応用力学論文集 Vol.11, pp.451-458　(2008年8月)　　土木学会

非線形均質化法によるニッケル超合金の弾塑性解析

Elasto-Plastic Analysis of Nickel Based Superalloy by Nonlinear Homogenization Method

斉木　功*, 川内　真**, 森　勉***, 岩熊哲夫****
Isao SAIKI, Makoto KAWAUCHI, Tsutomu MORI and Tetsuo IWAKUMA

*正会員　博(工)　東北大学大学院准教授　工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06)
**学生員　東北大学大学院　工学研究科土木工学専攻
***Ph.D. Prof. Materials Science Centre, University of Manchester
****正会員　Ph.D.　東北大学大学院教授　工学研究科土木工学専攻

Nickel based superalloy has excellent mechanical properties at high temperatures. The key factors governing its elasto-plastic characteristics are supposed to be its microstructure, including misfit strain and nonuniform plastic deformation behavior of γ matrix. However, contribution of each factor to the overall elasto-plastic characteristics is not investigated quantitatively. In this paper, a series of numerical experiment by the homogenization method are therfore conducted on a few specific microstructures in order to clarify the elasto-plastic behavior of nickel based superalloy.

Key Words : *nickel based superalloy, nonlinear homogenization method, elasto-plastic property, multiscale method*

1. はじめに

超合金は高温で用いられる合金であり，高温で高い強度およびクリープに対する高い抵抗力を持つように設計される．ニッケル超合金は主にNiを成分とする母相(γ相)と基本組成をNi_3Alとする析出物(γ'相)からなる微視構造を持つ[1]．ニッケル超合金の微視構造は，図–**1**に示すようになっており，無色で示されたγ相の中にグレーで示されたほぼ立方体形状のγ'相がほぼ周期的に存在している．実用合金ではγ'相の大きさは約0.5μmである．γ'相の高温強度が高いために，超合金全体としての高温強度が高くなっている．このような超合金の材料特性をさらに改善するためには，ニッケル超合金の強度特性を定量的に評価すること，また，そのためにはニッケル超合金の微視構造における弾塑性挙動を解明することが重要である．

ニッケル超合金の塑性変形の様子はSchneider et al.[2]によって電子顕微鏡で観察され，塑性変形が起こった証拠である転位がγ相中に均一に存在せず，特定のチャネル中にのみ存在すると報告されている．ここで，図–**1**において載荷方向をz方向とすると，載荷方向に垂直な法線を持つγ相の領域を垂直チャネル，載荷方向を法線に持つγ相の領域を水平チャネルと呼ぶ．塑性変形が特定のチャネルにおいて生じる原因は，2相の格子定数の違いによって生じるミスフィットひずみによるものであるとの報告がなされている[3),4)]．ミスフィットひずみϵ_0は，γ相の格子定数をa_0，γ'相の格子定数をaとすると

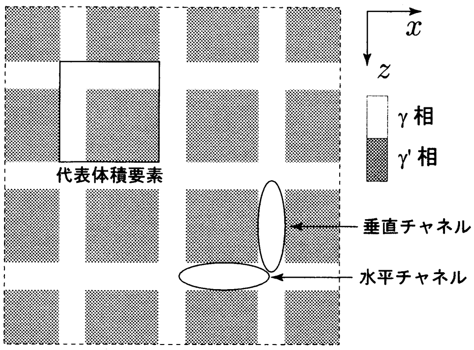
$$\epsilon_0 = (a - a_0)/a_0$$

と定義される．格子定数はX線回折や中性子回折により計測することができ，その結果から，ニッケル超合金のミスフィットひずみは-0.2%程度であることが知られている．

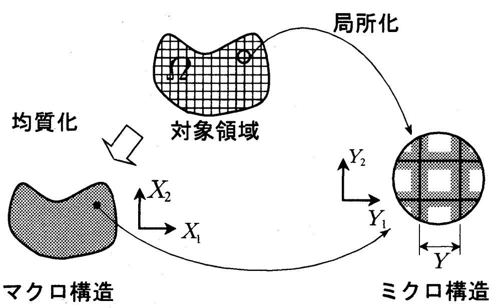
一方，Ratel et al.[5]は，マイクロメカニクスの手法を用い，垂直チャネルに塑性変形が生じた場合と，水平チャネルにも塑性変形が生じている場合の，巨視的な荷重と巨視的な塑性変形の関係を求めた．その結果，垂直チャネルのみに塑性変形が生じるという仮定の下であれば，小さい荷重によって塑性変形が生じる可能性があること，逆に，大きい荷重状態では，水平チャネルにも塑性変形が生じる可能性があるとしている．

以上述べてきたように，ニッケル超合金の巨視的な弾塑性挙動と微視構造における塑性変形の進展の関係が，実験や理論力学によるアプローチにより徐々に明らかにされてきている．しかし，実験においては，その条件や得られるデータが限られていること，また，理論力学においては単純化のための大胆な仮定を設ける必要があることなどから，巨視的な弾塑性挙動や微視構造内の塑性変形の進展についての定量的な評価には至っていない．

そこで，本研究では，計算力学に基づく平均化手法により，ニッケル超合金の微視構造において進展する塑性変形と平均的な弾塑性挙動について詳細に解析を行うこととした．複合材料の平均化手法は種々提案されているが，任意の形状の微視構造の具体的なモデルに対する弾塑性解析に基づく数値的な材料試験を行う手段としては，均質化法が最も適していると考えられる．本研究では材料非線形性を考慮することから，一般化収束論に基づく非線形均質化法[7),8)]を用い，ニッケル基超合金の弾



