応用力学論文集 Vol.11, pp.319-330 （2008年8月） 土木学会

非関連型の Drucker-Prager 弾塑性体の漸近解を使用した最大摩擦せん断応力破壊基準によるせん断破壊の考察

On a shear failure based on the maximum frictional shear stress criteria by using an asymptotic solution for a non-associate Drucker-Prager elastic-plastic material

新保泰輝*・矢富盟祥**
Taiki Shimbo and Chikayoshi Yatomi

*工修 金沢大学大学院自然科学研究科（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
** Ph.D 金沢大学教授 大学院自然科学研究科（〒920-1192 石川県金沢市角間町）

A new fracture criterion of the shear failure for the geomaterials is presented which predicts a straight extension of a crack in an elastic plastic material under compressive loads called "The maximum frictional shear stress criterion". We examine the criterion by using both the singular and the constant terms in the asymptotic expansion of the crack tip stress fields for a non-associate linear hardening Drucker-Prager elastic-plastic material. As a result, we find that the confining pressure, the friction along the crack surfaces, the internal material friction , and the dilatancy effect are the lowering of the extensive hoop stress: Then they cause the maximum frictional shear stress to extend a crack straight.

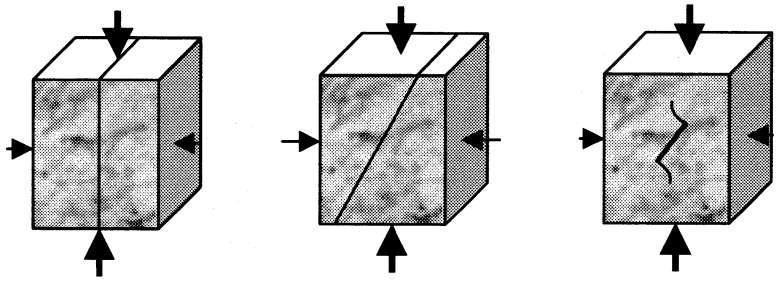
Key Words: maximum frictional shear stress criteria, asymptotic analysis, non-associate Drucker-Prager elastic-plastic material, Mode II crack

1. 序論

本論文では，特に，圧縮荷重下にある岩盤や地盤材料内の初期き裂と同方向に直進進展する，せん断型の破壊のき裂進展メカニズムを考究する目的で，非関連流れ則に従うDrucker-Prager弾塑性体の，モードII型の静止き裂先端近傍の応力の漸近解析の結果を用い，せん断型の破壊に関する考察を行なう．

通常，圧縮荷重下におけるこれらの材料の，**図−1**のような供試体の破壊形態は，上下からの最大圧縮応力に対し側圧が小さな場合は，**図−1 (a)**のような縦割れ破壊となり，側圧が大きくなると，**図−1 (b)**のようなモードII型のせん断型の破壊となる（以後，この型の破壊を単にせん断破壊と表記する．）．さらに側圧を大きくし等方圧に近い状態になると，供試体はバルジ型に変形するが，明確な破壊面は観察されなくなる．

縦割れ破壊は，**図−1 (c)**のように，供試体中央に斜めき裂を挿入して圧縮すると，き裂の両先端近傍から，き裂面が滑るために発生した最大引張周応力の方向にウイングき裂と呼ばれる折れ曲がりき裂が発生し，この折れ曲がりき裂が最大圧縮方向に進展する実験事実に基づいて説明される．すなわち，物体の中には，無数の微小き裂が存在し，大きな圧縮荷重が作用するとウイングき裂が多数発生するが，これが縦方向に連なり，マクロにはこれが最終



(a)縦割れ破壊 (b)せん断破壊 (c)ウィングき裂

図−1 圧縮荷重下の破壊形態

的には縦割れき裂になると解釈される[1].

一方，**図−1 (b)** のようなせん断破壊は，地滑りや地震の主要因である活断層の滑り現象に密接に関連した非常に重要な破壊形態であるにもかかわらず，この破壊形態になる破壊基準に関しては，いまだ未解決問題である[2]．地震の活断層生成メカニズム解明を意図して，S.Melin[3] は，“When does a crack grow under mode II conditions?”と題した論文を報告しており，線形等方弾性体を仮定し，き裂面に対して等方圧縮応力とせん断応力の比を用い，K_{II} 最大破壊基準を使用した議論を行っている．また，著者らの1人は，線形等方弾性体において，エネルギ解放率最大基準を使用し，側圧が小さな場合は，ウイングき裂が発生し，側圧がある程度大きくなるとせん断破壊になる事を報告した[4]．しかしながら，岩盤や地盤材料のき裂先端近傍は，非常に応力が大きくなっているため，もはや線形等方弾性体とは仮定できず弾塑性体状態になっていると考えるべきであろう．特に，地盤材料では，滑り面（き裂面）が発生していない初期状態から，物体全体が塑性化していると考えられる場合が多い．

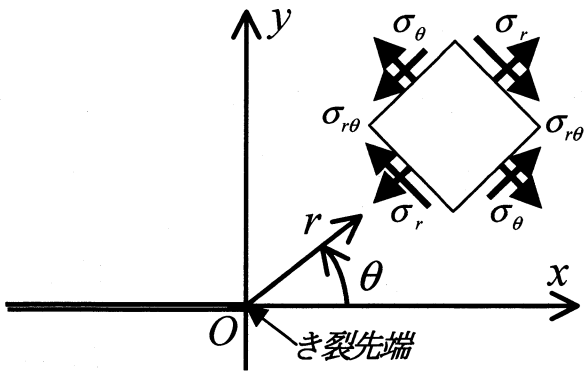
そこで，著者らの1人は，近年，弾塑性体にも適用可能な，せん断破壊に関する破壊基準として，「最大摩擦せん断応力破壊基準」を提案し[5]，この破壊基準を硬化の無いDrucker-Prager弾完全塑性体を用い，有限要素解析により，その有用性の検証を行った．

一方，これらの材料に共通した特性として，せん断変形により体積変化（ダイレイタンシー）が生じる事が知られており，この特性は，降伏関数に圧力の効果を導入した弾塑性体としてモデル化される．そこで，著者らは，近年，関連流れ則に従う（以後，単に関連型と表記する．），線形硬化するDrucker-Prager弾塑性体のモードII型のき裂先端近傍特異応力場を求め，ダイレイタンシー係数が応力場に与える影響を考察し，その結果，ダイレイタンシー係数が大きい場合には，引張破壊の原因とされる最大引張周応力が低下する事を示した[6]．一方，岩盤，地盤材料においては，関連型とすると，ダイレイタンシーによる体積変化が大きすぎるため，内部摩擦係数に関連する降伏関数とは別にダイレイタンシー係数に関連するポテンシャル関数が導入された非関連弾塑性体モデルが採用される事が多い．

そこで，本論文では，ダイレイタンシー係数と内部摩擦係数が独立な，非関連流れ則に従う（以下，単に非関連型と表記する．），線形硬化するDrucker-Prager弾塑性体のき裂先端近傍応力場の漸近解第一項である特異応力場を求め，また，第二項である均一圧縮応力項と足し合わせた応力場を用いて，非関連モデルのせん断破壊への影響を考察する．

2. 最大摩擦せん断応力破壊基準

「最大摩擦せん断応力破壊基準」とは，端的に言えば，



図−2 き裂先端を原点とした極座標

き裂先端近傍に，その近傍での応力に対して周知の「Coulombの破壊基準」を用いた「き裂進展の破壊基準」である．

Coulombの破壊基準は，もともと物体のマクロな破壊条件を主応力関係 $\sigma_1 = f(\sigma_2, \sigma_3)$，$(\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3)$ で求めるのが目的であり，き裂面の存在しない物体に仮想的なき裂による破壊を経験的に想定し提案されたものである．Coulombの破壊基準では，せん断破壊は σ_1，σ_3 軸で，直線で表せる．したがって，Coulombの破壊基準は，「き裂がいつ，どの方向に進展するかを判断する基準」であるき裂進展破壊基準とは無関係なものである．Griffith[7] は，上記の主応力関係で表されるマクロな破壊基準を求めるために，2軸の主応力場におかれた無限板内の扁平な楕円き裂を解析し，破壊は，その周上にある縁応力が最大になる点で発生するという仮定の下で，σ_1，σ_3 軸で放物線形の破壊条件を得た．後に，McClintock and Walshは，圧縮荷重下では，き裂は閉じ，摩擦力が生じるとし，最終的に，Coulomb の破壊基準である直線形の主応力関係となる事を示した[8]．

以下に，**図−2** のように，き裂面の先端を原点とした極座標表示による応力を用いて「最大摩擦せん断応力破壊基準」に関して詳述する．本論文では，圧縮荷重下でのモードII型の静止き裂を考えているため，上下き裂面は相対的に滑ってもき裂面は常に閉じた状態にあるとする．

次式で定義される，き裂先端からき裂の長さに比較して微小な距離 r にある角度 θ に関する「摩擦せん断応力 τ_f（Frictional shear stress）」の最大値が，せん断破壊強度 τ_{fC} に達した時，き裂は，その先端から r が増加する方向に直進進展すると仮定する．

$$\tau_f = \begin{cases} |\sigma_{r\theta}| + \hat{\mu}\sigma_\theta & with \quad \sigma_\theta < 0 \\ |\sigma_{r\theta}| & with \quad \sigma_\theta > 0 \end{cases} \tag{1}$$

