応用力学論文集 Vol.11, pp.361-368　(2008 年 8 月)　土木学会

不安定トラス構造のつりあい形状の探索に関する基礎的研究

A Study on the Equilibrium Configuration of the Unstable Truss Structure

田村 武*・西林 加織**
Takeshi TAMURA and Kaori NISHIBAYASHI

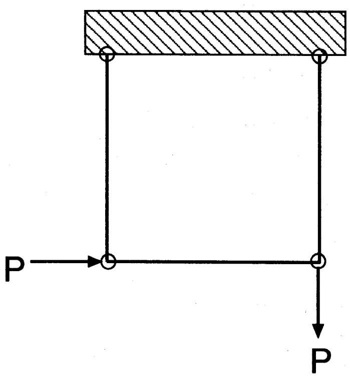
*フェロー、工博、京都大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻（〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C-1）
**京都大学工学研究科社会基盤工学専攻 学生（〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C-1）

No matter what external force is exerted to a stable truss structure, it can be stabilized without causing large displacements. This is the reason why it is called a stable structure. In the case of an unstable truss structure, however, it is not certain to support such forces in the initial configuration. It would probably change its configuration far from its initial state. The purpose of this study is to establish a simple numerical method to seek such an equilibrium state of the unstable structure which is subject to arbitrary given forces. It will be also shown that each of member forces can be easily derived at the same time if the equilibrium state is obtained.

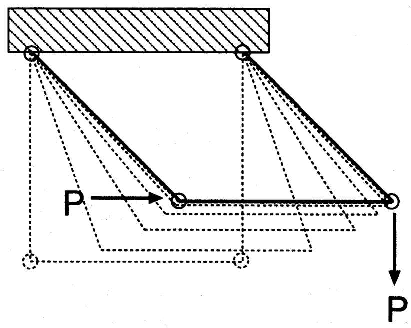
Key Words : *unstable truss structure, unstable mode, equilibrium configuration, rank*

1. はじめに

一般の構造解析において扱われるトラス構造は，いわゆる「静定トラス」あるいは「不静定トラス」であり、主たる関心は各部材の部材力および節点変位である。これらについては、変形法を用いれば容易に計算することができる。たとえ有限変形を考慮する場合でも、有効な非線形解析手法が提案されている。これらのトラスは「安定トラス」であって、任意の荷重が作用しても、初期の形状を大きく変化することなくつりあい位置が定まる。実際、微小変形理論では初期位置とつりあい位置は一致するものとして計算される。一方、「不安定トラス」とよばれるトラス構造も存在する。図–1(a) はその簡単な例である。不安定トラスの最大の特徴は、外力が作用したとき初期の形状を保ったままつりあい条件を満足するかどうかが不明であることである。むしろ初期の形状から大きく形を変えた状態



図–1(a) initial state



図–1(b) final state

でつりあうのが一般である。この図–1(a) のようなトラスに外力 P が 2 点で準静的に作用すれば、図–1(b) のようにトラスの節点と部材は実線で描かれた最終的なつりあい形状まで破線のような経路をたどりながら動く。つまり、初期の形状では外力を支えることができず、不安定な状態になり節点と部材は移動を始める。やがてある形状においてつりあい式を満足することになり、そこで節点や部材の移動は停止する。むろん、このつりあい位置は未知である。

本研究の目的は、このような任意 の外力下での不安定トラスのつりあい形状を探索する基礎的な方法論を確立することである。本手法によりつりあい形状が求められれば、同時に各部材の部材力も容易に求められることも示す。不安定トラスのつりあい形状に関しては、建築構造の分野で半谷ら[1),2)]の先駆的な研究がある。そこでは、一般逆行列の概念を用いて議論しているが、理論構成がやや複雑に見える。また、部材力の計算方法に関する説明もされていない。本論文では線形代数学のより基礎的な手法を用いて不安定トラスの

つりあい形状の探索方法を提案するとともに、仮想変位の原理を用いた部材力の決定方法[3]を述べる。また、それらを応用して種々の興味ある計算例を取り挙げる。

2. 不安定トラスのつりあい形状の探索

2.1 問題の設定

トラスの部材力を $S_1, S_2, \cdots, S_m$ とする。m は全部材数である。これらをまとめて部材力ベクトル$\boldsymbol{S}$とする。同様に、各部材の伸び $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$ からなる「伸びベクトル」を$\boldsymbol{\delta}$とする。一方、微小な節点変位成分をすべて集めた「節点変位ベクトル」を$\boldsymbol{u}$と記す。その次元は変位の全自由度 n に等しい。節点変位ベクトル$\boldsymbol{u}$に対応する荷重ベクトルを$\boldsymbol{F}$とする。これらを定義すると

$$\boldsymbol{\delta} = B\boldsymbol{u} \tag{1}$$

となる。ここで B はいわゆる B マトリックスで、微小な節点変位から部材の伸びを求めるときに用いる行列である。不安定トラスでは部材数 m よりも節点変位の自由度 n の方が大きいので、一般に B マトリックスはよこ長行列である。同時につりあい式は

