカーブフィット機能により同定したパラメータを用いた際の計算結果を併せて示している．同定パラメータを表–2 に示す．今回使用したゴムの応力～ひずみ関係においては，高ひずみ領域 (100% 以上) においても非線形性が弱く，高次の項は不要である結果となった．低ひずみ領域（30%程度まで）を除けば，十分な精度で再現されている．

表–2 ゴム特性パラメータの同定値（単位:MPa)

c_{10}	c_{01}	c_{11}	c_{20}	c_{30}
1.03	-0.55	0.04	0.0	0.0



図–7 JIS3 号ダンベル試験片



図–8 ゴム一軸状態の応力〜ひずみ関係図と同定結果

表–3 各糸方向パラメータ同定値 (単位:MPa)

(使用する項)	k_1^1	k_1^2	k_1^3
縦糸方向 (3 次項まで)	1.8	0.9	17.5
縦糸方向 (2 次項のみ)	-	15.5	-
横糸方向 (3 次項まで)	1.0	7.2	30.0
横糸方向 (2 次項のみ)	-	25.5	-

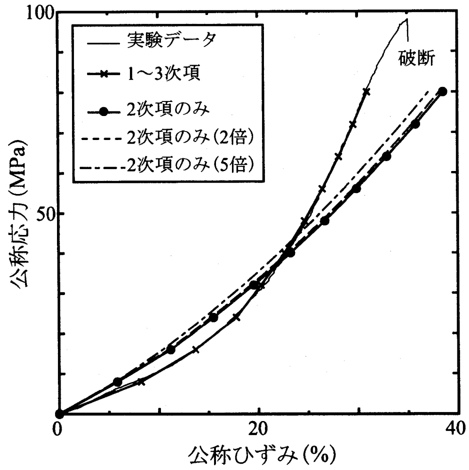
4.2 (Step1) 各繊維軸方向の剛性に対応するパラメータを同定

ゴム引布試験は，JIS K 6404-3 に準拠し，幅 30mm × 長さ 450mm × 厚さ 2.5mm の短冊状試験片を用い，引張り速度 200mm/min，試験温度 23 ℃の環境で実施した。なお，試験片中央に標線 100mm を設け，標線間隔をレーザ変位計にて計測し，図–9,10 に示す一軸試験の公称応力〜公称ひずみ関係を得た．なお，短冊状試験片は織布の縦糸方向 $\boldsymbol{n}_1$，横糸方向 $\boldsymbol{n}_2$ に切り出し，各試験片に対して 3 回の試験を実施した．

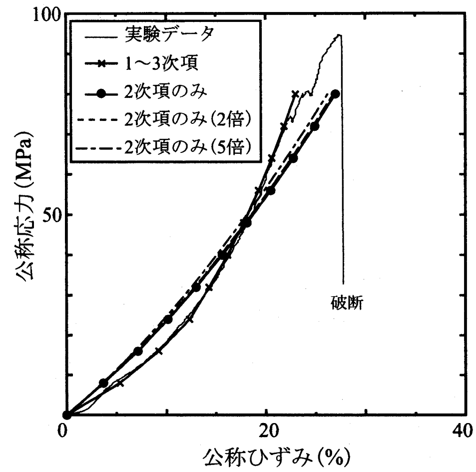
先に同定したゴム特性パラメータを用い，異方性パラメータを同定した．また，せん断に関与するものと思われるパラメータは $k^s = 0.0$ として暫定的な値を用いているため，次節の円孔試験により修正値を検討する必要がある．

ここでは，同定においては各方向について 3 次の項までを用いる場合と，2 次の項のみによりカーブフィットを実施した 2 ケースの結果を比較する．表–3 に同定されたパラメータの一覧を示す．また，同定結果は先に示した図–9,10 による実験結果と比較している．自明ではあるが，3 次までの複数の項があればカーブフィットの精度が格段に増す．ただし，2 次の項のみを使用した場合に比べて格段に数値不安定性が顕著となり，このままのパラメータを用いて次節に示す円孔板の計算が実施不可能であった．特に，3 次の項の追加が不安定性を招いている．近年，異方性超弾性モデルにおいては追加する項のそれぞれに凸性を満足させる多凸性の歪みエネルギ密度関数[7)8)]が提案されているように，安易に項を追加するのではなく，再度，構成モデルとしての安定性を満足する明確な指標を確立する必要があることを促す結果となった．