ここで，τ_f を摩擦せん断応力と呼び，σ_θ，$\sigma_{r\theta}$ は，それぞれ，き裂先端近傍の周応力およびせん断応力である．ただし，式(1)で，$\tau_f < 0$ となる場合は $\tau_f = 0$ とする．また，$\hat{\mu}$ は内部摩擦係数であり，き裂面間の動摩擦係数とは異なる．

式(1)のτ_fの定義に使用した極座標応力による表現を，主応力による表現に置き換え，それらの座標変換の角度に関する最大条件から，Coulomb の破壊基準である主応力σ_1およびσ_3軸での直線で表された破壊条件が得られる．

この時，主応力のひとつが引張応力になった場合の破壊条件は色々考えられているが，ここでは，議論を簡単にするため，直応力のひとつである周応力σ_θが，引張最大になる角度θで，ある限界値$\sigma_{\theta C}$に達した時に引張破壊すると考え，き裂は，その先端から周応力最大方向に進展すると考える．この条件は最大周応力破壊基準と言われる．なお，本論文で考える岩盤材料や地盤材料では，$\tau_{fc} \gg \sigma_{\theta c}$と仮定する．注意したい事は，圧縮荷重下でのき裂においては，き裂面と一致する角度$\theta=\pi$での直応力である半径応力σ_rが，引張最大になる場合が多いが，この場合，き裂は，厳密に考えると，周応力σ_θの場合と異なり，応力が無限大になるき裂先端から進展するようにはならないため，ある角度θの最大引張周応力σ_θより，最大引張半径応力σ_rが大きくても周応力により引張破壊が生じると考える．

3. き裂先端近傍応力場

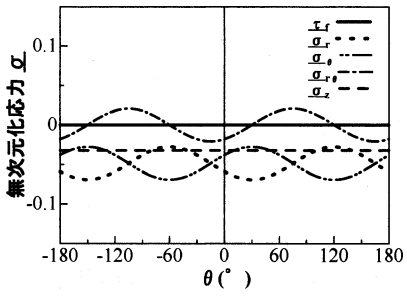
3.1 き裂先端近傍応力場

本論文では，き裂先端近傍の応力を下記のように漸近展開第2項までを用いて議論する．

$$\boldsymbol{\sigma}(r,\theta)=\boldsymbol{\sigma}^1(r,\theta)+\boldsymbol{\sigma}^2(\theta) \tag{2}$$

ここで，第1項は後述するように，き裂先端からの距離rに対して，$1/\sqrt{r}$の特異性を持つ項であり，第2項は物体境界から与えられる応力による，距離rによらない均一圧縮応力項である．ここで，第 2 項は直交デカルト座標(x,y)で表せば，定数となるが，**図−2** に示す極座標表示すると，**図−3** に示すようなθの関数となる事に注意したい．**図−3** の詳細は後述する．

式(2)で，第2項の定数項を用いた理由は，第1項の特異項だけでは，き裂先端周りに反時計回り方向にせん断変形させた場合，そのき裂先端近傍の応力のうち，特に，周応力や半径応力の大きな引張応力が発生するため，破壊は，引張破壊となり，せん断破壊が生じない事になるからである．したがって，例えば，この物体内のき裂に周囲から均一圧縮応力を作用させる事により，き裂面の滑りを小さくする事により，上記の引張応力を，圧縮応力に変える事が可能になると考えたからである．無限板中央にある斜めき裂に 1 軸引張応力を作用させた時，一定応力である，T-Stress を考えれば，最大周応力破壊基準により，き裂進展角の実験事実を良く説明できたのと同じような理由である．



図−3 均一圧縮応力場（$\sigma_3/\sigma_1=0.4$）

3.2 き裂先端近傍応力場の漸近展開第 1 項

(1) 構成式

本論文では，弾性体の部分は線形等方弾性体，塑性部分は圧力に線形に依存する降伏関数と塑性ポテンシャルを持つ速度型の非関連 Drucker-Prager 弾塑性体を考える．簡単のために変形は微小であるとし，慣性項や物体力のない準静的な平面ひずみ場における静止き裂を仮定して議論する．

今，非関連型の線形硬化する等方均質 Drucker-Prager 弾塑性体の降伏関数f，塑性ポテンシャルgを，

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{J_2}-\hat{\mu}p-\left(H\bar{e}^p+\tau_y\right)=0 \\ g &= \sqrt{J_2}-\beta p \end{aligned} \tag{3}$$

とする．ここで，J_2は偏差応力$\mathbf{S}$の第2不変量であり，pは圧力である．これらは，それぞれ次式で定義されている．

$$J_2 := \frac{1}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S},\quad \mathbf{S} := \boldsymbol{\sigma}+p\mathbf{1},\quad p := -\frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma} \tag{4}$$

上式で中付き$(\cdot)$はテンソルの内積であり，$\mathbf{1}$は2階の恒等テンソルである．また，平均応力$tr\boldsymbol{\sigma}/3$にマイナスが付いているのは平均応力が負の時，圧力pを正とするためである．$\hat{\mu}$は内部摩擦係数である．ただし，ここでの$\hat{\mu}$は，式(1)の内部摩擦係数と必ずしも同じものである必要はない．本論文では，単に議論を簡単にするため両者が同じであると仮定した．βはダイレイタンシー係数である．このβにより，塑性せん断ひずみによる塑性体積ひずみが生じる．τ_yはせん断降伏応力である．Hは硬化係数であり，ここでは正の定数とする．$\bar{e}^p$は相当偏差塑性ひずみであり，次式で定義されている．

$$\bar{e}^p := \int \dot{\bar{e}}^p dt = \int \sqrt{2\dot{\mathbf{e}}^p\cdot\dot{\mathbf{e}}^p}\,dt \tag{5}$$

ここで，tは，時間とともに単調増加する負荷パラメータであり，上付き$(\cdot)$は，このtに関する微分を表す．$\mathbf{e}^p$は偏差塑性ひずみであり，

$$\mathbf{e}^p := \boldsymbol{\varepsilon}^p-\frac{1}{3}tr\boldsymbol{\varepsilon}^p\mathbf{1} \tag{6}$$

である．塑性ひずみ速度は非関連流れ則に従うとすると，次式で与えられる．

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \tag{7}$$

ここで，λは塑性乗数である．塑性変形時に応力が常に

降伏曲面上にあるためのコンシステンシー条件は,

$$\dot{f}=0 \tag{8}$$

である．ここで，応力速度と弾性ひずみ速度の関係は，弾性構成テンソル$\mathbf{C}^e$を用いて以下で表される．

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{C}^e\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$$
$$\mathbf{C}^e:=\frac{E}{(1+\nu)}\left\{\mathbf{I}+\frac{\nu}{(1-2\nu)}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right\} \tag{9}$$

ここで，Eは弾性係数，νはポアソン比，$\mathbf{I}$は4階の恒等テンソルである．

今，全ひずみ速度は，弾性ひずみ速度と塑性ひずみ速度の和であるから，降伏関数(3)，流れ則(7)，コンシステンシー条件(8)，構成式(9)を用いると，

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\nu tr\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{1}+\frac{1}{h}(\mathbf{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{P}\right\} \tag{10}$$

が得られる．ここで，$h:=H/E$とおいた．また，上式$\mathbf{P}$，$\mathbf{Q}$は，それぞれ次式で定義されている．

$$\mathbf{P}:=\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\mathbf{S}}{2\sqrt{J_2}}+\frac{\beta}{3}\mathbf{1},\ \mathbf{Q}:=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\mathbf{S}}{2\sqrt{J_2}}+\frac{\hat{\mu}}{3}\mathbf{1} \tag{11}$$

ここで，$J_2=0$となる場合，式(10)の構成式が定義できないため，漸近解を求める際には$J_2>0$とした．なお，式(10)はJ.W.Rudnicki and J.R.Riceの構成式[9]と一致する．

ここで，物体の境界で与えられた応力が比例負荷で与えられた場合，式(10)のひずみ速度に対する応力速度関係は，式(11)の$\mathbf{P}$，$\mathbf{Q}$が応力の0次同次関数であるから，除荷のない比例負荷を考え，常に塑性負荷とすると式(10)の負荷パラメータtの微分がとれ，

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{E}\{(1+\nu)\boldsymbol{\sigma}-\nu tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}+\Lambda\mathbf{P}\} \tag{12}$$

となる．ここで，Λは式(4)，式(11)より以下で定義されている．

$$\Lambda:=\frac{1}{h}\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{h}\left(\sqrt{J_2}-\hat{\mu}p\right) \tag{13}$$

(2) 力の釣合い式とひずみ変位関係式

今，**図−2**に示すき裂先端を原点とした極座標を考える．き裂先端からの距離をr，き裂先端延長線（x軸）から反時計回りの角度をθとすると，極座標系における力の釣合い式は，

$$\begin{aligned}(r\sigma_r)_{,r}+\sigma_{r\theta,\theta}-\sigma_\theta&=0\\(r\sigma_{r\theta})_{,r}+\sigma_{\theta,\theta}+\sigma_{r\theta}&=0\end{aligned} \tag{14}$$