$$B^T\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F} \tag{2}$$

と書ける。不安定トラスの場合、任意の外力$\boldsymbol{F}$に対して、この連立方程式 (2) に解$\boldsymbol{S}$が常に存在するとは限らない。すなわち、係数行列 B^T はたて長行列であり、未知数の数よりも方程式の本数が多く、「方程式過剰」となるからである。このような方程式に解$\boldsymbol{S}$が存在するためには、係数行列 B^T と外力$\boldsymbol{F}$ の間に何らかの条件が必要となる。具体的に数学的な表記法を用いれば、式 (2) に解が存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}B^T = \mathrm{rank}[B^T, \boldsymbol{F}] \tag{3}$$

となる。しかし、不安定トラスの場合には

$$\mathrm{rank}B^T \neq \mathrm{rank}[B^T, \boldsymbol{F}] \tag{4}$$

となるのが一般である。ここで $[B^T, \boldsymbol{F}]$ は行列 B^T の右端の列に荷重ベクトル$\boldsymbol{F}$を並べて拡張した行列を意味する。したがって、つりあい式 (2) が満たされない場合、不つりあい力が残るため外力$\boldsymbol{F}$によってトラスは形状を変える。トラスの各可動節点の座標を水平方向に $x_1, \cdots, x_k$、鉛直方向に $y_1, \cdots, y_{n-k}$ とし、これらをまとめて$\boldsymbol{x}$とすることにより、トラスの形状を表すことにする。したがって B マトリックスの各成分は$\boldsymbol{x}$の関数である。特に初期形状における座標を$\boldsymbol{x_0}$とすると初期形状での B マトリックスは $B(\boldsymbol{x_0})$ と書ける。安定トラスでは

$$B^T(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F} \tag{5}$$

が解をもつが、不安定トラスでは解をもたない。そこで形状が徐々に変化し、つりあい位置における座標を$\boldsymbol{x}$とすると $B^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{S}=\boldsymbol{F}$にやっと解が存在することになる。しかし、つりあい条件を満足する形状$\boldsymbol{x}$は未知であり、なんらかの方法で$\boldsymbol{x}$を探索しなければならない。これが「不安定トラスのつりあい形状の探索」である。不安定トラスでは個々の部材が剛体であると仮定しても、つりあい条件を満足しない場合には大きな節点変位が生じて全体は大きく変形する。たとえ部材力による節点変位を加味してもその大きさは無視できる程度に小さい。したがってここで考える部材は完全な剛体と仮定しておく。

2.2 定式化

両端の座標が $(x_{l_i}, y_{l_i}), (x_{r_i}, y_{r_i})$ であるようなトラスの部材 i の長さ l_i は

$$l_i = \sqrt{(x_{r_i} - x_{l_i})^2 + (y_{r_i} - y_{l_i})^2} \tag{6}$$

で計算される。もっと一般的に、l_i はトラスの全可動節点の座標ベクトル$\boldsymbol{x}$を用いて

$$l_i = l_i(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

と書ける。したがって、トラスの全部材の長さを集めたベクトルは$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})$ と表される。特に、初期状態における全部材の長さ$\boldsymbol{l_0}$は、初期の全節点座標$\boldsymbol{x_0}$により

$$\boldsymbol{l_0} = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x_0}) \tag{8}$$

となる。ここで天下り的に

$$\boldsymbol{F^T x} \ \rightarrow \max \tag{9}$$

$$\text{sub.to} \quad \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l_0} \tag{10}$$

となる制約条件付きの最大化問題を考える。つまり、剛体部材からなる不安定トラスがあったとき、それに作用する外力ベクトル$\boldsymbol{F}$がなす仕事$\boldsymbol{F^T x}$が最大になるように節点座標$\boldsymbol{x}$を求める問題である。より正確には初期の位置からの仕事は$\boldsymbol{F^T}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})$とすべきであるが、$\boldsymbol{F^T x_0}$は定数なので $\boldsymbol{F^T x}$としても問題は等価である。ただし、ここでいう不安定トラスには適切な固定端があって、構造全体が無限遠に飛び去るようなことはないとする。そうする場合、この問題がどのような力学的意味をもつかは別にして、数学的には意味のある問題となっている。なぜなら、このようなトラスの節点がとり得る座標は n 次元空間における有界な閉部分集合であり、そこにおいて連続な線形関数$\boldsymbol{F^T x}$は必ず最大値をとる。つまり、解は常に存在する。ただし、制約条件式 (10) を満足する$\boldsymbol{x}$ の集合は凸集合であるとは限らないので、解となる$\boldsymbol{x}$が唯一とは保証できない。つまり初期形状によっては異なる極値に達する可能性もある。