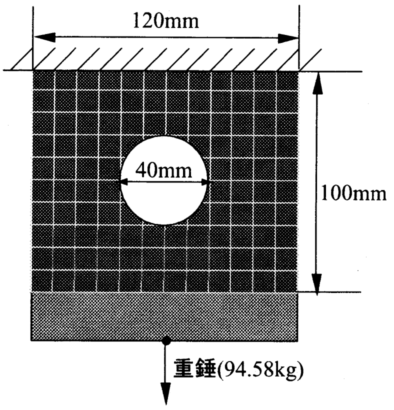
また，図–9,10 には，異方性材料パラメータは変化させず，表–2 に示すゴムに対応する材料パラメータを 2 倍，5 倍と増加したときの結果も併せて示している．これは，ホットプレス加工においてゴムと織布を一体



図–9 引布試験による応力〜ひずみ関係と同定結果 (縦糸方向)



図–10 引布試験による応力〜ひずみ関係と同定結果 (横糸方向)



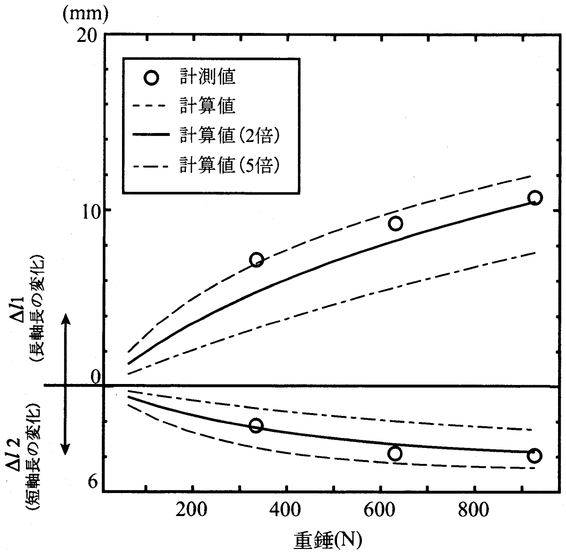
図–11　重錘式引張り試験片

化させる際に，繊維軸方向以外にも等方的な剛性も増加するものと想定したためである．なお，本モデルの参考としたReeseらの論文においても，複合材における母材のパラメータを増加させるといった修正を施している．今回使用した織布強化ゴムの繊維方向への引布試験においては，母材であるゴムの物性値を5倍まで変化させても，大した差異はみられない．これは，ゴム単体の応力〜ひずみ関係と織布強化ゴムの応力〜ひずみ関係の比較からも容易に推察されるように，構成式において，ゴムの剛性に比べて繊維の剛性に関する寄与率が2オーダーほど低いためである．ゴムに関する物性値の影響については，次節の計算例を基に再度考察を加えることにする．

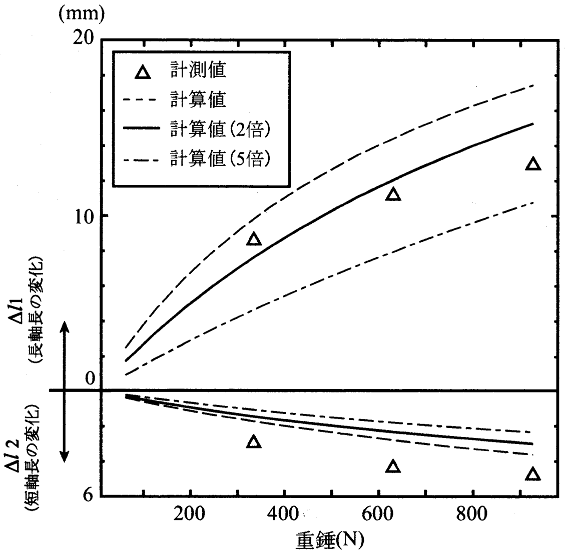
4.3 (Step2) 円孔板の重錘式引張り試験による検証

図–11に示す円孔板を用い，重錘式引張り試験を実施した．本構成モデルの特徴は，織布を回転させたい方向へ単位方向ベクトル$\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$を設定すればよい．ここでは，前節に同定したすべての同一のパラメータ（軸方向パラメータ（注：2次の項のみ），せん断方向パラメータ$k_s = 0.0$，ゴム同定パラメータ）を用い，横糸を鉛直方向から時計向きに30°，45°回転させて配置した際の試験結果の再現性を検証する．また前節と同様に，ゴムに関するパラメータについては，同定した値に加え，すべてのパラメータを単純に2倍，5倍と増加した際の結果を示すことで，織布強化による等方性に関する剛性の変化について検討する．

重錘は3段階（335N, 630N, 927N）に設定し，各段階において軸長とその回転角を画像から計測した．試験片には画像計測の補助のために，10mm間隔で白線を付している．図–12には軸長の計測値と計算値を比較する．せん断方向パラメータk_sに関する項は用いていないものの，実験の傾向は十分に捉えられている．また，ゴムに関するパラメータを仮想的に増加した場合，前節における繊維軸方向の一軸試験では影響が少なかったが，図–12に示す円孔板の荷重と変形量の関