である．ここで，添え字r，θは極座標系の各成分を意味している．この時，ひずみ変位関係式は，変位をu_r，u_θとし，平面ひずみ条件を考慮すれば，以下で表される．

$$\begin{aligned}\varepsilon_r&=u_{r,r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\left(u_{\theta,\theta}+u_r\right)\\\varepsilon_z&=0,\quad \varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}\left\{u_{\theta,r}+\frac{1}{r}(u_{r,\theta}-u_\theta)\right\}\end{aligned} \tag{15}$$

(3) 変数分離

き裂先端近傍の応力や変位の特異場は，応力の特異性のオーダーをsとすれば，式(12)から，ひずみは応力の1次同次関数であるから，ひずみの特異性のオーダーもsであり，変位はひずみの特異性のオーダーより1次だけ大きいから，$s+1$の特異性のオーダーを持つ．したがって，変数分離が可能であると仮定すれば，

$$\begin{aligned}u_r(r,\theta)&=\frac{L\bar{r}^{s+1}}{s+1}\bar{u}_r(\theta),\quad u_\theta(r,\theta)=\frac{L\bar{r}^{s+1}}{s+1}\bar{u}_\theta(\theta)\\\sigma_{r\theta}(r,\theta)&=H\bar{r}^s\bar{\sigma}_{r\theta}(\theta),\quad \sigma_r(r,\theta)=H\bar{r}^s\bar{\sigma}_r(\theta)\\\sigma_\theta(r,\theta)&=H\bar{r}^s\bar{\sigma}_\theta(\theta),\quad \sigma_z(r,\theta)=H\bar{r}^s\bar{\sigma}_z(\theta)\end{aligned} \tag{16}$$

とおける．ここで，$\bar{r}:=r/L$であり，長さの次元を持つ量Lで無次元化されている．Lの具体形については後述する．したがって，上に（−）が付記してある量は全て無次元量である．

今，負荷は比例負荷を仮定しているため，応力および，ひずみは負荷パラメータtに比例している．したがって，応力のなす単位面積辺りの仕事Wは次式のようになる．

$$W=\int_0^t\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}dt=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} \tag{17}$$

ここで，Wのき裂先端を含む任意の面S上での極座標で表した面積分は，

$$\int_S Wrdrd\theta \tag{18}$$

である．したがって，破壊力学において通常仮定されるように，この値が有限であるとすると，Wの特異性のオーダーの最大値は−1となる必要があり，応力とひずみの特異性のオーダーは同じであるから，$s=-1/2$となる．

(4) 非線形連立常微分方程式

構成式(12)，力の釣合い式(14)および，ひずみ変位関係式(15)に，式(16)および，特異性のオーダー$s=-1/2$を代入すると，以下の6個の式が得られる．

$$\begin{aligned}\bar{u}'_r&=\frac{1}{2}\bar{u}_\theta+(1+\nu)h\bar{\sigma}_{r\theta}+\bar{\Lambda}P_{r\theta}\\\bar{u}'_\theta&=-\bar{u}_r+\frac{1}{2}\left[h\{\bar{\sigma}_\theta-\nu(\bar{\sigma}_r+\bar{\sigma}_z)\}+\bar{\Lambda}P_\theta\right]\\\bar{\sigma}'_{r\theta}&=-\frac{1}{2}\bar{\sigma}_r+\bar{\sigma}_\theta\\\bar{\sigma}'_\theta&=-\frac{3}{2}\bar{\sigma}_{r\theta}\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_r&=h\{\bar{\sigma}_r-\nu(\bar{\sigma}_\theta+\bar{\sigma}_z)\}+\bar{\Lambda}P_r\\0&=h\{\bar{\sigma}_z-\nu(\bar{\sigma}_r+\bar{\sigma}_\theta)\}+\bar{\Lambda}P_z\end{aligned} \tag{20}$$

ここで，上付き（'）はθに関する微分である．また，ここで，

表−1 未知境界条件（$\bar{u}_\theta(\pm\pi)=\xi$，$\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi)=\zeta$，$\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi)=\eta$，$\bar{\sigma}_r(-\pi)=-2$）

	β	$\bar{u}_\theta(\pm\pi)=\xi$	$\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi)=\zeta$	$\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi)=\eta$		β	$\bar{u}_\theta(\pm\pi)=\xi$	$\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi)=\zeta$	$\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi)=\eta$
$\hat{\mu}=0.0$	0.00	0.00000000	0.00000000	0.00000000	$\hat{\mu}=0.1$	0.00	−0.00119740	0.00312210	0.03433934
	0.10	−0.00142091	−0.00276800	−0.02707693		0.10	−0.00347651	0.00000000	0.00467671
	0.20	−0.00536145	−0.01044438	−0.05019265		0.20	−0.00799246	−0.00794881	−0.02114330
	0.30	−0.01154398	−0.02248827	−0.06986963		0.30	−0.01440308	−0.02016402	−0.04364442
	0.50	−0.03068430	−0.05977460	−0.09959659		0.50	−0.03256459	−0.05733469	−0.07947704
	0.60	−0.04431805	−0.08633387	−0.10912178		0.60	−0.04462205	−0.08344784	−0.09239585
	β	$\bar{u}_\theta(\pm\pi)=\xi$	$\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi)=\zeta$	$\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi)=\eta$		β	$\bar{u}_\theta(\pm\pi)=\xi$	$\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi)=\zeta$	$\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi)=\eta$
$\hat{\mu}=0.2$	0.00	−0.00471340	0.01264527	0.07046061	$\hat{\mu}=0.3$	0.00	−0.01044183	0.02941608	0.11193190
	0.10	−0.00763961	0.00874064	0.03772764		0.10	−0.01383297	0.02438946	0.07531666
	0.20	−0.01250938	0.00000000	0.00874746		0.20	−0.01886896	0.01436991	0.04232798
	0.30	−0.01890892	−0.01298206	−0.01699537		0.30	−0.02505180	0.00000000	0.01247996
	0.50	−0.03553542	−0.05140260	−0.05959571		0.50	−0.03963131	−0.04124909	−0.03852386
	0.60	−0.04569347	−0.07780590	−0.07609818		0.60	−0.04757206	−0.06884224	−0.05926147
	β	$\bar{u}_\theta(\pm\pi)=\xi$	$\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi)=\zeta$	$\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi)=\eta$		β	$\bar{u}_\theta(\pm\pi)=\xi$	$\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi)=\zeta$	$\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi)=\eta$
$\hat{\mu}=0.5$	0.00	−0.02802396	0.09352597	0.23483397	$\hat{\mu}=0.6$	0.00	−0.03850582	0.14803234	0.33416904
	0.10	−0.03198107	0.08603424	0.18710192		0.10	−0.04249807	0.14011896	0.27936768
	0.20	−0.03708686	0.07244286	0.14201187		0.20	−0.04769778	0.12518693	0.22639524
	0.30	−0.04259832	0.05343383	0.09910591		0.30	−0.05328967	0.10388674	0.17476260
	0.50	−0.05223559	0.00000000	0.01949502		0.50	−0.06200660	0.04178382	0.07284337
	0.60	−0.05488067	−0.03450140	−0.01589246		0.60	−0.06223848	0.00000000	0.02241555

$$P_r=\frac{2\bar{\sigma}_r-\bar{\sigma}_\theta-\bar{\sigma}_z}{6\sqrt{\bar{J}_2}}+\frac{\beta}{3},P_\theta=\frac{2\bar{\sigma}_\theta-\bar{\sigma}_r-\bar{\sigma}_z}{6\sqrt{\bar{J}_2}}+\frac{\beta}{3}$$
$$P_z=\frac{2\bar{\sigma}_z-\bar{\sigma}_\theta-\bar{\sigma}_r}{6\sqrt{\bar{J}_2}}+\frac{\beta}{3},P_{r\theta}=\frac{\bar{\sigma}_{r\theta}}{2\sqrt{\bar{J}_2}} \quad (21)$$

$$\bar{J}_2=\frac{1}{3}\left(\bar{\sigma}_r^2+\bar{\sigma}_\theta^2+\bar{\sigma}_z^2-\bar{\sigma}_r\bar{\sigma}_\theta-\bar{\sigma}_r\bar{\sigma}_z-\bar{\sigma}_\theta\bar{\sigma}_z\right)+\bar{\sigma}_{r\theta}^2 \quad (22)$$

$$\bar{\Lambda}=\sqrt{\bar{J}_2}+\frac{\hat{\mu}}{3}\left(\bar{\sigma}_r+\bar{\sigma}_\theta+\bar{\sigma}_z\right) \quad (23)$$

である．

ここで，式$(20)_{1,2}$の両辺の微分を取り，連立させる事により以下の二つの式を得る．

$$\bar{\sigma}'_r=\frac{1}{\left(B_4C_6-B_6C_4\right)}X,\quad \bar{\sigma}'_z=\frac{1}{\left(B_4C_6-B_6C_4\right)}Y \quad (24)$$