次にこの問題の極値条件を考える。もし全可動節点座標$\boldsymbol{x}$で$\boldsymbol{F^T x}$が極値をとったとする。むろん、制約条件式 (10) も満たされている。いま、解$\boldsymbol{x}$の付近でこの制約条件式 (10) を満たすような全可動節点座標$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$

を 1 つとる。これは

$$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})=\boldsymbol{l_0} \tag{11}$$

を満たす。この式を展開すると

$$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})+\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Delta x}=\boldsymbol{l_0} \tag{12}$$

となる。これと式 (10) と比較すれば

$$\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Delta x}=\boldsymbol{0} \tag{13}$$

となる。つまり、微小な節点座標の移動$\boldsymbol{\Delta x}$によって、部材の伸びは生じないことを表している。ここで微小な節点座標の移動$\boldsymbol{\Delta x}$というのは、前節で定義した微小な節点変位$\boldsymbol{u}$と同じものであり、また $\partial \boldsymbol{l}/\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x})$ は前節の B マトリックスと同一のものである。したがって式 (13) は

$$B(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{14}$$

と書いてもよいことになる。一方で、このような節点座標の微小増分$\boldsymbol{\Delta x}(=\boldsymbol{u})$ に対し目的関数である$\boldsymbol{F^T x}$ は変化してはならない。そうでなければ$+\boldsymbol{\Delta x}$、あるいは$-\boldsymbol{\Delta x}$の方向に変化させたとき、目的関数が増減するので、$\boldsymbol{x}$が解であることに反する。つまり、

$$\boldsymbol{F^T}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})=\boldsymbol{F^T x} \tag{15}$$

すなわち

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{F^T \Delta x}=\boldsymbol{0}\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{F^T u}=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{16}$$

でなければならない。線形代数学[4)]によれば、連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{17}$$

に解 $\boldsymbol{x}$ が存在するための必要十分条件は

$$A^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0} \tag{18}$$

なる任意の $\boldsymbol{y}$ に対し

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0} \tag{19}$$

となることである。この定理を上の問題に当てはめる。行列 A に B^T、ベクトル$\boldsymbol{y}$に$\boldsymbol{u}$、ベクトル$\boldsymbol{b}$に$\boldsymbol{F}$、ベクトル$\boldsymbol{x}$ に$\boldsymbol{S}$をそれぞれ対応させると、上記の問題で最大値が得られる節点座標$\boldsymbol{x}$において

$$B^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{S}=\boldsymbol{F} \tag{20}$$

に解$\boldsymbol{S}$が存在することを保証している。つまり、不安定トラスのつりあい点を探索することは上記の極値問題の解$\boldsymbol{x}$を探すことに他ならないことが分かる。外力$\boldsymbol{F}$が部材に作用する重力のみである場合には、目的関数である$\boldsymbol{F^T x}$は位置エネルギー (重力のポテンシャルエネルギー) に負号を付したものであり、つりあい形状の探索は「位置エネルギーを最小にする形状の探索」と言い替えることができることになる。

2.3 計算方法

(1) 不安定モード

不安定トラスがつりあっていないときの形状を$\boldsymbol{x}$とする。そのとき

$$B(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{21}$$

を満足する任意の解に対して常に

$$\boldsymbol{F^T u}=\boldsymbol{0} \tag{22}$$

とは限らない。つまり、つりあい式 (20) が満たされるとは限らない。式 (21) の非自明解$\boldsymbol{u}$は「不安定モード」と呼ばれるもので、全部材の長さを変えることのない微小変位を意味する。ここで

$$\mathrm{rank}B=r \tag{23}$$

とするとき、1 次方程式 (21) の 1 次独立な解、すなわち不安定モードは $s=n-r$ 個ある。それらを$\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, $\ldots$, $\boldsymbol{u_s}$とする。線形代数学における「行列の基本変形」[4)]を用いてこれらの不安定モードが計算されるがその方法について以下に述べる。まず、解くべき斉次連立方程式 (21) をあらためて

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \tag{24}$$

と書く。行列 B の前から m 次の正則行列を順次乗じながら、すなわち「行に関する基本変形」を繰り返しながら単純な行列に変形することができる。いま簡単のため $r=m$ とする。つまり、式 (24) の m 本の式は 1 次独立としておく。すると結果として行列 B は最終的に m 本の「単位ベクトル」を含むように変形される。すなわち

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2n}\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix} \tag{25}$$

となる。この係数行列のもとで方程式 (24) の 0 ではない解$\boldsymbol{u}$を求めれば、それが不安定モードとなる。ここで単位ベクトルになっていない係数ベクトルに相当する列は $n-m(=s)$ 本ある。その 1 つを取り上げ、未

知ベクトル$\boldsymbol{u}$のそれに対応する成分を1とおき、他の$n-m-1$個の成分を全て0とおく。そうすると単位ベクトルの対応する成分はすぐに求められ、ある不安定モード$\boldsymbol{u}$が得られる。この操作を順次、$n-m$本の単位ベクトルになっていない係数ベクトルに対する成分に当てはめながら求めていくと$n-m$個の不安定モードが得られる。要するに斉次連立方程式の基底解の求め方と同一である。