(a) 横糸30°回転



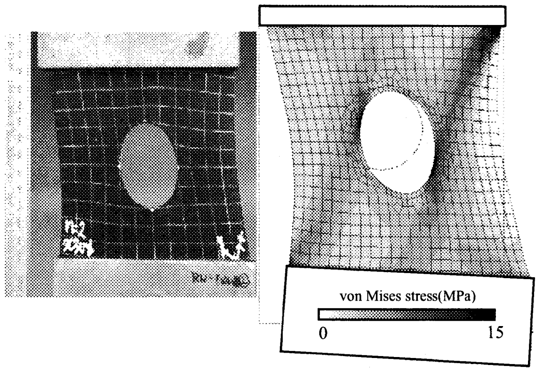
(b) 横糸45°回転

図–12　軸長変化の比較

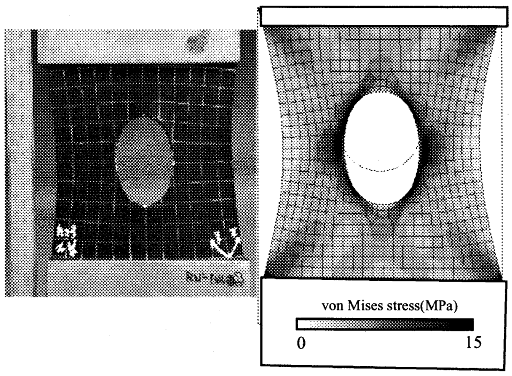
係においては，非常に大きな差が生じている．なお今回の例では，ゴムの同定パラメータを2倍程度に増加すると，実験と比較的良い一致を示していた．これは，この異方性構成式が繊維方向にのみ剛性を増加させるといった特徴から，等方的な剛性の増化は表現できないことに起因するものであり，繊維軸方向のみの材料試験による材料物性値の同定では確認できない事実であった．

図–13には，ゴムに関する材料パラメータの同定値を2倍にした際の変形図（重錘927N時）を示す．メッシュ図と実験の標線の変形パターンはほぼ全領域で比較的良好な一致を示している．また同図では，von-Mises応力分布のコンター図を示している．両計算結果ともそれぞれの繊維糸方向に応力集中部が見られており，物理的にも妥当な結果が与えられているものと判断できる．

最後に，暫定的に0.0として設定していたせん断パ



(a) 横糸30°回転



(b) 横糸45°回転

図–**13** 計算結果と実験の比較

ラメータ k_s に関する項を追加すると，前節でも述べた数値不安定性が顕著となり計算不可能であった．今後，さらに高精度な材料モデルを構築するには，軸変形だけでなくせん断変形についての再現性を検証することが不可欠であり，多凸性ひずみエネルギ密度関数など安定な構成式へと転換することが賢明であると考える．

5. 結言

今後のゴム製止水板の構造強度解析に向け，織布強化ゴムのマクロ的な材料特性評価のために実験的アプローチを採用し，その簡易的な検証用試験を提示し，精度検証を実施した．異方性超弾性モデルはこれまでにも数多く提案されているが，数値解としては仮想的な数値実験に留まっており，具体的な検証方法あるいは物理的意味の希薄な材料パラメータの設定方法が欠如しており，実用的なハードルが高かった．本研究では，パラメータ数の減少のためにも必要な項を選定し，段階的に材料パラメータを設定する方針をとった．本数値実験を通して明白となった事実と今後の課題を以下に列挙する．

- 提案する円孔板の重錘試験では，一つの試験片より多くの幾何学的特性を評価可能であり，複雑化するパラメータ同定に有効となる．
- 異方性超弾性モデルの材料パラメータ同定およびその検証には，軸方向の一軸試験だけでは不十分である．
- 異方性歪みエネルギ密度関数の項を限定した簡易的なモデルでも，工学的には有効な数値解を示す．
- 現在，不変量記述される異方性歪みエネルギ密度関数の項の設定方法は多様化しているが，選定如何によっては数値不安定性が顕著となる．多凸性型の関数[7)8)]などより安定した構成モデルの導入が望ましい．
- 織布強化ゴムにおいては，繊維方向以外にも等方的に剛性が増大している可能性があり，等方性に関する材料パラメータをゴム単体の物性値よりも大きめに設定すると数値解が改善される傾向にある．
- 物理的にも明白なせん断特性項の設定が，解の精度向上のためにも必要である．

今後，前述した課題を克服し，より実践的な異方性超弾性モデルへと発展することが望まれる．また，止水板の設計においては，これらの静的弾性体の力学モデルの結果を活かし，動的な繰り返し挙動の再現に向けた粘性・繰り返し損傷モデルへと発展させる予定である．