上式右辺のB，CおよびX，Yの具体的な表現は付録(1)の式(A1)から式(A11)に示す．また，X，Y内にある$\bar{u}'_r$，$\bar{\sigma}'_{r\theta}$，$\bar{\sigma}'_\theta$は式$(19)_{1,3,4}$を用いて微分のない形で求められる．以上より得られた式(19)，式(24)の計6個の非線形微分方程式の2点境界値問題を連立させて解く事により比例負荷下にある非関連型のDrucker-Prager弾塑性体のき裂先端近傍特異場の変位や応力が得られる．また，ここで，式(19)，式(20)でHを固定して，$E\to\infty$とする事により，$h\to 0$とすれば，剛塑性体の場合となる．また，構成式(12)でEを固定して，$H\to\infty$にする事により，$h\to\infty$とすれば，線形等方弾性体となる．ただし，式(19)，式(20)で$h\to\infty$としても線形等方弾性体にはならない事に注意したい．ただ，このhを大きくすると変位や応力は弾性体の値に近くなる．

(5) 境界条件

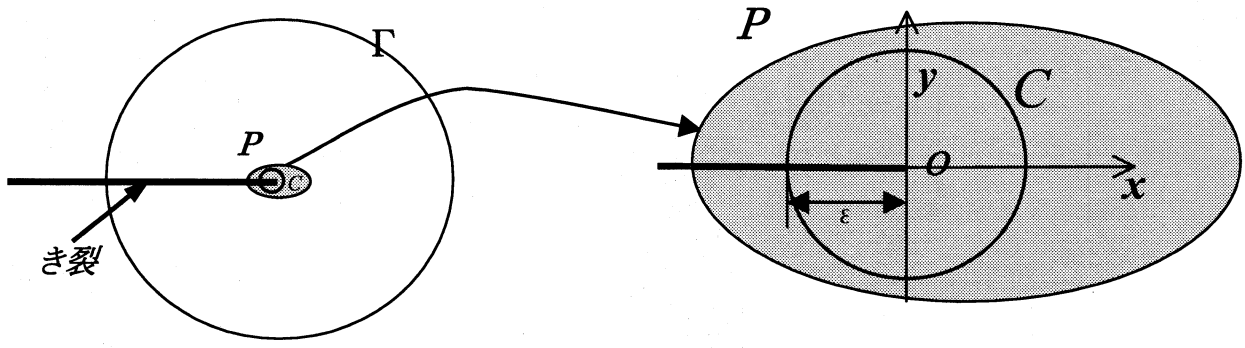
線形等方弾性体やvon Mises弾塑性体の場合には，式(19)，式(20)より，モードI型の場合，き裂の延長線上$\theta=0$に関し$\{\bar{u}_\theta,\bar{\sigma}_{r\theta}\}$は反対称，$\{\bar{u}_r,\bar{\sigma}_r,\bar{\sigma}_\theta,\bar{\sigma}_z\}$は対称関数になり，モードII型の場合は前者と後者が逆の対称性を持つ事が分かる．一方，Drucker-Prager弾塑性体においては，モードI型の場合は上記と同じ対称性を持つが，式(19)，式(20)より，モードII型の場合，β，$\hat{\mu}$が存在するため，線形等方弾性体やvon Mises弾塑性体とは異なり，$\theta=0$に対して応力や変位の対称性，反対称性の特性は失われる事が分かる．したがって，線形等方弾性体やvon Mises弾塑性体の場合とは異なり，き裂の延長線上$\theta=0$の変位や応力の境界条件は未知となるため，き裂面$\theta=\pm\pi$にて境界条件を与える必要がある．今，モードII型である事を考慮し，き裂面が閉じている事と力の釣合い条件から，

$$[\bar{u}_\theta]=[\bar{\sigma}_{r\theta}]=[\bar{\sigma}_\theta]=0 \quad (25)$$

を与える．ここで，$[A]$はき裂上下面の物理量Aの差$[A]:=A(\pi)-A(-\pi)$である．その差がゼロであっても，一般には，き裂上下面では値を持つ事に注意したい．線形等方弾性体やvon Mises弾塑性体の場合は，き裂面では表面応力がゼロとなる自由境界を仮定すれば，その結果としてき裂面は閉じる．しかし，Drucker-Prager弾塑性体では，表面応力がゼロとなる自由境界を仮定しただけでは，β，$\hat{\mu}$の効果によりき裂面に「開き」や「めり込み」が発生するため，式$(25)_1$のようにき裂面が閉じる条件が必要になる．また，ここで，Drucker-Prager弾塑性体においては，モードII型である事を特性づけるため，次式の境界条件を課す．

$$\bar{\sigma}_r(-\pi)=-2 \quad (26)$$

ここで，$\bar{\sigma}_r(-\pi)$の絶対値を2としたのは，式(19)，式(24)で与えられた連立微分方程式は非線形であるが未知関数に関して1次同次になっているため，ある一組の関数が境界条件を満たした非自明な解であればその関数全てに正の実数倍したものも解であるから，それらの，特に応力の



(a) J 積分経路　　(b) き裂先端近傍の塑性域の拡大図

図−4　J 積分の積分経路

基準値とするためであり，線形等方弾性体との一致を考えたに過ぎない．また，$\bar{u}_r$，$\bar{\sigma}_z$ の $\theta=-\pi$ での境界条件は，$\bar{\sigma}_{r\theta}$，$\bar{\sigma}_r$，$\bar{\sigma}_\theta$ の境界条件を用いて式$(20)_2$に Newton 法を用いて $\bar{\sigma}_z$ が得られ，その結果を式$(20)_1$に代入する事により $\bar{u}_r$ が得られる．以上より未知関数 6 個に対して 6 個の境界条件が得られ，非線形連立微分方程式を解く事ができる．ただし，$\bar{u}_\theta(\pm\pi)=\xi$，$\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi)=\zeta$，および $\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi)=\eta$ が未知境界条件となる境界を $\theta=\pm\pi$ とした 2 点境界値問題である．本論文では，この解析手法として Runge-Kutta-Gill 法と割線法を組み合わせた Shooting 法を用いた[10]．

表−1 に，$h=0.01$ とした場合の未知境界条件の結果を示す．本論文では，未知パラメータを減らすため，および紙面の都合もあり，塑性効果の卓越する $h=0.01$ の場合の結果のみを示す．**表−1** を見て分かるように，き裂面が閉じる条件を課した結果，そのき裂面を閉じるために必要な比較的小さい（特異）表面応力 $\bar{\sigma}_\theta$，$\bar{\sigma}_{r\theta}$ がき裂面に発生している事が分かる．興味深いのは，この値が生じたのは，$\hat{\mu}$ または β が 0 でないために発生したのであり，その両方が 0 となる，von Mises 弾塑性体の場合には，そのような表面応力は 0 である．また，$\hat{\mu}=\beta$ である関連型の場合は，直応力 $\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi)$ のみが発生し，せん断応力 $\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi)$ は 0 である．なお，岩盤や地盤における通常の物質では，$\hat{\mu}\geq\beta$ であるから，以後，その場合に限定して議論する．

(6) 弾塑性応力拡大係数

今，長さの次元を持つ量 L を，

$$\sqrt{L}:=\frac{K_{II}^{p}}{H\sqrt{2\pi}} \tag{27}$$

と定義すると，

$$\boldsymbol{\sigma}'(r,\theta)=\frac{K_{II}^{p}}{\sqrt{2\pi r}}\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\theta) \tag{28}$$

となる．ここに，K_{II}^{p} は「応力×長さ$^{1/2}$」の次元を持つ物理量であり，物体の形状や境界条件によって決まる線形硬化する Drucker-Prager 弾塑性体のモードⅡ型の応力拡大係数である．

今，き裂先端の周りに，き裂の長さに比較し，非常に小さな領域のみが塑性負荷状態にある領域 P が存在するとする（**図−4(a)**）．この時，領域 P の外側の場所では線形等方弾性状態であるとする，いわゆる小規模降伏状態を仮定する．

J 積分は，W をひずみエネルギ，$\mathbf{t}$ を表面応力，$\mathbf{u}$ を変位とすると，次式で定義される経路積分[11]である．

$$J=\int\left(W dy-\mathbf{t}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}ds\right) \tag{29}$$

物体が線形等方弾性体であれば，J 積分は経路独立であり，き裂のひとつの先端を囲む閉経路の J 積分の値は，その経路内の別な閉経路と両閉経路内にあるき裂の上下面を経路にとった積分の値に等しい．一方，付録 (2) で詳述するように，非関連型の Drucker-Prager 弾塑性体である場合には，（関連型でないかぎり）経路独立ではない．そこで，今，特異項のみを考え，**図−4(b)** にある塑性域内の半径 $\varepsilon(>0)$ の円 C を経路とした J 積分を考える．この時の J 積分の値は次式で表せる．

$$J_C=\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}\left(W\cos\theta-\mathbf{t}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right)d\theta=\frac{K_{II}^{p2}}{2\pi H}I \tag{30}$$