(2)　つりあい位置の探索

$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$を任意の数として

$$\boldsymbol{\Delta x} = \alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \alpha_2 \boldsymbol{u_2} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{u_s} = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \boldsymbol{u_k} \quad (26)$$

だけ節点座標を移動させることが可能である。つまり、すべての部材の長さを変えることなく、節点座標を変化させることができる。あるいは、外力$\boldsymbol{F}$によって節点座標が変化する場合、この式で表される範囲で移動する。したがって問題は各係数$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$の比率をどのように決定するかである。つりあい式(20)を満たす状態へ近付けるためには、外力が正の仕事をするように$\boldsymbol{\Delta x}$を選び、徐々に仕事をさせて連続関数である$\boldsymbol{F^T x}$を最大にすればよい。ではもっとも効率的に外力に仕事をさせるためにはどのような$\boldsymbol{\Delta x}$を選べばいいだろうか。 Schwarzの不等式を用いれば

$$|\boldsymbol{F^T \Delta x}|^2 \leq ||\boldsymbol{F}||^2 ||\boldsymbol{\Delta x}||^2 \quad (27)$$

となる。ここにベクトル$\boldsymbol{x}$に対して$||\boldsymbol{x}||$は

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \quad (28)$$

のように定義される絶対値(ノルム)を表す。式(27)において等式は2つのベクトル$\boldsymbol{F}$と$\boldsymbol{\Delta x}$が互いに平行であるときに成り立つ。つまり、外力$\boldsymbol{F}$に平行に少しずつ変形させるともっともはやく関数$\boldsymbol{F^T x}$を大きくすることができる。しかし、前述したように1次独立なベクトルが$s = n - r (= n - m)$個しかないので、式(26)で表されるベクトルはn次元空間の全てをベクトルを表現できない。したがってなるべく内積

$$\boldsymbol{F}^T \Delta \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{u}_k \quad (29)$$

を大きくするような方向に係数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$を決めるのがよいことになる。それには外力$\boldsymbol{F}$の先端からベクトル$\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \cdots, \boldsymbol{u_s}$がなす部分空間に垂線を降ろし、その足元の点に向かうベクトルが最適であることが分かる。それには

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = ||\alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \alpha_2 \boldsymbol{u_2} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{u_s} - \boldsymbol{F}||^2 \quad (30)$$

を最小にすればよい。そこで係数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$で順次微分して

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u_1}^{\boldsymbol{T}} (\alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \alpha_2 \boldsymbol{u_2} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{u_s}) = \boldsymbol{u_1}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{u_2}^{\boldsymbol{T}} (\alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \alpha_2 \boldsymbol{u_2} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{u_s}) = \boldsymbol{u_2}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{F} \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{u_s}^{\boldsymbol{T}} (\alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \alpha_2 \boldsymbol{u_2} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{u_s}) = \boldsymbol{u_s}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{F} \end{array} \right. \quad (31)$$

を得る。これから係数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$を求めればよい。すなわち連立1次方程式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{u_1} & \cdots & \boldsymbol{u_1}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{u_s} \\ \boldsymbol{u_2}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{u_1} & \cdots & \boldsymbol{u_2}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{u_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{u_s}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{u_1} & \cdots & \boldsymbol{u_s}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{u_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{u_2}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{F} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u_s}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{F} \end{pmatrix} \quad (32)$$

を解けばよい。ただし、$\boldsymbol{\Delta x}$の大きさ(絶対値)をあまり大きくすると制約条件式(10)に大きな誤差が生じるので、各係数の大きさは十分に小さくしておかなければならない。そこで、制約条件式(10)に大きな誤差が生じない程度の小さな係数εを用いて

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \varepsilon (\alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \alpha_2 \boldsymbol{u_2} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{u_s}) \quad (33)$$

として節点座標を更新することになる。このεの決定には一般的な方法はなく、問題ごとに試行錯誤しながら決めることになる。この操作を繰り返していけば式(20)を満たす$\boldsymbol{x}$が得られ、その位置が不安定トラスが安定となるつりあい位置である。
もう少し簡単な節点座標の更新方法として以下のものがある。s個の不安定モード$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_s$が与えられたとき、式(31)は$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$と$(\boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{F}, \cdots, \boldsymbol{u}_s^T \boldsymbol{F})$という2つのベクトルの内積と見ることができる。やはり先述のSchwartzの不等式によって、この内積が最大になるのは、これらの2つのベクトルが平行になるときである。したがって

$$\alpha_1 = \boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{F}, \alpha_1 = \boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{F}, \cdots, \alpha_s = \boldsymbol{u}_s^T \boldsymbol{F} \quad (34)$$

として係数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$を決めて、式(33)を用いればよい。この方法は簡単であるが、係数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$の大きさが、本来、一意性がない不安定モード$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_s$自体の大きさに依存するので不安定モードの決め方に注意が必要である。すなわち、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_s$の大きさをなるべく一様にし、かつ、それぞれが直交することが望ましい。