図–1 ニッケル超合金の微視構造



図–2 マルチスケールモデリングの概念

塑性解析を行う．

2. 非線形均質化法の定式化

本節では，2 変数収束論[6]に基づく非線形均質化法の定式化[7),8)]の概要を示す．

2.1 境界値問題の設定

図–2 に示すように，非常に小さい ϵ によって規定される大きさ ϵY の微小な単位周期構造により，周期的に埋め尽くされた領域 Ω を解析対象とする．このとき，対象領域は大きさ ϵY の並進変換に対して不変である．この構造全体の力学挙動は基本周期構造のみならず，その大きさを表すパラメタ ϵ にも影響を受ける．ただし，以下の定式化では，表記が煩雑になることを避けるため，各物理量のパラメータ ϵ への依存性は明示しないこととする．

物体力を含まない微小変形境界値問題

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{u}} \quad \text{on } \Gamma_u, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{N} = \underline{\boldsymbol{t}} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \tag{2}$$

を考える．ここに，$\boldsymbol{\sigma}$ は応力，$\underline{\boldsymbol{u}}, \underline{\boldsymbol{t}}$ は領域 Ω の境界 Γ_u, Γ_σ で与えられる幾何学的，および力学的境界条件，$\boldsymbol{N}$ は外向き単位法線ベクトルである．また，∇ は下付きの変数による勾配を取る演算子であり，$\boldsymbol{x}$ は座標を表す．

本研究では，物体を構成する材料が弾性体もしくは弾塑性体と仮定する．弾性体および弾塑性体の弾性部分については等方線形弾性と考え，その構成関係を

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{e}} \tag{3}$$

と表す．ここに，$\boldsymbol{C}$ は等方弾性構成テンソル，$\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{e}}$ はひずみの弾性成分であり，全ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}$，塑性ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}}$，ミスフィットひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^{*}$ を用いて

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\epsilon}^{*} \tag{4}$$

と定義される．弾塑性体の塑性は，標準的な古典的 J_2 等方線形硬化塑性とする．

均質化法の通常の手続きに従って，微視構造を観察するための微視スケール $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\epsilon$ を導入すれば，領域 Ω は $\boldsymbol{x}$ の属する Ω^0 と $\boldsymbol{y}$ の属する ϵY の 2 つの空間の直積として $\Omega = \Omega^0 \times \epsilon Y$ と表すことができる．これにより，変位，応力といった場の変数は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の 2 変数の関数とみなすことになる．また，単位周期構造 ϵY をその大きさ ϵ により正規化した領域 Y を代表体積要素とよぶ．

2.2 2 変数収束論による定式化

本節では，変分原理および 2 変数収束論に基づく定式化を行うが，それぞれの理論から得られる帰結のみを示すこととする．

仮想変位を $\boldsymbol{\eta}^0(\boldsymbol{x}) + \epsilon\boldsymbol{\eta}^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}/\epsilon)$ として，仮想仕事の原理により，釣合式 (1) を弱形式に変換すると

$$\begin{aligned} 0 = &\int_\Omega (\nabla_x \boldsymbol{\eta}^0 + \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1 + \epsilon \nabla_x \boldsymbol{\eta}^1) : \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}v \\ &- \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\boldsymbol{t}} \cdot (\boldsymbol{\eta}^0 + \epsilon \boldsymbol{\eta}^1) \, \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5}$$

を得る．ここで，$\epsilon \to 0$ を考え 2 変数収束論を適用すると，式 (5) の 2 変数極限から，微視・巨視両スケールでの弱形式の釣合式

$$g(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\eta}^1) := \left\langle \boldsymbol{\sigma}^0 : \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1 \right\rangle = 0 \tag{6}$$

$$G(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\eta}^0) := \int_\Omega \nabla_x \boldsymbol{\eta}^0 : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \, \mathrm{d}v - \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 \, \mathrm{d}s = 0 \tag{7}$$

を得る．ここに，$\tilde{\bullet} = \langle \bullet \rangle$ は

$$\tilde{\bullet} = \langle \bullet \rangle := \frac{1}{|Y|} \int_Y \bullet \, \mathrm{d}Y \tag{8}$$

で定義される代表体積要素 Y における体積平均である．また，$\boldsymbol{\sigma}^0$ は全応力，$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ は平均応力であり，それぞれ

$$\boldsymbol{\sigma}^0 := \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{e}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} := \left\langle \boldsymbol{\sigma}^0 \right\rangle \tag{9}$$

により定義した．ここに，$\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{e}}$ は全ひずみの弾性成分であり，全ひずみ

$$\boldsymbol{\epsilon}^0 := \nabla_x^{\mathrm{s}} \boldsymbol{u}^0 + \nabla_y^{\mathrm{s}} \boldsymbol{u}^1 \tag{10}$$

により

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{e}} := \boldsymbol{\epsilon}^0 - \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\epsilon}^{*} \tag{11}$$

と定義される．ここに，∇^s は勾配の対称成分を取る演算子，$\boldsymbol{u}^0$ は巨視スケール変位，$\boldsymbol{u}^1$ は Y- 周期性を持つ微視スケール変位である．また，このとき，代表体積要素内の剛体回転を除く全変形に起因する実変位 $\boldsymbol{w}$ は，式 (10) より一様変形に起因する成分と周期成分 $\boldsymbol{u}^1$ の和として