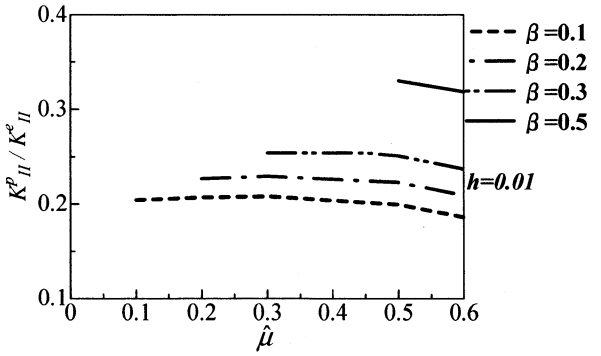
ここで，式(17)より，$W:=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}/2$ であり，I は以下で得られる値である．

$$\begin{aligned}I:=\int_{-\pi}^{\pi}&\bar{W}\cos\theta+2\sin\theta\left(\bar{u}'_r\,\bar{\sigma}_r+\bar{u}'_\theta\,\bar{\sigma}_{r\theta}\right.\\&\left.+\bar{\sigma}_{r\theta}\bar{u}_r-\bar{\sigma}_r\bar{u}_\theta\right)-\left(\bar{\sigma}_r\bar{u}_r+\bar{\sigma}_{r\theta}\bar{u}_\theta\right)\cos\theta\,d\theta\end{aligned} \tag{31}$$

この J_C の値は，円 C が塑性域内にある限り，半径 $\varepsilon(>0)$ の大きさには無関係である．次に，**図−4(a)** にあるように，円 C よりかなり外側の線形等方弾性体の特異性が支配的な円 Γ を経路とする J 積分の値は，

$$J_\Gamma=\frac{\left(1-\nu^2\right)K_{II}^{e2}}{E} \tag{32}$$

である．ここで，上記で仮定した小規模降伏状態であれば，円 Γ 内のほとんどの領域が線形等方弾性体であるから，J



図−5 K_{II}^p / K_{II}^e の変化$(\hat{\mu} \geq \beta)$

積分は，近似的に経路独立であるとみなせ，また，円 C と円Γで挟まれた領域内のき裂上下面のJ積分の値は，弾性体部分では特異項による表面応力が 0 である事を考慮すれば，非常に小さな値となる．実際，後で本論文で使用する範囲での塑性域を考慮したき裂面上下での J の値は，上記のJ等の値に比較して大きくても約7％であった．また，この違いを考慮した事による，下記で定義されるK_{II}^p値の違いは，3%未満であった．

以上の結果より，$J_C \cong J_\Gamma$ であり，結局次式の関係が得られる．

$$K_{II}^p \cong \sqrt{\frac{2\pi h\left(1-\nu^2\right)}{I}} K_{II}^e \qquad (33)$$

ここで，**図−5**に，K_{II}^p / K_{II}^e の，$\hat{\mu} \geq \beta$ における β，$\hat{\mu}$ による変化を示す．**図−5**を見ると分かるように，β に対しては短調増加であるが，$\hat{\mu}$ に対しては，ほぼ単調な減少である．すなわち，内部摩擦係数 $\hat{\mu}$ が大きいと，式(28)で表される特異応力項が均一圧縮応力項に対して相対的に小さくなる．

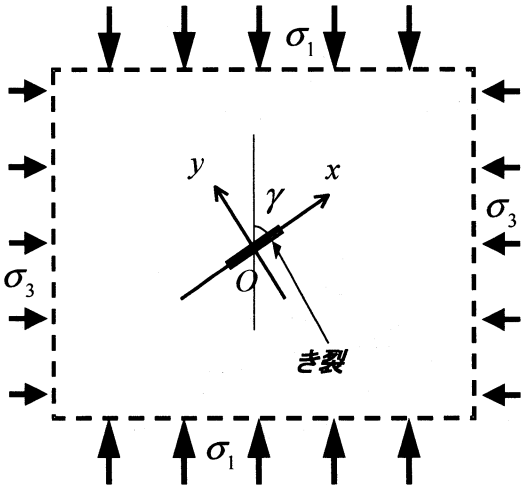
3.3 き裂先端近傍応力場の漸近展開第2項

今，**図−6**に示すように無限板中央に斜めき裂が存在し，その上下から，最大圧縮主応力σ_1，左右から最小圧縮主応力σ_3が作用しているとし，最大圧縮主応力σ_1と，き裂のなす角をγとする．また，**図−2**のような極座標を考えると，極座標表示での漸近展開第2項の均一応力項は下記のように表せる．

$$\begin{aligned}
\sigma_r^\infty(\theta) &= \sigma_x^\infty \cos\theta + \sigma_y^\infty \sin\theta + \sigma_{xy}^\infty \sin 2\theta \\
\sigma_\theta^\infty(\theta) &= \sigma_x^\infty \sin\theta + \sigma_y^\infty \cos\theta - \sigma_{xy}^\infty \sin 2\theta \qquad (34) \\
\sigma_{r\theta}^\infty(\theta) &= (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)\sin\theta\cos\theta + \sigma_{xy}^\infty \cos 2\theta
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\sigma_x^\infty &= \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos(2\gamma) \\
\sigma_y^\infty &= \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos(2\gamma) \qquad (35) \\
\sigma_{xy}^\infty &= \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\sin(2\gamma)
\end{aligned}$$



図−6 解析対象

であり，肩付き∞は無限遠から与えられる応力である．σ_x^∞，σ_y^∞，σ_{xy}^∞ 等は，**図−6**のように，き裂面の方向にx座標，垂直方向にy座標をとった時の無限遠から与えられたx，y成分の応力である．この時，式(33)のK_{II}^eは，

$$K_{II}^e := |\tau|\sqrt{\pi a} \qquad (36)$$

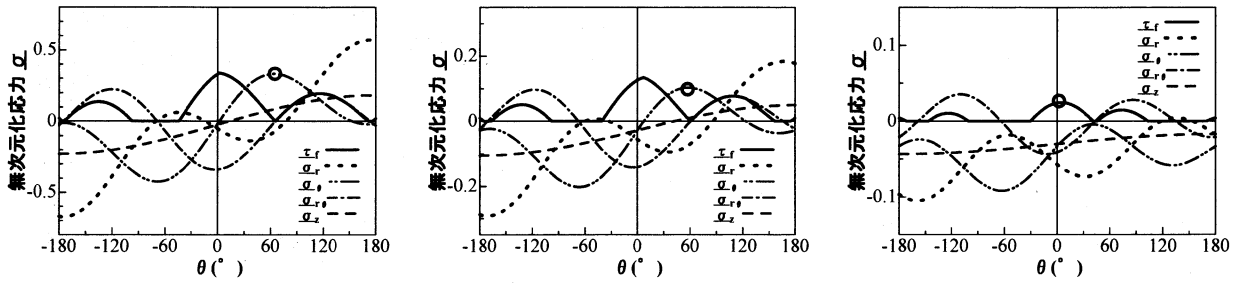
である．ここで，τの絶対値を取ったのは，式(19)，(24)で得られる特異応力に対して負の実数倍をしたものは境界条件を満たした解とはならないためである．aはき裂長さℓの半分である．τは物体境界の境界条件により得られる値であり，き裂面の動摩擦係数をμとすると，以下のように表される．

$$\begin{aligned}
&if \quad \sigma_y^\infty < 0, \quad in\ addition, \left|\sigma_{xy}^\infty\right| + \mu\sigma_y^\infty \geq 0 \\
&then \begin{cases} \tau = \sigma_{xy}^\infty + \mu\sigma_y^\infty \cdots\cdots when\ \sigma_{xy}^\infty > 0 \\ \tau = \sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma_y^\infty \cdots\cdots when\ \sigma_{xy}^\infty < 0 \end{cases}, and \\
&if \quad \sigma_y^\infty \geq 0\ or\ \sigma_y^\infty < 0\ in\ addition, \left|\sigma_{xy}^\infty\right| + \mu\sigma_y^\infty < 0 \qquad (37) \\
&then\ \tau = 0, \\
&and\ the\ closed\ crack\ surface\ does\ not\ slide.
\end{aligned}$$

4．解析結果

本章では，線形硬化する非関連型の Drucker-Prager 弾塑性体のモード II 型におけるき裂先端近傍応力場の漸近展開第2項まで考慮した解析結果，および式(1)に示す摩擦せん断応力の結果を示し，最大摩擦せん断応力破壊基準および最大周応力破壊基準によるき裂進展に関して，非関連型である事に着目し，考察を行なう．

本解析では，ポアソン比を$\nu = 1/3$，最大主応力を$\sigma_1 = -1$Mpa とした．最大主応力とき裂のなす角度$\gamma = 30^\circ (= \pi/6$ ：**図−6**参照)とし，き裂先端からの距離rはき裂長さℓに対し，$r/\ell = 0.001$とした．また，前述したように$h = 0.01$の結果のみを示す．この時，σ_3/σ_1，μ，$\hat{\mu}$，βを変化させた応力分布を示す．解析に用いたパラメータの詳細はそれぞれの図に記す．なお，全ての応力分



(a) $\sigma_3/\sigma_1=0.0$　　(b) $\sigma_3/\sigma_1=0.2$　　(c) $\sigma_3/\sigma_1=0.3$

図−7　弾性体の応力分布（$\hat{\mu}=0.5$，$\mu=0.6$）.