式(32)あるいは(34)のいずれを用いた場合でも、解に近付くと$\boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{F}$あるいは$\boldsymbol{u}_s^T \boldsymbol{F}$等の値は小さくなる。したがって、式(33)において同一のεに対して節点座標$\boldsymbol{x}$を更新していく場合、その移動距離は徐々に小さくなる。

(3)　部材力の計算方法

つりあい位置では式 (20) に解$\boldsymbol{S}$が存在することは前節で示された。では部材力の求め方について考える。式 (17) を具体的に表現すると以下のようになる。

$$\begin{cases} b_{11}S_1 + b_{21}S_2 + \cdots + b_{m1}S_m = F_1 \\ b_{12}S_1 + b_{22}S_2 + \cdots + b_{m2}S_m = F_2 \\ \vdots \\ b_{1n}S_1 + b_{2n}S_2 + \cdots + b_{mn}S_m = F_n \end{cases} \tag{35}$$

不安定トラスの場合、一般に未知数の数に比べて方程式が過剰にある。そこで仮想変位の原理[5)]を用いる。式 (35) のそれぞれの方程式に順次 $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \cdots, \bar{u_n}$ を乗じて加える。このとき $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \cdots, \bar{u_n}$ を適当に選んで、各部材力にかかる係数が

$$\begin{cases} b_{11}\bar{u_1} + b_{12}\bar{u_2} + \cdots + b_{1n}\bar{u_n} = 1 \\ b_{21}\bar{u_1} + b_{22}\bar{u_2} + \cdots + b_{2n}\bar{u_n} = 0 \\ \vdots \\ b_{m1}\bar{u_1} + b_{m2}\bar{u_2} + \cdots + b_{mn}\bar{u_n} = 0 \end{cases} \tag{36}$$

を満たしたとする。そうすれば、式 (35) に $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \cdots, \bar{u_n}$ を乗じて加えた式で、S_1 のみの係数が 1、他の部材力の係数は 0 となるので

$$S_1 = \bar{u_1}F_1 + \bar{u_2}F_2 + \cdots + \bar{u_n}F_n \tag{37}$$

として部材力 S_1 が求められる。ところで式 (36) の左辺の係数は B 行列であり、この式全体は 1 本目の部材の伸びが 1 で他の全ての部材の伸びが 0 であるような仮想節点変位 $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \cdots, \bar{u_n}$ を求めることを示している。この B 行列を行操作して m 本の単位行列を導く手法は前節で説明した。それと同じ行操作による行列の基本変形を行うとき、その横に式 (36) の右辺で与えられるような単位ベクトルを置いておけば、$\bar{u_1}, \bar{u_2}, \cdots, \bar{u_n}$ のうち m 個の値が確定する。その際、基本変形で単位ベクトルにならなかった列に対応する仮想変位 $\bar{u_i}$ は 0 にしておけばよい。すなわち、式 (36) のような非斉次連立 1 次方程式の特解が 1 つ求められる。要するに式 (36) を満たすようないかなる仮想変位であっても、式 (37) で 1 番目の部材力 S_1 が求められることは明らかである。同様に、部材力 S_i を求める場合には

$$\begin{cases} b_{11}\bar{u_1} + b_{12}\bar{u_2} + \cdots + b_{1n}\bar{u_n} = 0 \\ \vdots \\ b_{i1}\bar{u_1} + b_{i2}\bar{u_2} + \cdots + b_{in}\bar{u_n} = 1 \\ \vdots \\ b_{m1}\bar{u_1} + b_{m2}\bar{u_2} + \cdots + b_{mn}\bar{u_n} = 0 \end{cases} \tag{38}$$

を満たす仮想変位を用いれば

$$S_i = \bar{u_1}F_1 + \bar{u_2}F_2 + \cdots + \bar{u_n}F_n \tag{39}$$

で得られる。したがって、すべての部材力を求めるためには B 行列の横に m 次の単位行列をおいて、B 行列に m 本の単位行列を作るような行操作をすればよい。このようにして、不安定トラスでも仮想変位の原理を用いれば容易に部材力を求めることができる。

3.　数値計算例と考察

ここで **2.2** で示した方法論を用いて 2 つの不安定トラスの具体例を示す。

3.1　3 本トラスの例

まず、図–**1**(a) に示した不安定トラスを考える。このトラスの不安定モードの数は 1 である。すなわち、左右に「スイング」することができる。2 つの荷重 P によって、徐々に右方に節点と部材は移動する。このとき、荷重は正の仕事をする。最終的に図–**1**(b) に示すように、もともと鉛直であった 2 つの部材が 45 度だけ傾いた位置でつりあいを保つことになる。この最終位置でも 1 つの不安定モードが 1 つ存在するが、そのモードに沿って節点が移動しても、2 つの荷重による総和は 0 となる。つまり、仮想変位の原理の立場からつりあっていることが確認できる。ここには示していないが、このつりあい位置において 3 つの部材の部材力も先述の方法で計算することができる。結果は、左の斜材で 0、水平材で P そして右の斜材で $\sqrt{2}P$ となり、正解と一致した。