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\epsilon}^0(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{12}$$

により与えられる[7]．

3. 線形化と解析アルゴリズム

微視，巨視スケール釣合式 (6), (7) のような非線形方程式を解く場合，何らかの線形化を行う必要がある．微視スケール問題の線形化を考えれば

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\sigma}^0,\boldsymbol{\eta}^1,\Delta\boldsymbol{u}^1) &:= \\ g(\boldsymbol{\sigma}^0,\boldsymbol{\eta}^1) &+ \mathrm{D}g(\boldsymbol{\sigma}^0,\boldsymbol{\eta}^1)\cdot\Delta\boldsymbol{u}^1 = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

となる．ここに，$\mathrm{D}\bullet\cdot\Delta\phi$ は $\bullet$ の ϕ に関する方向微分を表し，$\mathrm{D}g\cdot\Delta\boldsymbol{u}^1$ の具体形は

$$\mathrm{D}g(\boldsymbol{\sigma}^0,\boldsymbol{\eta}^1)\cdot\Delta\boldsymbol{u}^1 = \left\langle \nabla_y\boldsymbol{\eta}^1 : \mathcal{A} : \nabla_y\Delta\boldsymbol{u}^1 \right\rangle \tag{14}$$

である．ここに，$\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A} := \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^0}{\partial\nabla_y(\Delta\boldsymbol{u}^1)} \tag{15}$$

により定義される材料の整合接線係数テンソルである[9]．同様に，巨視スケール問題における線形化釣合式は

$$\begin{aligned} G(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{\eta}^0,\Delta\boldsymbol{u}^0) &:= \\ G(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{\eta}^0) &+ \mathrm{D}G(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{\eta}^0)\cdot\Delta\boldsymbol{u}^0 = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

となる．ここで，$\mathrm{D}G\cdot\Delta\boldsymbol{u}^0$ は

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}G(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{\eta}^0)\cdot\Delta\boldsymbol{u}^0 \\ &= \int_\Omega \nabla_x\boldsymbol{\eta}^0 : \left\langle\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^0}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^0}\right\rangle : \left(\mathrm{D}\boldsymbol{\epsilon}^0\cdot\Delta\boldsymbol{u}^0\right)\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{17}$$

であるが，$\boldsymbol{u}^1$ を $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} := \nabla^s_x\boldsymbol{u}^0$ の関数と考えると $\mathrm{D}\boldsymbol{\epsilon}^0\cdot\Delta\boldsymbol{u}^0$ は

$$\mathrm{D}\boldsymbol{\epsilon}^0\cdot\Delta\boldsymbol{u}^0 = \left\{\boldsymbol{I} + \nabla_y\frac{\partial\boldsymbol{u}^1}{\partial\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}\right\} : \Delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{18}$$

となる．ここに，$\boldsymbol{I}$ は4階の単位テンソル，$\Delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ は $\Delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} := \nabla^s_x(\Delta\boldsymbol{u}^0)$ と定義した．微視変位 $\boldsymbol{u}^1$ の平均ひずみ $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ に関する勾配として，特性変位関数 $\boldsymbol{\chi}$ を

$$\boldsymbol{\chi} := -\frac{\partial\boldsymbol{u}^1}{\partial\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \tag{19}$$

により定義する．すると，式 (18) は

$$\mathrm{D}\boldsymbol{\epsilon}^0\cdot\Delta\boldsymbol{u}^0 = \left(\boldsymbol{I} - \nabla_y\boldsymbol{\chi}\right) : \Delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{20}$$

となり，さらに式 (17) は

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}G(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{\eta}^0)\cdot\Delta\boldsymbol{u}^0 \\ &= \int_\Omega \nabla_x\boldsymbol{\eta}^0 : \mathcal{A}^{\mathrm{H}} : \nabla_x(\Delta\boldsymbol{u}^0)\,\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{21}$$

と表される．ここに，$\mathcal{A}^{\mathrm{H}}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\mathrm{H}} &:= \left\langle\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^0}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^0} : \left(\boldsymbol{I} - \nabla_y\boldsymbol{\chi}\right)\right\rangle \\ &= \left\langle\mathcal{A} : \left(\boldsymbol{I} - \nabla_y\boldsymbol{\chi}\right)\right\rangle \end{aligned} \tag{22}$$

により定義される均質化接線係数テンソルである．

微視変位 $\boldsymbol{u}^1$ は，前述の定式化において平均ひずみ $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ の陽な関数としては表れないが，式 (6) で規定される微視スケール問題 $g(\boldsymbol{\sigma}^0(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}},\boldsymbol{u}^1),\boldsymbol{\eta}^1) = 0$ は与えられた平均ひずみに対する微視応答を求めるための関係である．実際に，線形化微視スケール問題 (13) は式 (14), (18) を用いて

$$\left\langle\nabla_y\boldsymbol{\eta}^1 : \mathcal{A} : \left(\boldsymbol{I} - \nabla_y\boldsymbol{\chi}\right)\right\rangle = 0 \tag{23}$$