布は，上記パラメータの効果を分かりやすくするため，式(2)の応力を，

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(r,\theta):=\frac{\boldsymbol{\sigma}(r,\theta)}{\left|\sigma_r(r,-\pi)\right|} \tag{38}$$

のように無次元化した応力を記している．ここで，上式右辺の分母は，次式の線形等方弾性体の場合の$\sigma_r(r,-\pi)$の特異項と均一項の和である．

$$\sigma_r(r,-\pi)=\frac{K_{II}^e}{\sqrt{2\pi r}}\bar{\sigma}_r(-\pi)+\sigma_r^{\infty}(-\pi) \tag{39}$$

ここで，K_{II}^eは，式(36)において，1軸圧縮応力で$\mu=0.0$の場合の応力拡大係数である．図中$\underline{\tau}_f$は摩擦せん断応力に対して同様の無次元化を行ったものである．また，横軸は慣例に従い，(°)としている．

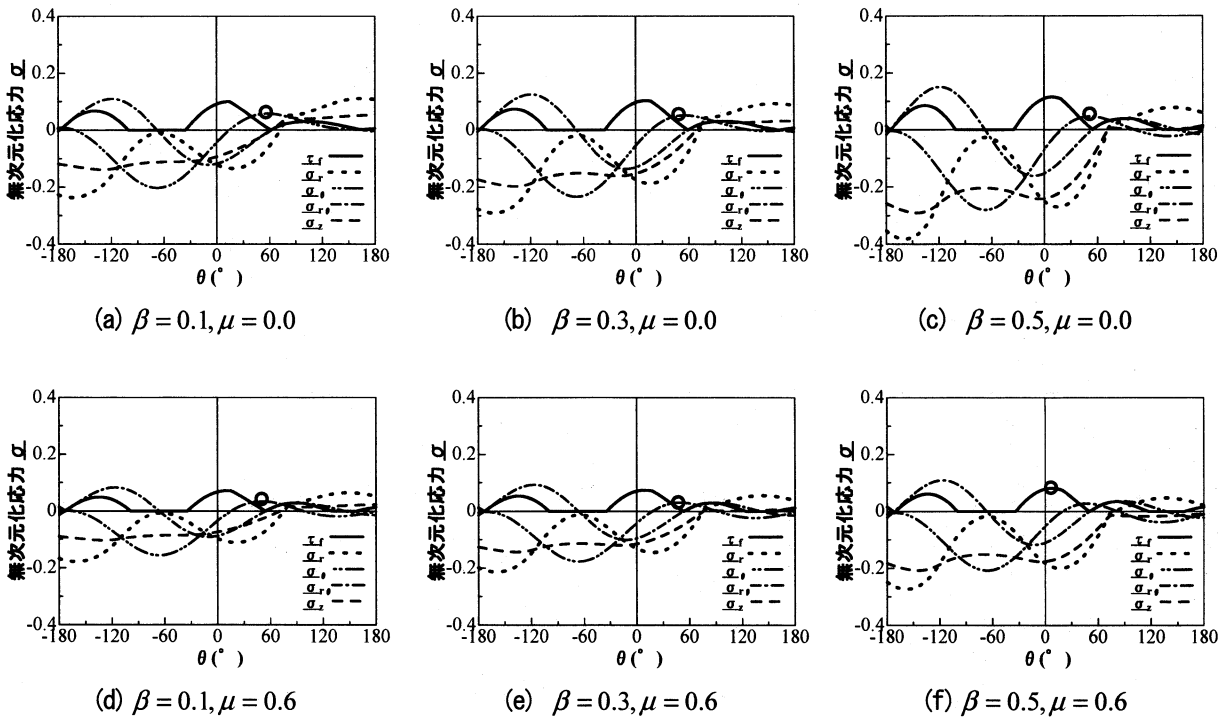
今，比較のために，**図−7**(a)～(c)に$\hat{\mu}=0.5$とし，き裂面の動摩擦係数μを比較的大きい0.6とした場合の，主応力比σ_3/σ_1を変化させた線形等方弾性体での解析結果を示す．この**図−7**をみると，当然の結果であるが，主応力比σ_3/σ_1が増加し，側圧が大きくなると，全ての直応力成分の分布が圧縮側に低下している(ただし，**図−7** (a), (b), (c)では縦軸が異なる事に注意)．(a) σ_3/σ_1=0.0や(b) σ_3/σ_1=0.2の場合は，式(37)より，特異項の大きさを示す応力拡大係数K_{II}^eは，き裂面の動摩擦係数μが大きいほど小さくなるが，主応力差が大きいほど大きいため，この例では，均一圧縮応力項に比べると特異項の影響が大きく，周応力$\underline{\sigma}_\theta$は，摩擦せん断応力の最大値に比べ，約70°付近で，かなり大きい引張応力で最大となっている．したがって，この場合，最大周応力破壊基準により，き裂先端から約70°方向に折れ曲がった引張き裂が発生する．しかし，側圧がさらに大きくなり$\sigma_3/\sigma_1=0.3$となると，応力拡大係数K_{II}^eが小さくなり，特異項に比較し均一圧縮応力項の影響が大きくなるため，最大周応力$\underline{\sigma}_\theta$は圧縮応力となり，摩擦せん断応力の最大値が$\theta\cong 0°$で最大に達している．したがって，この場合，最大摩擦せん断応力破壊基準に従い，き裂はせん断破壊になる．側圧がさらに大きくなり応力比σ_3/σ_1が大きくなると，主応力差が小さくなるため，K_{II}^eが小さくなり，均一圧縮応力項の影響が大きくなるため，最大周応力$\underline{\sigma}_\theta$を含めた直応力は，全て圧縮応力となる．主応力比$\sigma_3/\sigma_1=0.4$の場合（**図−3**参照）は，$K_{II}^e=0$となり，き裂面の滑らない均一圧縮応力場になっている．以上の事から，式(37)より，構成式とは無関係に，主応力比σ_3/σ_1やき裂面の動摩擦係数μが大きくなれば，式(33)の応力拡大係数が小さくなるので，相対的に均一項の影響が大きくなり，また，き裂面の滑り量は小さくなるため，θが60°～70°付近の引張周応力は小さくなる事が分かる．

以上の事を考慮し，Druker-Prager弾塑性体の応力分布の結果は，主応力比の効果の検証のため，**図−8**，**図−9**，**図−10**に，それぞれ，主応力比$\sigma_3/\sigma_1=0.0,0.2,0.4$の場合の結果を示す．また，$\beta=0.1\sim0.5$，$\hat{\mu}=0.1\sim0.6$程度とし，$\hat{\mu}\geq\beta$であるとする．**図−8**では，き裂面の動摩擦係数の効果を検証するために，$\mu=0.0,0.6$として，$\hat{\mu}=0.6$，$\beta=0.1,0.3,0.5$の場合の比較を示す図を記す．**図−9**は，内部摩擦係数の効果を検証するために，$\mu=0.3,0.5$として，$\beta=0.3$，$\hat{\mu}=0.3,0.45,0.6$の場合の比較を示す図を記す．**図−10**の主応力比$\sigma_3/\sigma_1=0.4$の場合は，μが約0.47以上になると均一圧縮応力場になるからμの値を0.2とし，また，$\beta=0.1$，$\hat{\mu}=0.1,0.3,0.6$の結果を示す．なお，以後，分かり易くするため，**図−7**にあるように，周応力$\underline{\sigma}_\theta$が，摩擦せん断応力$\underline{\tau}_f$の最大値に比べ，比較的大きい値で最大となっている角度が存在する場合は，最大周応力破壊基準により，その角度の方向に引張き裂が発生するとし，最大周応力$\underline{\sigma}_{\theta,Max}$を示す点に○を付記する．

一方，最大周応力$\underline{\sigma}_\theta$が摩擦せん断応力$\underline{\tau}_f$に比べ，非常に小さくなり最大摩擦せん断応力破壊基準に従い，き裂がせん断破壊になる場合には，その最大摩擦せん断応力$\underline{\tau}_{f,Max}$を示す点に○を付記する．ただし，この$\underline{\tau}_{f,Max}$が，正確に$\theta=0°$で生じなくても，0に非常に近い値であれば，せん断破壊が生じるとみなす．

図−8 (a)～(f)は，主応力比$\sigma_3/\sigma_1=0.0$である1軸圧縮応力の場合であり，**図−8** (a)～(e)が，最大周応力破壊基準に従う引張破壊となり，**図−8** (f)は最大摩擦せん断応力破壊基準に従うせん断破壊となる．μの応力に与える効果は，**図−8** (a)～(c)と，(d)～(f)を比較すると分かるように応力の絶対値を小さくする．

これは，式(36)で定義される応力拡大係数がμが大きい



図−8 き裂面の動摩擦係数μ，ダイレイタンシー係数βが，応力分布に与える影響($\hat{\mu}=0.6, \sigma_3/\sigma_1=0.0, h=0.01$).