3.2　やや複雑な不安定トラスの例

以下では、重力のもとにおける不安定トラスの最終的なのつりあい位置と各部材力を求める例を示す。図–**2**(a) の破線は、「天井」と「右側の壁」で自由に移動できる節点で拘束された不安定トラスの初期状態を示す。あたかも 2 つの連なる三角形の「ハンガー」が吊り下がっているような状況である。この状態ではまだ重力が作用していない。ここで各部材は一様な断面をもつとして等価な重力を各節点に作用させると、このトラスはつりあい点に向かって移動する。不安定モードの数は 4 である。重力を作用させた結果、同図の実線で示す形状でつりあい条件を満足した。この例において、式 (33) にある微小な係数 ε は 0.03 とし、計算は約 400 回で収束した。また、図–**2**(b) はつりあい位置での各部材の引張力を表している。ただし、2 つの部材では圧縮力が発生するが、それらを破線で示した。最上部の部材では、すべての部材の荷重を支えるために大きな引張力が発生していることがわかる。

3.3　catenary との比較の例

図–**3** にもう 1 つの例を示す。10 本の一様な部材が線状に連なりその両端は壁に同じ高さで固定されている。これに自重を作用させる。図–**3**(a) は初期状態の位置 (細線)、途中経路 (破線) および最終のつりあい位置 (太線) を示している。このトラスの不安定モードの数は 8

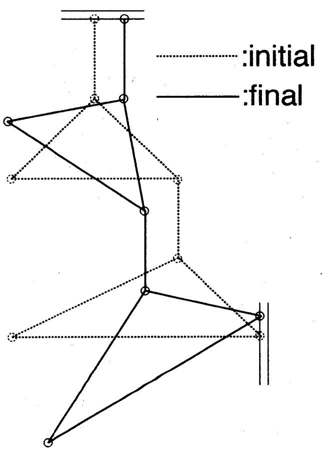
である。また図–**3**(b) は各部材力を表している。この例において、微小な係数 ε は 0.03 とし、計算は約 300 回で収束した。この問題で部材数を無限に大きくすると、正解はいわゆる catenary(懸垂線) となる。catenary は 2 階の微分方程式の解として

$$y = \frac{H}{\gamma} \cosh \frac{\gamma}{H}(x - x_0) + y_0 \tag{40}$$

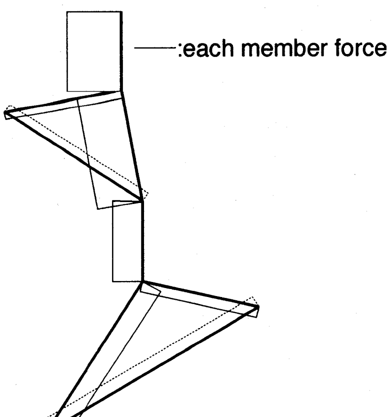
という式で表される。ここに x は右向き水平座標、y は曲線の高さ、γ は部材の単位長さ当たりの重量、H は catenary に作用する張力の水平成分 (一定値であるが未知) そして x_0 および y_0 は積分定数である。3 つの未知定数 H, x_0, y_0 を決定するためには、与えられた左右の固定点の位置と catenary の長さを用いればよい。また、catenary に発生する張力 T は

$$T = H \cosh \frac{\gamma}{H}(x - x_0) \tag{41}$$

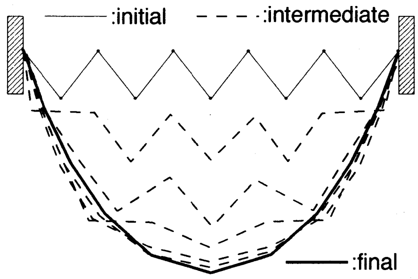
で計算できる。(これらの詳細にについては「補足」で述べる。) これらの理論値と数値計算結果を比較した。わずか 10 個の要素ではあるが、最終形状は理論曲線とほとんど重なり、発生する各部材の部材力も部材中央で式 (41) の値とほぼ一致した。したがって、本解析手法の精度は十分にあることが確認された。