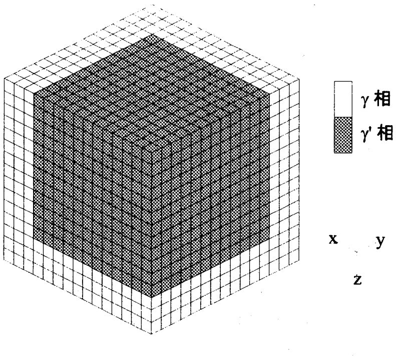
と表せ，上式より特性変位関数を求めることができる．

次に，次節で行う応力制御微視スケール解析のアルゴリズムを以下に解説する．

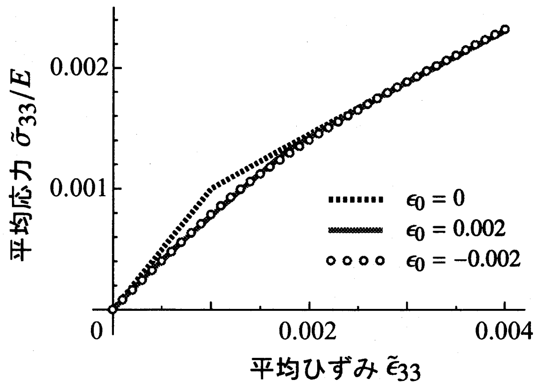
1. 荷重ステップを更新し，平均応力増分を不釣合平均応力とする．
2. 線形微視構造解析 (tangential homogenization)：線形化微視問題 (23) により，特性関数 $\boldsymbol{\chi}$ を求め，均質化接線係数 $\mathcal{A}^{\mathrm{H}}$ を求める．
3. 得られた $\mathcal{A}^{\mathrm{H}}$ を用いて，不釣合平均応力を解消するための平均ひずみ増分 $\Delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ を増分巨視スケール構成式 $\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{A}^{\mathrm{H}} : \Delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ から求める．
4. 非線形微視構造解析：求めた $\Delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ から，$\nabla_x(\Delta\boldsymbol{u}^0) := \Delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ を増分変形として，非線形微視問題 (6) を解く．まず，増分変形を周期境界上の節点に相対変位として与える．
   - (a) 線形化微視釣合式 (13) により，不釣合力に対応する微視変位増分 $\Delta\boldsymbol{u}^1$ を求め，微視変位 $\boldsymbol{u}^1$ を更新する．
   - (b) 更新された微視変位 $\boldsymbol{u}^1$ により，微視問題での不釣合力を求める．このとき，収束判定を満たさなければ，(a) に戻り，収束判定を満たすまで繰り返し計算を行う．
   - (c) 収束判定を満たした後の自己釣合状態において，平均応力を求める．
5. 与えた平均応力と得られた平均応力の差を不釣合平均応力とし，これが十分に小さいという収束判定を満たさなければ，2 に戻り，収束判定を満たすまで繰り返し計算を行う．
6. 収束判定を満たした場合，荷重ステップが所定の荷重となるまで，1 に戻り繰り返し計算を行う．

4. ニッケル超合金の数値材料試験

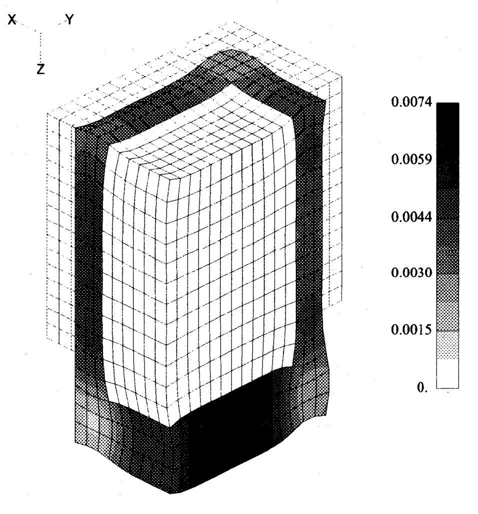
本節では2種類のニッケル超合金の微視構造に対して，応力成分を $\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\sigma}_{22} = \tilde{\sigma}_{12} = \tilde{\sigma}_{23} = \tilde{\sigma}_{31} = 0$ と制御し，$\tilde{\epsilon}_{33}$ を漸増させ，非線形微視スケール解析による1軸引張の数値材料試験を行う．なお，微視スケール



図–3 ニッケル超合金の単位周期構造



図–4 基本モデルの平均応力 - ひずみ関係

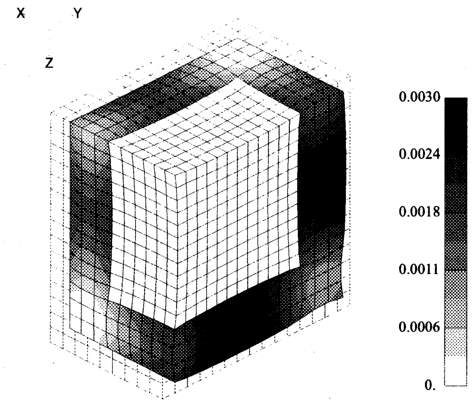


図–5 基本モデルの $\tilde{\epsilon}_{33} = 0.004$ のときの J_2 塑性ひずみ分布

解析においては，微視スケール変位と巨視スケールの一様変形に対応する微視変位を合計した実変位 $\boldsymbol{w}$ を自由度とした[10),11)].