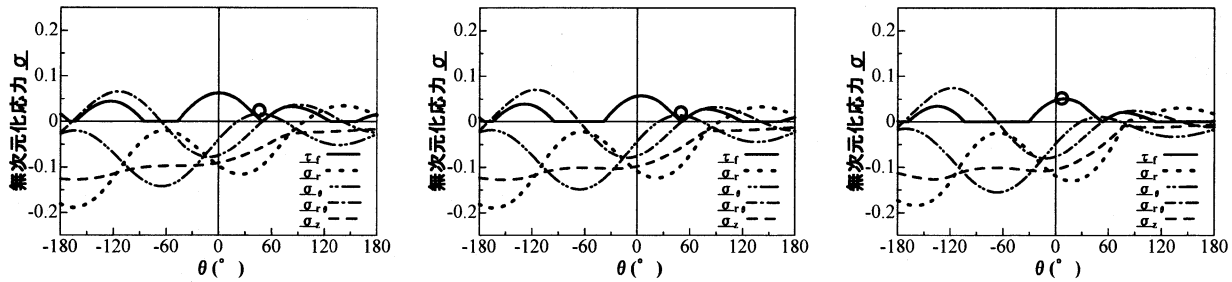
ほど小さくなるためである．また，**図−8** (a)～(c)と，(d)～(f)を見ると，βの増加に伴い，直応力の分布が全体的に圧縮側へと変化している．これは，K_{II}^{p}の値は，βの緩やかな単調増加関数であるが，特異応力の無次元応力$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(r,\theta)$の直応力成分が，き裂先端近傍のせん断応力によるダイレイタンシー効果に伴う体積膨張を抑制するための圧縮応力が発生し，この応力が，特に引張応力であった，全ての直応力成分を圧縮側に下げる効果を与るためである．

上記を踏まえ，**図−9** では，ダイレイタンシーによる応力低下の影響が比較的小さい，$\beta=0.3$の場合に，内部摩擦係数がβより大きい場合を想定し，$\hat{\mu}=0.3, 0.45, 0.6$とした場合の結果を示す．また，この時，き裂面の動摩擦係数を$\mu=0.3, 0.5$とした．**図−9** を見ると，**図−9** (a)～(b)が引張破壊であり，**図−9** (c)～(f)はせん断破壊となる．内部摩擦係数$\hat{\mu}$の応力に与える効果を見ると，$\hat{\mu}$の増加に伴い，き裂面近傍を除き，直応力分布をほぼ全体的に圧縮側へと変化させている．これは，**図−5** に示すように，K_{II}^{p}の値が，$\hat{\mu}$の緩やかなほぼ短調な減少関数となるため，き裂面の動摩擦係数μと同様に，応力拡大係数は低下し，相対的に特異応力項に比較し均一圧縮応力項の影響が大きくなるからである．また，ダイレイタンシー係数が比較的小さい場合においても，内部摩擦係数の大きい材料であれば，せん断破壊が発生するといえる．き裂面近傍では，き裂を閉じたままにするためのき裂面に発生する特異応力は引張応力であり，**表−1** に示すように，$\hat{\mu}$に対して単調増加関数であるため，均一圧縮応力を与える場合，応力拡大係数の緩やかな低下よりも，き裂面に発生するき裂を閉じさすための特異応力の影響の方が大きく，き裂面近傍では，$\hat{\mu}$の増加に伴い直応力$\underline{\sigma}_{\theta}$は，圧縮側ではなく，引張側に変化し，結果として応力の絶対値は低下している．

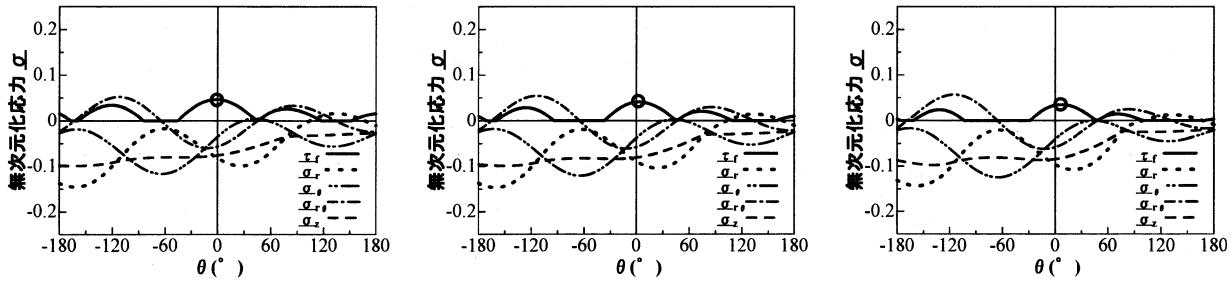
図−10 に，$\beta=0.1$の場合に，$\hat{\mu}=0.1, 0.3, 0.6$とした場合の，き裂面の動摩擦係数μを比較的小さな0.2とし，主応力比σ_3/σ_1を0.4とした結果を示した．線形等方弾性体の例で詳述したように，いずれも直応力$\underline{\sigma}_{\theta}$は圧縮であり，どの場合も最大摩擦せん断応力破壊基準によるせん断破壊となる．この時，全ての場合においてせん断破壊の発生を示している．また，前述したように，約$\mu=0.47$以上にすると，$K_{II}^{p}=0$となり，き裂面は滑らず均一圧縮応力状態となる．

以上の議論では，r/ℓを0.001としたが，r/ℓが大きい場合には自明的に特異応力項に対する均一圧縮応力項の影響は大きくなり，r/ℓが大きいほど，特異項による引張応力が低下し，均一圧縮応力項により応力は圧縮側に変化する．したがって，最大引張周応力基準と同じように，応力による破壊基準を採用する場合には，このr/ℓの大きさは，対象とする物質の特性や構成物質の大きさなどを十分に検討する必要がある．

なお，本論文では，せん断破壊の発生を説明するために，最大摩擦せん断応力破壊基準を用いたが，他に，せん断破壊の発生を説明できそうなものとして，最大せん断応力破壊基準，ないし，K_{II}^{p}最大破壊基準が考えられる．しかしながら，前者は，**図−8～10** をみれば，最大せん断応力は$\theta=0^{\circ}$近傍でない方向でも生じているから，せん断破壊は説明がつかず，K_{II}^{p}最大は，式(36)のK_{II}^{e}最大となり，その場合，き裂面の動摩擦係数μだけで決まる非現実的な方

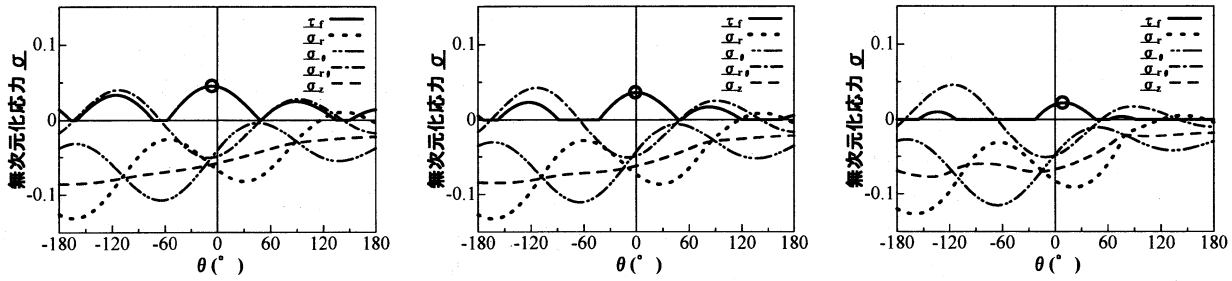


(a) $\hat{\mu}=0.3, \mu=0.3$　(b) $\hat{\mu}=0.45, \mu=0.3$　(c) $\hat{\mu}=0.6, \mu=0.3$



(d) $\hat{\mu}=0.3, \mu=0.5$　(e) $\hat{\mu}=0.45, \mu=0.5$　(f) $\hat{\mu}=0.6, \mu=0.5$

図−9 内部摩擦係数 $\hat{\mu}$ が応力分布に与える影響($\beta=0.3,\ \sigma_3/\sigma_1=0.2,\ h=0.01$).



(a) $\hat{\mu}=0.1$　(b) $\hat{\mu}=0.3$　(c) $\hat{\mu}=0.6$

図−10 主応力比が大きい場合の応力分布($\beta=0.1, \mu=0.2, \sigma_3/\sigma_1=0.4, h=0.01$).