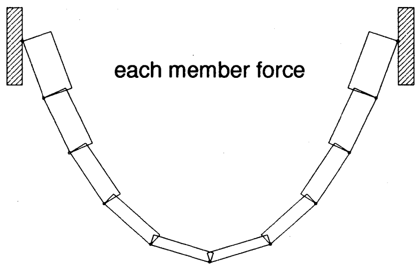
図–**2**(a) initial and final state



図–**2**(b) member force



図–**3**(a) from initial to final state

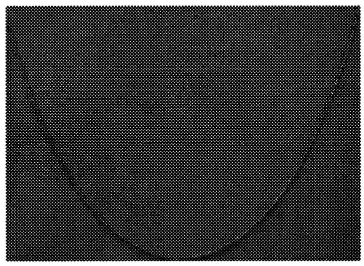


図–**3**(b) member force

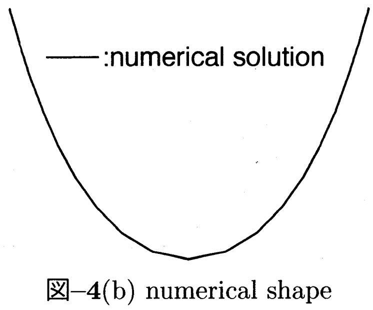
3.4 実験との比較

catenary は鎖を用いて容易に実験で再現することができる。市販の目の細かい鎖を用いて両端を固定して吊り下げた形状を図–**4**(a) の写真に示す。これに対応して、20 要素を用いて本解析手法で計算した結果が図–**4**(b) である。最下端周辺部で要素の粗さからくるわずかの折れ曲がりが見えるが、全体の形状は、両者でほぼ一致していることがわかる。

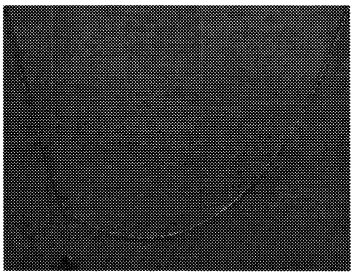
鎖の 1 箇所に集中荷重を作用させた場合でも、荷重点の左右の部分では catenary が現れる。2 つの catenary で合計 6 つの未知数が現れるが、荷重点でのつりあい



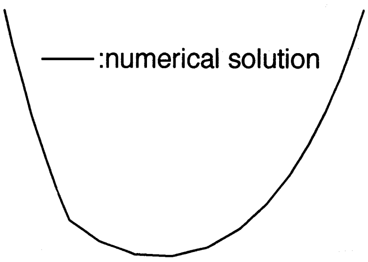
図–**4**(a) shape of real hanging chain



図–**4**(b) numerical shape



図–**5**(a) shape of real hanging chain



図–**5**(b) numerical shape

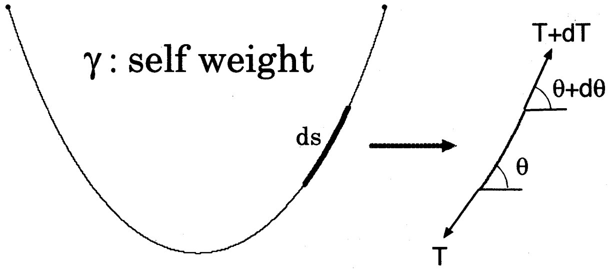
条件、連続条件および左右の部分の長さ条件を用いることで両者の理論的な catenary を確定することができる。図–**5**(a) にそのときの実験結果を、また、図–**5**(b) に計算結果を示す。両者はよく一致していることがわかる。

4. まとめ

本研究により、極めて初等的な線形代数の演算を用いて、任意の外力下における様々な不安定トラス構造のつりあい形状を求める計算方法を確立することができた。また、仮想変位の原理を適用すれば、つりあい形状における各部材力も容易に求められることを示した。そして、いくつかの計算結果を通じて、本解析手法の妥当性が明らかになった。不安定構造は、本来、避けるべき構造としてこれまであまり研究がなされていなかったが、土木構造においても、つり橋のケーブルや新しい構造形式の開発等に応用することができ、興味ある課題のひとつである。本研究をもとに、今後 3 次元問題への拡張を含めて、より実際の土木構造物を取り扱っていきたい。

5. 補足 (catenary の誘導)

伸縮しない鎖が重力下で静止している。鎖の単位長さ当たりの自重 γ は一様とする。このとき鎖がなす曲線を懸垂線という。ここではよく使われる用語 catenary を用いることにする。以下ではこの catenary を表す関数 $y(x)$ を求めるための基礎式を図–**6** を参照しながら



図–**6**forces acting on an element

説明する。

5.1 鉛直方向のつりあい式

両端の座標が (x, y) および $(x+dx, y+dy)$ である微小な長さ ds の鎖の一部分を考える。それぞれの端点では、その接線方向に T および $T+dT$ の張力が作用している。また、両端における x 軸方向からの鎖の傾きを θ および $\theta+d\theta$ とする。左端では $T\sin\theta$ の大きさの下向きの鉛直力が作用し、一方、右端では $(T+dT)\sin(\theta+d\theta)$ の大きさの上向きの鉛直力が作用する。この微小区間 ds の自重 γds は鉛直下向きに作用するので、鉛直方向の力のつりあい式は