4.1 基本モデル

図–3 に解析対象の微視構造を示す．微視構造は体積 1 の立方体であり， $15\times15\times15 = 3375$ の 8 節点 6 面体要素で等分割した．無色の領域は γ 相，グレーの領域は γ' 相である． γ' 相は 1 辺 0.8 の立方体であり，微視構造に



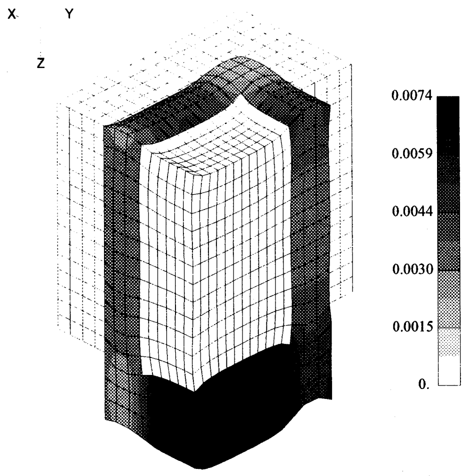
図–6 基本モデルの $\epsilon_0 = -0.002$ のときの J_2 塑性ひずみ分布

占める体積比率は 0.512 である． γ' 相は Young 率 E, Poisson 比 0.3 の等方弾性体， γ 相は古典的 J_2 塑性論にしたがう等方線形硬化弾塑性体とし，弾性特性は γ' 相と同じ，硬化係数は $0.001E$，初期降伏応力は $0.001E$ とした．

この基本モデルに対して得られた平均応力 - ひずみ関係を図–4 に破線で示す．凡例の ϵ_0 は後述するミスフィットひずみの大きさであり， $\epsilon_0 = 0$ はミスフィットひずみを考慮していないことを意味する． γ 相と γ' 相の弾性特性は同じなので，降伏するまでは均一に変形し，平均ひずみ $\tilde{\epsilon}_{33} = 0.001$ のときにすべての γ 相において同時に降伏する． γ' 相は降伏しないので， γ 相が降伏しても，平均応力 - ひずみ関係の勾配は γ 相の硬化係数よりも大きい．降伏後の平均応力 - ひずみ関係の勾配は線形であるが， γ 相における塑性変形の進展の速度は一様ではない．図–5 に平均ひずみ $\tilde{\epsilon}_{33} = 0.004$ のときの γ' 相の中央断面で切断した微視構造の変形図と塑性ひずみの第二不変量 (以下 J_2 塑性ひずみと呼ぶ) 分布を示す．ただし，変形を描くときの変位は実際の変位の 100 倍であり，これ以降示す変形図はすべて同じ倍率を用いる．この図からわかるように，水平チャネルの塑性変形は，垂直チャネルの塑性変形に比べ， 1.7 倍程度と大きくなっている．また，どちらのチャネルの塑性変形も，与えたひずみ増分に対してほぼ線形で増加した．

4.2 基本モデルにミスフィットひずみがある場合

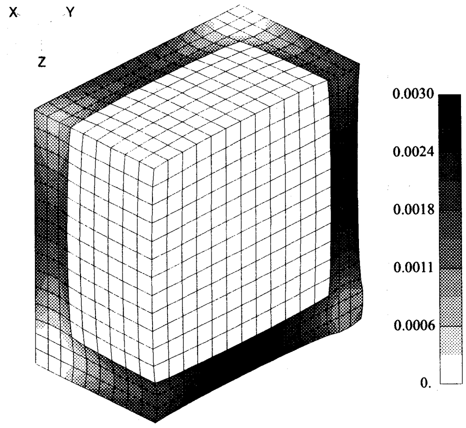
γ 相と γ' 相の格子定数の違いによるミスフィットひずみが存在する状態を模擬するために， γ 相および γ' 相が立方晶であることから， γ' 相に $\epsilon^*_{ij} = \epsilon_0\delta_{ij}$ で定義される初期ひずみを導入した．具体的には前節に示した応力制御の微視スケール解析において，すべての平均応力成分がゼロとなるよう制御しつつ， ϵ_0 を漸増させ所定の初期ひずみが導入されるまで解析を行った．図–6 に $\epsilon_0 = -0.002$ のときの微視構造の変形と J_2 塑性ひずみ分布を示す．導入した初期ひずみは γ 相の降伏ひずみと同じオーダーであり，各チャネルの中心付近に塑性変形



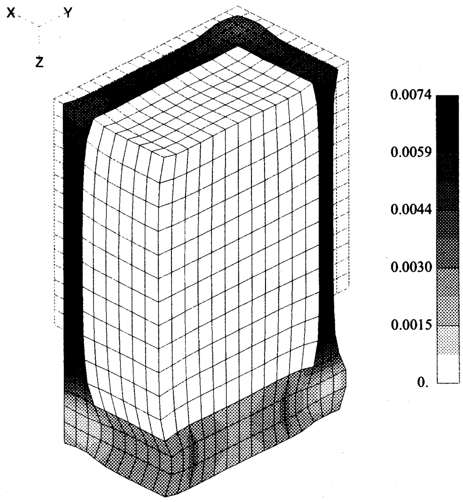
図–7 負のミスフィットひずみを有する基本モデルの $\tilde{\epsilon}_{33}$ = 0.004 のときの J_2 塑性ひずみ分布