参考文献

1) Betsch, P., Gruttmann, F. and Stein, E. : A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.130, pp.57-79, 1996
2) Ogden, R.W.: Large deformation isotropic elasticity on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids, *Proc. of the Royal Society of London*, Series A 326, pp.565-584, 1972
3) 田中真人，野口裕久：ひずみの主不変量を用いたOgden材料モデルの実装と数値解の収束性の評価，日本計算工学会論文集，No.20070008, 2007
4) 吉田純司，阿倍雅人，藤野陽三：高減衰積層ゴム支承の3次元有限要素解析，土木学会論文集，No.717/I-61, pp.37-52, 2002
5) 下薗征史，園田佳巨，西本安志：ゴムの速度効果を考慮した防舷材の荷重-変位特性に関する解析的考察，土木学会応用力学論文集，Vol.10, pp.293-300, 2007
6) Reese, S., Raible, T. and Wriggers, P. : Finite element modelling of orthotropic material behaviour in pneumatic membranes, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.38, pp.9525-9544, 2001
7) Itskov, M., Ehret, A.E. and Mavrilas, D. ：A polyconvex anisotropic strain-energy function for soft collagenous tissues, *Biomech Model Mechanbiol*, Vol.5, pp.17-26, 2006
8) Schroder, J. and Neff, P. : Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.40, pp.401-445, 2003
9) Holzapefel, G.A.: *Nonlinear Solid Mechanics -A Continuum Approach for Engineering-*, Wiley, Chichester 2000

付録 I　不変量形式の超弾性モデルにおける応力と接線係数評価の一般的記述

右 Cauchy-Green 変形テンソル $\boldsymbol{C}$ の不変量の関数として表現する超弾性構成モデルでは，2 階の単位テンソル $\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{C}$ とその逆テンソル $\boldsymbol{C}^{-1}$ から第 2Piola-Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{S}$ が評価できる．

$$\boldsymbol{S} = \gamma_1 \boldsymbol{I} + \gamma_2 \boldsymbol{C} + \gamma_3 \boldsymbol{C}^{-1} \tag{I.1}$$

ここで各定数は使用する歪みエネルギ密度関数により異なる値を取り，次式にて設定される．

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right) \\
\gamma_2 &= -2\frac{\partial W}{\partial I_2} \\
\gamma_3 &= 2I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3}
\end{aligned} \tag{I.2}$$

ここで I_3 はヤコビアン J の 2 乗で与えられる $\boldsymbol{C}$ の 3 次不変量である．接線係数 $\mathbb{C}$ も同様に次のように記述できる．

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} = {} & \delta_1 \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + \delta_2 (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{C} + \boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{I}) \\
& + \delta_3 \left(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{C}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}\right) + \delta_4 \boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{C} \\
& + \delta_5 \left(\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{C}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}\right) + \delta_6 \boldsymbol{C}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}^{-1} \\
& + \delta_7 \boldsymbol{C}^{-1} \odot \boldsymbol{C}^{-1} + \delta_8 \mathbb{I}
\end{aligned} \tag{I.3}$$

ここで，$\otimes, \odot$ はテンソル積であり，$\mathbb{I}$ は 4 階の単位テンソルである．各係数は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= 4\left(\frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_1} + 2I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + \frac{\partial W}{\partial I_2} + I_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_2}\right) \\
\delta_2 &= -4\left(\frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_2}\right) \\
\delta_3 &= 4\left(I_3 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} + I_1 I_3 \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3}\right) \\
\delta_4 &= 4\frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_2}, \qquad \delta_5 = -4I_3 \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} \\
\delta_6 &= 4\left(I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} + I_3^2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_3 \partial I_3}\right) \\
\delta_7 &= -4I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3}, \qquad \delta_8 = -4\frac{\partial W}{\partial I_2}
\end{aligned} \tag{I.4}$$

参考までに，ひずみエネルギ密度関数として拡張 Mooney-Rivlin モデル (1) を用いた際の係数の一覧を**表–4**, **表–5** にまとめて示す．ここまでの式の展開の詳細は文献[9]に委ねる．

表–4　応力評価に使用する係数一覧

	拡張 Mooney-Rivlin
γ_1	$2\{c_{10} + c_{01}I_1 + c_{11}(I_1^2 - 3I_1 + I_2 - 3)$ $+2c_{20}(I_1 - 3) + 3c_{30}(I_1 - 3)^2\}$
γ_2	$-2\{c_{10} + c_{11}(I_1 - 3)\}$

表–5　接線係数評価に使用する係数一覧

	拡張 Mooney-Rivlin
δ_1	$4\{c_{01} + 3c_{11}(I_1 - 3)$ $+ 2\,c_{20} + 6c_{30}(I_1 - 3)\}$
δ_2	$-4c_{11}$
δ_8	$-4\{c_{01} + c_{11}(I_1 - 3)\}$

(2008 年 4 月 14 日 受付)