向にき裂が進展する事になり，この基準によっても，せん断破壊は説明がつかない．

5．結論

本論文では，非関連流れ則に従う Drucker-Prager 弾塑性体を用いたモードII型のき裂先端近傍応力場の漸近解析解を求め，最大摩擦せん断応力破壊基準に基づく，せん断破壊について関連型と非関連型の比較および，考察を行った．その結果，以下の知見が得られた．

1）Drucker-Prager 弾塑性体の場合におけるモードII型のき裂先端近傍のき裂面上下には，き裂面を閉じさすための比較的小さな（特異）表面応力 $\bar{\sigma}_\theta$，$\bar{\sigma}_{r\theta}$ がき裂面に発生する事が分かった．興味深いのは，この値が生じたのは，$\hat{\mu}$ または β が 0 でないために発生したのであり，その両方が 0 となる von Mises 弾塑性体の場合には，そのような表面応力は発生しない．また，$\hat{\mu}=\beta$ である関連型の場合は直応力 $\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi)$ のみが発生し，せん断応力 $\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi)$ は発生しない．

2）構成式によらず，σ_3/σ_1，μ が大きくなると応力拡大係数が小さくなり，相対的に均一圧縮応力の影響が大きくなり，引張周応力が小さくなり，引張破壊が抑制され，σ_3/σ_1，μ がそれぞれ適度に大きい場合にはせん断破壊が生じる．

3）β が大きくなると，き裂先端近傍のせん断応力によるダイレイタンシー効果に伴う体積膨張を抑制するための圧縮応力が発生し，この応力が，特に引張応力であった全ての直応力成分を圧縮側に下げる効果となり，引張破壊は抑制されせん断破壊が生じやすくなる．

4）β による応力低下の影響が比較的小さい $\beta=0.3$ の場合でも，$\hat{\mu}$ が大きくなると，塑性の応力拡大係数が小さくなり，相対的に均一圧縮応力の影響が大きくなり，こ

れにより最大引張周応力が小さくなり，引張破壊が抑制され，せん断破壊が生じやすくなる．

付録

（1）係数 B, C, X, Y

$$B_3 = 72\bar{J}_2\sqrt{\bar{J}_2}Q_{r\theta}P_r - 6\left(2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z\right)\bar{\sigma}_{r\theta}\bar{\Lambda} \tag{A1}$$

$$B_4 = 36\bar{J}_2\sqrt{\bar{J}_2}\left(h + Q_r P_r\right) + \left\{12\bar{J}_2 - \left(2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z\right)^2\right\}\bar{\Lambda} \tag{A2}$$

$$B_5 = 36\bar{J}_2\sqrt{\bar{J}_2}\left(Q_\theta P_r - \nu h\right) - \left\{6\bar{J}_2 + \left(2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z\right)\left(2\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z\right)\right\}\bar{\Lambda} \tag{A3}$$

$$B_6 = 36\bar{J}_2\sqrt{\bar{J}_2}\left(Q_z P_r - \nu h\right) - \left\{6\bar{J}_2 + \left(2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z\right)\left(2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta\right)\right\}\bar{\Lambda} \tag{A4}$$

$$C_3 = 72\bar{J}_2\sqrt{\bar{J}_2}Q_{r\theta}P_z - 6\left(2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta\right)\bar{\sigma}_{r\theta}\bar{\Lambda} \tag{A5}$$

$$C_4 = 36\bar{J}_2\sqrt{\bar{J}_2}\left(Q_r P_z - h\nu\right) - \left\{6\bar{J}_2 + \left(2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta\right)\left(2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z\right)\right\}\bar{\Lambda} \tag{A6}$$

$$C_5 = 36\bar{J}_2\sqrt{\bar{J}_2}\left(Q_\theta P_z - h\nu\right) - \left\{6\bar{J}_2 + \left(2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta\right)\left(2\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z\right)\right\}\bar{\Lambda} \tag{A7}$$

$$C_6 = 36\bar{J}_2\sqrt{\bar{J}_2}\left(Q_z P_z + h\right) + \left\{12\bar{J}_2 - \left(2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta\right)^2\right\}\bar{\Lambda} \tag{A8}$$

$$X := 36\bar{J}_2\sqrt{\bar{J}_2}C_6\bar{u}'_r + \left(B_6C_3 - C_6B_3\right)\bar{\sigma}'_{r\theta} + \left(B_6C_5 - B_5C_6\right)\bar{\sigma}'_\theta \tag{A9}$$

$$Y := -36\bar{J}_2\sqrt{\bar{J}_2}C_4\bar{u}'_r + \left(B_3C_4 - B_4C_3\right)\bar{\sigma}'_{r\theta} + \left(B_5C_4 - B_4C_5\right)\bar{\sigma}'_\theta \tag{A10}$$

ここで，$\mathbf{Q}$ は，以下で定義される．

$$Q_r = \frac{2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z}{6\sqrt{\bar{J}_2}} + \frac{\hat{\mu}}{3}, Q_\theta = \frac{2\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z}{6\sqrt{\bar{J}_2}} + \frac{\hat{\mu}}{3}$$
$$Q_z = \frac{2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r}{6\sqrt{\bar{J}_2}} + \frac{\hat{\mu}}{3}, Q_{r\theta} = \frac{\bar{\sigma}_{r\theta}}{2\sqrt{\bar{J}_2}} \tag{A11}$$

（2）J積分の経路独立性

ここでは，非関連流れ則に従う Drucker-Prager 弾塑性体の比例負荷下におけるJ積分が経路独立とならない事を示す．

今，塑性域におけるき裂を含まない二つの経路 Γ_a, Γ_b でのJ積分の差は，二つの経路が囲む領域を A とすると，ガウスの発散定理を用いて，

$$\Delta J = \int_{\Gamma_a - \Gamma_b}\left(Wn_x - \sigma_{ij}n_j\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)ds = \int_A\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x}\right)dA \tag{A12}$$

となる．ここで，n_j は法線ベクトルであり，x は**図−2**の x 軸に相当する．また，

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{kl}}\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x} \tag{A13}$$

であり，今の場合，ひずみが応力の関数であるから，

$$\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{kl}}\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x} \tag{A14}$$

であり，したがって，式(A12)は，次式となる．

$$\Delta J = \int_A\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma_{kl}} - \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}\right)\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x}dA \tag{A15}$$

応力のなす仕事は，式(17)より，

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{A16}$$

であるから．式(12)より，

$$W = \frac{1}{2E}\left\{(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}^2 + \Lambda\sigma_{ij}P_{ij}\right\} \tag{A17}$$

となる．なお，

$$\sigma_{ij}P_{ij} = \sqrt{J_2} - \beta p \tag{A18}$$

であるから，上式および式(13)を用いると，式(A17)は，

$$W = \frac{1}{2E}\left\{(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}^2 + \frac{1}{h}\left(\sqrt{J_2} - \hat{\mu}p\right)\left(\sqrt{J_2} - \beta p\right)\right\} \tag{A19}$$

となり，

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_{kl}} = \varepsilon_{kl}^e + \frac{1}{2H}\left\{\left(\sqrt{J_2} - \hat{\mu}p\right)P_{kl} + \left(\sqrt{J_2} - \beta p\right)Q_{kl}\right\} \tag{A20}$$

が得られる．また，構成式(12)より，

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{1}{2H}\left\{P_{ij}Q_{kl} + \left(\sqrt{J_2} - \hat{\mu}p\right)\frac{2J_2\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij}\right) - S_{ij}S_{kl}}{4J_2\sqrt{J_2}}\right\} \tag{A21}$$

である．したがって，

$$\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{kl}} = \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{1}{H}\left(\sqrt{J_2} - \beta p\right)Q_{kl} \tag{A22}$$

となる．上式右辺第一項はε_{kl}^{e}であるから，

$$\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma_{kl}}=\varepsilon_{kl}^{e}+\frac{1}{H}\left(\sqrt{J_2}-\beta p\right)Q_{kl} \qquad \text{(A23)}$$

となる．結局，式(A15)は，次式で表せ，$\beta=\hat{\mu}$の関連型でなければ，J積分は経路独立ではない事が分かる．

$$\Delta J=\frac{(\beta-\hat{\mu})}{2H}\int_A\left(p\frac{\partial\sqrt{J_2}}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}\sqrt{J_2}\right)dA \qquad \text{(A24)}$$

参考文献

1) S.N.Nasser, and H.Horii : Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation, and rockburst, *Journal of Geophysical Research*, vol.87,pp.6805-6821,1982.
2) C.H.Scholz: The mechanics of earthquakes and faulting, *Cambridge University Press*, pp.1- 461,1991.
3) S.Melin: When does a crack grow under mode II conditions? , *International journal of fracture*, Vol.30, pp.103-114, 1986.
4) 矢富盟祥，鱸洋一：圧縮荷重下にある進展き裂のE積分によるエネルギ解放率の有限要素解析,土木学会論文集,No.612/I-46,pp.251-263,1999.
5) 鱸洋一，大熊俊明，矢富盟祥：圧縮荷重下にある地盤材料内の亀裂進展開始に対する最大せん断摩擦応力破壊規準の検討,応用力学論文集,Vol.10,pp.331-342 ,2007.
6) 新保泰輝，矢富盟祥：Drucker-Prager 弾塑性体のモードII型き裂先端近傍特異場の漸近解析,材料, 2008 (印刷中).
7) A.A.Griffith: The theory of rupture, *In:Proceedings of the First International Congress on Applied Mechanics*, Delft, pp.55–63, 1924.
8) J.C.Jaeger and N.G.W.Cook: Fundamentals of rock mechanics, *Methuen & Co LTD* , pp.267-269,1969.
9) J.W.Rudnicki and J.R.Rice: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol.23, pp.371-394, 1975.
10) W.H.Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery: Numerical recipes in C, *Cambrige University Press*, pp.757-759, 1988.
11) J.R.Rice: A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.35, pp.379-386,1968.

(2008 年 4 月 14 日　受付)