が見られる．塑性変形は，チャネルの法線方向に対して引張方向に生じている．また，このときの平均塑性ひずみは $\tilde{\epsilon}^{p}_{11}$ = $\tilde{\epsilon}^{p}_{22}$ = $\tilde{\epsilon}^{p}_{33}$ = −0.00102 である．この状態を初期状態として，z 方向に引張変形を与えたときの平均応力 - ひずみ関係を図–4 に○で示した．ただし，横軸の平均ひずみは初期ひずみによる平均ひずみは含めていない．初期ひずみによりすでに塑性変形が生じているため，初期ひずみがない場合と異なり明確な降伏点は認められない．ひずみが小さいときは，初期ひずみの影響はほとんどなく，初期ひずみがない場合の降伏点 $\tilde{\sigma}_{33}/E$ = 0.001 付近では，平均応力は初期ひずみがない場合に比べて小さくなっているが，ひずみの増加に伴って，初期ひずみがない場合の平均応力 - ひずみ関係に漸近している．図–7 に平均ひずみ $\tilde{\epsilon}_{33}$ = 0.004 のときの γ' 相の中央断面で切断した微視構造の変形図と J_2 塑性ひずみ分布を示す．初期ひずみがない場合に比べて，全体的に J_2 塑性ひずみが大きいが，水平チャネルの塑性変形が垂直チャネルの塑性変形よりも大きいという点は初期ひずみがない場合と同じである．ただし，垂直チャネルにおいては，初期ひずみで z 方向に収縮し，チャネルの法線方向に伸張するのに対して，z 方向の一軸引張により z 方向に伸張し，チャネルの法線方向に収縮するために，載荷の初期段階では除荷が起き，垂直チャネルではほとんど塑性変形が進展しない．この点は，初期ひずみがない場合と異なっている．

次に，初期ひずみが正の場合を解析した．図–8 に ϵ_0 = 0.002 のときの微視構造の変形と J_2 塑性ひずみ分布を示す．このときの平均塑性ひずみは $\tilde{\epsilon}^{p}_{11}$ = $\tilde{\epsilon}^{p}_{22}$ = $\tilde{\epsilon}^{p}_{33}$ = 0.00102 である．塑性変形は，初期ひずみが負のときと逆に，チャネルの法線方向に対して圧縮方向に生じている．この状態を初期状態として，z 方向に引張変形を与えたときの平均応力 - ひずみ関係を図–4 に実線で示した．平均応力 - ひずみ関係は負の初期ひずみの場合とほぼ同じであり，明確な降伏点も認められない．図–9 に平均ひずみ $\tilde{\epsilon}_{33}$ = 0.004 のときの変形と J_2 塑性ひずみ分布を示す．これを見ると，初期ひずみがない場合や初期ひずみが負の場合と異なり，塑性変形は垂直チャネルにおいて卓越していることがわかる．全体的な J_2 塑性ひずみの大きさは，初期ひずみがない場合とほぼ等しい．垂直チャネルの塑性変形は，載荷ひずみとほぼ比例して増加しているのに対して，水平チャネルにおいては，初期ひずみで z 方向に収縮しているので，z 方向の一軸引張により z 方向に伸張し，載荷の初期段階では除荷が起き，垂直チャネルではほとんど塑性変形が進展しない．



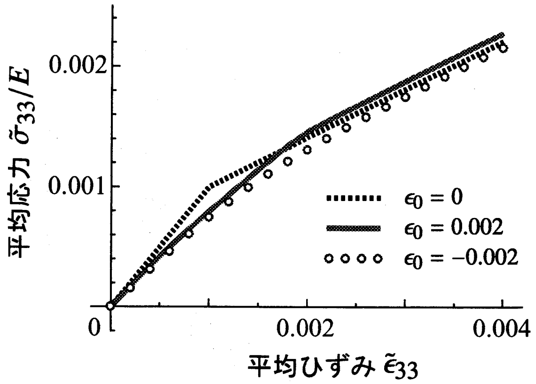
図–8 基本モデルの ϵ_0 = 0.002 のときの J_2 塑性ひずみ分布



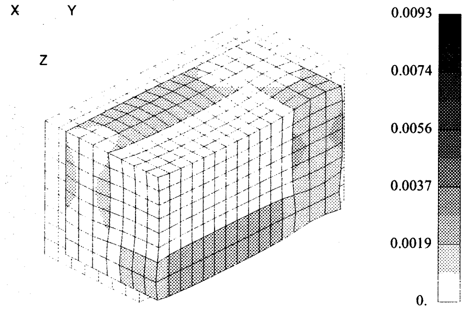
図–9 正のミスフィットひずみを有する基本モデルの $\tilde{\epsilon}_{33}$ = 0.004 のときの J_2 塑性ひずみ分布

4.3 γ' 相の形状が異なる場合

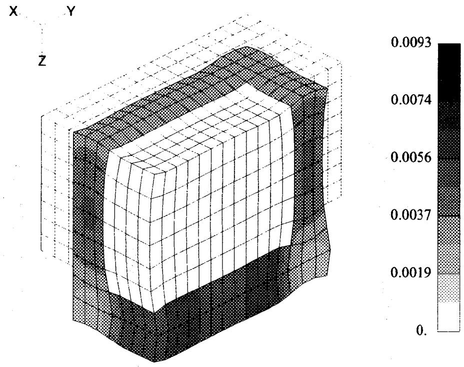
代表体積要素を 1 × 1 × 0.5333 とし，γ' 相を 0.8 × 0.8 × 0.4 とした．γ' 相の代表体積要素に占める体積比は 0.48 である．γ' 相の形状に関して，載荷方向に直角な方向の寸法に対する載荷方向の寸法の比をアスペクト