$$-T\sin\theta + (T+dT)\sin(\theta+d\theta) = \gamma ds \tag{42}$$

あるいは

$$d(T\sin\theta) = \gamma ds \tag{43}$$

と書ける。むろん

$$ds = \sqrt{1+y'^2} \tag{44}$$

であるから

$$\frac{d(T\sin\theta)}{dx} = \gamma\sqrt{1+y'^2} \tag{45}$$

ここで y' は catenary を表す関数 $y(x)$ の変数 x による微分を表す。

5.2 水平方向のつりあい式

水平方向の外力が作用しない場合、同様に微小部分の水平方向のつりあい式は

$$\frac{d(T\cos\theta)}{dx} = 0 \tag{46}$$

と書ける。つまり、「張力 T の水平成分 $T\cos\theta$」は catenary 全体にわたって一定であることを示す。この水平成分を H と表すことにすると式 (46) は

$$T\cos\theta = H(一定) \tag{47}$$

と等価である。張力の水平成分 H は一定ではあるが、この時点では未知量である。この式は

$$T = \frac{H}{\cos\theta} \tag{48}$$

と書ける。

5.3 catenaryの微分方程式とその解法

先に説明した鉛直および水平方向のつりあい式を用いる。水平方向のつりあい式に等価な式(48)を鉛直方向のつりあい式(45)に代入すると

$$\frac{d(H\tan\theta)}{dx} = \gamma\sqrt{1+y'^2} \tag{49}$$

となる。Hが定数であること、および$\tan\theta = y'$であることを用いれば上式は

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\gamma}{H} \tag{50}$$

となる。これがcatenaryの形状を決定する支配方程式である。形としては非線形2階の微分方程式である。先述したように、この方程式には1つの未知量Hを含むこと、また、2階の微分方程式であることから積分時に2つの積分定数が現れることから、一般解には合計3つの未知定数がある。式(50)の一般解を求める。この不定積分は

$$\log(y' + \sqrt{1+y'^2}) = \frac{\gamma}{H}(x - x_0) \tag{51}$$

である。ここでx_0は積分定数である。上式は

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{\gamma}{H}(x-x_0)} \tag{52}$$

を表す。両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{y' + \sqrt{1+y'^2}} = e^{-\frac{\gamma}{H}(x-x_0)} \tag{53}$$

としたあと、この左辺を有理化すれば

$$-y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{-\frac{\gamma}{H}(x-x_0)} \tag{54}$$

となる。ここで式(52)、(54)の両辺を互いに引いて2で割れば

$$y' = \sinh\frac{\gamma}{H}(x - x_0) \tag{55}$$

を得る。これを積分すると

$$y = \frac{H}{\gamma}\cosh\frac{\gamma}{H}(x - x_0) + y_0 \tag{56}$$

なる一般解が求められる。先述したように3つの未知定数があるが、これらを確定するためには3つの条件が必要となる。それらは下記のものである。

1) 点(x_l, y_l)を通る。
2) 点(x_r, y_r)を通る。
3) 鎖の長さはlである。

5.4 張力の求め方

catenaryの微小区間の接線方向のつりあい条件を考える。両端でわずかの傾きの変化があるが、接線方向ののつりあいには影響を与えない。つりあい式は

$$-T + (T + dT) = \gamma ds\sin\theta \tag{57}$$

となる。厳密には$(T + dT)$の項には$\cos d\theta$が掛かるが、それはほとんど1であるので無視される。さらに注意すべきは$ds\sin\theta = dy$である。もともと自重の接線成分を求めるために乗じた$\sin\theta$であるが、これをdsに乗じると、微小部分の鉛直座標の変化dyになる。つまり、式(57)は

$$dT = \gamma dy \tag{58}$$

という形となる。鎖の単位長さ当たりの自重γが一定であるなら、これを積分して

$$T = \gamma(y - y_0) \tag{59}$$

という式になる。この式は有用である。つまり、catenaryの任意点における張力Tは高さyの1次関数となることがわかる。接線方向のつりあい式からcatenaryの任意点における張力Tの大きさは式(59)となる。また、式(56)に含まれる3つの未知定数の決定法はすでに述べた。特にy_0を式(59)に代入すればyの関数として張力Tの理論値が求められる。一方、式(56)の$y - y_0$を用いて

$$T = H\cosh\frac{\gamma}{H}(x - x_0) \tag{60}$$

とすればxの関数として張力Tの理論値が求められる。$x = x_0$はcatenaryの最下点のx座標であるが、むろん、そこではcatenaryの勾配は0であるので張力Tはその水平成分Hと一致する。

参考文献

1) 半谷裕彦・川口健一：形態解析，培風館，1991.
2) 半谷裕彦・田中尚：不安定トラスの剛体変位と自己応力，日本建築学会大会学術講演梗概集，第59号／構造系，pp.2581–2584, 1984.
3) K. Nishibayashi, A fundamental study on the equilibrium configuration of the unstable truss structure and its applications, 京都大学工学部地球工学科卒業論文，2008.
4) 田村武：線形代数学，共立出版，1994.
5) 田村武：構造力学–仮想仕事の原理を通して–，朝倉書店，2003.

(2008年4月14日 受付)