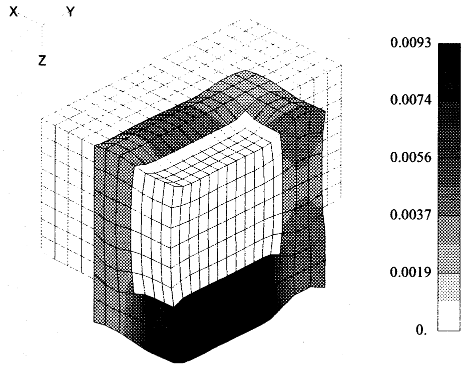
図–10 アスペクト比 1/2 モデルの平均応力 - ひずみ関係



図–12 アスペクト比 1/2 モデルの $\epsilon_0 = -0.002$ のときの J_2 塑性ひずみ分布



図–11 アスペクト比 1/2 モデルの $\tilde{\epsilon}_{33} = 0.004$ のときの J_2 塑性ひずみ分布



図–13 負のミスフィットひずみを有するアスペクト比 1/2 モデルの $\tilde{\epsilon}_{33} = 0.004$ のときの J_2 塑性ひずみ分布

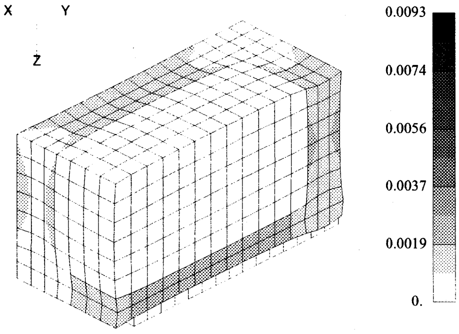
比と定義すると，アスペクト比は 1/2 となっている．このモデルをアスペクト比 1/2 モデルと呼ぶこととする．用いた要素の寸法は前項の基本モデルのときと同じである．

このモデルに，前項と同じ大きさのミスフィットひずみを導入し，一軸引張を行ったときの平均応力 - ひずみ関係を図–10 に示す．図中，破線はミスフィットひずみがない場合，○はミスフィットひずみが –0.002 の場合，実線はミスフィットひずみが 0.002 の場合の結果をそれぞれ表す．ミスフィットひずみがない場合と負の場合の平均応力の関係は，γ' 相が立方体のときと同様となっている．しかし，ミスフィットひずみが正の場合の平均応力は，γ' 相が立方体のときと異なり，平均ひずみが $\tilde{\epsilon}_{33} = 0.0017$ 付近から，ミスフィットひずみがない場合の平均応力よりも大きくなっている．その差は，平均ひずみが $\tilde{\epsilon}_{33} = 0.004$ のときに 3% となっている．

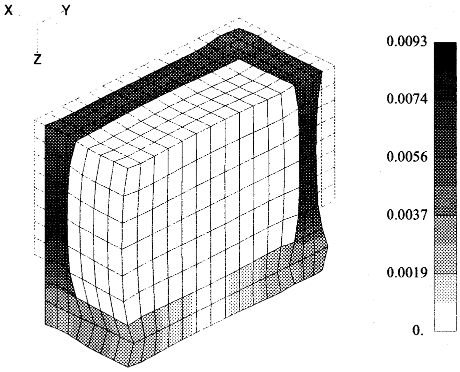
ミスフィットひずみがない場合，アスペクト比 1/2 モデルの平均応力 - ひずみ関係は，基本モデルの平均応力 - ひずみ関係とほぼ同じであるが，γ' 相の体積比率が若干小さいために，γ 相降伏後の勾配が若干小さくなっている．ミスフィットひずみがゼロの場合の $\tilde{\epsilon}_{33} = 0.004$ のときの J_2 塑性ひずみ分布を図–11 に示す．アスペクト比が 1 の基本モデル同様，水平チャネルの塑性変形が垂直チャネルの塑性変形よりも大きいが，その差は 25% 程度と基本モデルの 70% よりも小さくなっている．

図–12 に $\epsilon_0 = -0.002$ のときの J_2 塑性ひずみ分布を示す．このときの平均塑性ひずみは $\tilde{\epsilon}^{p}_{11} = \tilde{\epsilon}^{p}_{22} = -0.00104$, $\tilde{\epsilon}^{p}_{33} = -0.00080$ である．アスペクト比が 1 の基本モデルと異なり，水平チャネルの J_2 塑性ひずみが垂直チャネルの J_2 塑性ひずみよりも若干大きくなっている．この状態を初期状態として z 方向一軸引張を行い，$\tilde{\epsilon}_{33} = 0.004$ となったときの変形と J_2 塑性ひずみ分布を図–13 に示す．γ 相内の塑性ひずみ分布は，γ' 相が立方体のときと定性的には一致している．また，一軸引張載荷によって，水平チャネルの塑性変形がほぼ線形で増加するのに対し，垂直チャネルの塑性変形はひずみが小さいうちはほとんど増加せず，この点も基本モデルと定性的には一致している．一方で，塑性ひずみの大きさは，基本モデルと比較して総じてやや大きくなっている．

ミスフィットひずみが正の場合のミスフィット導入時の J_2 塑性ひずみ分布を図–14 に示す．ミスフィットひずみが負の場合と同様，水平チャネルで塑性変形がやや大きくなっているが，垂直チャネルの塑性変形は非常に小さい．この状態を初期状態として z 方向一軸引張を行い，$\tilde{\epsilon}_{33} = 0.004$ となったときの変形と J_2 塑性ひずみ分



図–14 アスペクト比 1/2 モデルの $\epsilon_0 = 0.002$ のときの J_2 塑性ひずみ分布



図–15 正のミスフィットひずみを有するアスペクト比 1/2 モデルの $\bar{\epsilon}_{33} = 0.004$ のときの J_2 塑性ひずみ分布

布を**図–15**に示す．このときの平均塑性ひずみは $\bar{\epsilon}^p_{11} = \bar{\epsilon}^p_{22} = 0.00104, \bar{\epsilon}^p_{33} = 0.00080$ である．この場合も，γ 相内の塑性ひずみ分布は，アスペクト比が 1 の基本モデルと同様の傾向がある．載荷に伴う塑性変形の増加傾向を見てみると，はじめに小さかった垂直チャネルの J_2 塑性ひずみは，載荷にほぼ比例して大きくなった．また，はじめに大きかった水平チャネルの J_2 塑性ひずみは，一旦低下してから再度大きくなった．この理由は，基本モデルと同じで，ミスフィットひずみによって各チャネルに生じた塑性変形と，一軸引張によって生じる塑性変形の違いによる．結果として，水平チャネルにおける J_2 塑性ひずみが小さくなっており，これが大きな平均応力を発生させる原因であると思われる．換言すれば，

- ミスフィットひずみが正の場合は，水平チャネルが一旦除荷し，
- 水平チャネルの塑性変形の進展が遅れ，
- アスペクト比を小さくすることによって，塑性変形の小さな水平チャネルの大きさが代表体積要素全体において相対的に大きくなる

ことから，大きな平均応力を発生すると結論付けられる．

5. おわりに

ニッケル超合金の微視構造設計へ資するために，ニッケル超合金の微視構造を模したモデルを用いて，均質化法による弾塑性解析を行った．これにより，2 相間のミスフィットひずみの違いによる微視構造内の塑性変形の進展の違い，それらと巨視的な応力 - ひずみ関係との関係が明らかになった．本論文で得られた知見をまとめると，以下のようになる．

1. ミスフィットひずみがない場合，降伏は水平，垂直の両チャネルで起こるが，主に水平チャネルにおいて塑性変形が進展する．
2. ミスフィットひずみが負の場合は，主に水平チャネルにおいて塑性変形が進展する．
3. ミスフィットひずみが正の場合は，主に垂直チャネルにおいて塑性変形が進展する．
4. γ' 相の形状が立方体の場合は，ミスフィットひずみの正負は平均応力 - ひずみ関係にほとんど影響しない．
5. γ' 相のアスペクト比が 1 より小さく，ミスフィットひずみが正の場合，ミスフィットひずみがない場合よりもみかけ上の硬化が大きくなる．

以上の知見には，一部，実験や理論力学によりすでに観察されていたことも含まれるが，本研究で行った均質化法に基づく数値材料試験によれば，これまで不十分であった微視構造内の塑性変形の仕組と巨視的な材料特性の定量的な評価を行い，上記 5. のように材料特性の改善のための指針を提供することが可能になる．

参考文献

1) http://www.tms.org/Meetings/Specialty/Superalloys2000/SuperalloysHistory.html
2) Schneider, W., Hammer, J. and Mugrabi, H.: *Superalloy 1992*, ed. Antolovitch et al., TMS, p.589, 1992.
3) Ichitsubo, T., Koumoto, D., Hirao, M., Tanaka, K., Osawa, M., Yokokawa, T. and Harada, H.: Elastic anisotropy of rafted Ni-base superalloy at high temperatures, *Acta Materialia*, Vol.51, pp.4863–4869, 2003.
4) Ichitsubo, T. and Tanaka, K: Interpretation in elastic regime for rafting of Ni-base superalloy based on the external-stress-free dimensional change due to internal-stress equilibration, *Acta Materialia*, Vol.53, pp.4497–4504, 2005.
5) Ratel, N., Bastie, P., Mori, T. and Withers, P.J.: Deformation mode in the analysis of rafting induced by plastic deformation in the matrix in single crystal nickel superalloys: Channel vs uniform deformation, (submitted).
6) Allaire, G.: Mathematical approaches and methods, in: Hornung, U. ed., *Homogenization and Porous Media*, Springer, New York, pp.225–250, 1996.
7) Terada, K. and Kikuchi, N.: A class of general algorithms for multi-scale analysis of heterogeneous media, *Comput.*

Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol.190, pp.5427–5464, 2001.

8) Terada, K., Saiki, I., Matsui, K. and Yamakawa, Y.: Two-scale kinematics and linearization for simultaneous two-scale analysis of periodic heterogeneous solids at finite strain, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.192, pp.3531–3563, 2003.
9) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R.: *Computational Inelasticity*, Springer, 1998.
10) 斉木 功, 大植 健, 中島章典, 寺田賢二郎：構造要素を用いたミクロモデルによるマルチスケールモデリングとそのセル構造体への適用, 日本計算工学会論文集, No.20020004, 2002.
11) Saiki, I., Ooue, K., Terada, K. and Nakajima, A.: Multiscale modeling for planar lattice microstructures with structural elements, *Int. J. Multi. Comp. Eng.*, Vol.4, pp.429-443, 2006.

(2008 年 4 月 14 日 受付)