

HPMによる薄板の離散化極限解析

Discrete Limit Analysis for Thin Plate by using Hybrid-type Penalty Method

田尻康之*・見原理一*・竹内則雄**

Yasuyuki TAJIRI, Riichi MIHARA and Norio TAKEUCHI

* 工修 法政大学大学院 システムデザイン研究科 (〒102-8160 東京都千代田区富士見2-17-1)

** 正会員 工博 法政大学教授 理工学部機械工学科 (〒184-8584 東京都小金井市梶野町3-7-2)

In this paper, we have given the investigations of the thin plate bending problem by using hybrid-type penalty method (HPM). We apply Kirchhoff theory to the displacement field of the 3D case of HPM. For this purpose, we use quadratic form of the displacements which parameters are independently defined in each subdomain. We introduce penalty function that presents strong spring connecting each subdomain. We apply nonlinearity in penalty function such as spring system, which allow us to calculate hinge line. If hinge line makes mechanism then we can calculate limit load. We can calculate growing hinge line systematically using r-min method for the nonlinear analysis. In the first part of the paper, we have given brief formulation of proposed method, and in second part, we have given some numerical results to check accuracy of elastic solution and limit load.

Key Words: thin plate, hybrid method, penalty method, limit analysis,

1. はじめに

離散化極限解析用のモデルである剛体ばねモデル (RBSM: Rigid Bodies Spring Model) の板曲げ要素は、一般的な三次要素の特別な場合として誘導することができる¹⁾。この板曲げ要素の自由度は、たわみと x , y 軸回りの剛体回転の3自由度で、要素間に設けられたばねに非線形特性を持たせることで、コンクリートのような脆性材料における離散化ひび割れモデルを表現できるとともに、容易に離散化極限解析を行うことができる。しかし、要素を剛体と仮定し、要素間に設けられたばねにエネルギーを集中化させるため、弾性解の精度が若干低く、ポアソン比の影響も受けやすい¹⁾。

有限要素では、Poisson-Kirchhoffの板曲げ理論に従う板曲げ問題において適合要素を用いる場合、 C^1 連続まで考慮する必要がある。しかし、こういった要素は少ない。最近、固体力学の分野においても利用されるようになってきた不連続 Galerkin (dG: discontinuous Galerkin) 法^{2) 3) 4)}では、 C^0 要素を使用し、弱いこの配の連続性を果たしている。すなわち、dG法では、要素間で近似関数の連続性を果たす代わりに、法線方向の導関数におけるジャンプをペナルティ関数により拘束し C^1 連続性を弱く果たしている。

ペナルティ法は、ディリクレ境界条件をペナルティ関数により近似的に満たすようにする方法で、適切なペナルティパラメータにより、得られた解はユニークで本来

の解に収束する。このペナルティ関数に関する考え方を要素間の変位のジャンプに適用することで、要素間の弱い連続性を満たすことができる⁵⁾。これはdG法の一つで、interior penalty (IP) FEMと呼ばれている。dG法では、このように、要素間の連続性に対する要求を緩めることで、内部境界で不連続な区分多項式の空間を使うことが可能になる。

一方、著者らは、要素境界边上での変位の連続性に関する付帯条件をLagrangeの未定乗数によって変分表示に導入するハイブリッド型の変分原理⁶⁾に着目し、Lagrangeの未定乗数にばねの考え方を導入、ばね定数としてペナルティ関数を用いるハイブリッド型ペナルティ法 (HPM: Hybrid-type Penalty Method) を開発した⁷⁾。HPMもdG法と同様、要素毎に独立な変位場を用い、要素境界上での変位のジャンプをペナルティ関数で拘束し、要素間で弱い連続性を果たしている。そういった意味でIP FEMと同様な手法を利用していることになる。

いま、このHPMにおける三次元の2次変位場⁸⁾にKirchhoff-Loveの板理論を適用すれば、薄板の曲げ要素を開発できる。また、ペナルティ関数をRBSMにおける硬いばねと考えれば、RBSMと同様な、離散化極限解析が可能となる。

本論文では、上述の板理論を適用したHPMにおける板曲げ要素とそれを用いた離散化極限解析法を提案し、簡単な数値計算例によって弾性解や極限荷重の精度を検証する。

2. 基礎方程式とハイブリッド型仮想仕事式

2次元平面応力(ひずみ)問題や3次元問題に対するハイブリッド型ペナルティ法は、一般的なハイブリッド型の仮想仕事式を基礎としており、要素毎に独立な変位場を仮定して離散化を行う。本論文は、この考え方が薄板の変位場を用いた場合にも成立するであろうという観点から、三次元の2次変位場に Kirchhoff-Love の板理論を適用し具体的に離散化を行って、得られる解の精度を検証しようとするものである。したがって、弾性問題の基礎方程式や、ハイブリッド型の仮想仕事の原理は、2次元、3次元問題の場合と全く変わるところがない。これらの詳細は文献[6][7]にゆずり、ここでは、本論文で用いる記号の説明のため最低限の関係を整理しておく。

いま、3次元問題に対する平行方程式は、 f を物体力、 σ を Cauchy 応力として以下のように表される。

$$\operatorname{div} \sigma + f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma = \sigma^t \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 Ω は3次元ユークリッド空間の有界領域で、その境界において以下の条件を満たすものとする。

$$u|_{\Gamma_u} = \hat{u} \quad (\text{given}) \quad (3)$$

$$\sigma|_{\Gamma_\sigma} \hat{n} = \hat{t} \quad (\text{given}) \quad (4)$$

Γ_u は変位が与えられる境界、 Γ_σ は表面力が与えられる境界で、上付きの $\hat{\cdot}$ は、与えられた量であることを示している。ただし、外向き法線ベクトルが \mathbf{n} で表される物体表面の表面力を $\mathbf{t} := \sigma \mathbf{n}$ と定義する

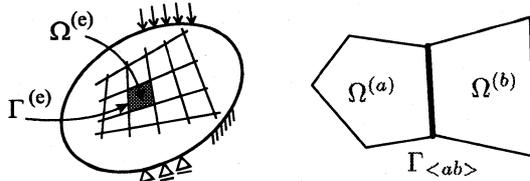
いま、この領域内における変位場を簡単に \mathbf{u} とするとき、微小ひずみは次のように定義される。

$$\varepsilon = \nabla^s \mathbf{u} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] \quad (5)$$

ここで、 $\nabla := (\partial/\partial x_i) \mathbf{e}_i$ は微分作用素であり、 ∇^s は ∇ の対称部分を表している。弾性体に対する構成方程式は、式(5)のひずみと弾性テンソル \mathbf{C} を用いて次のように表される。

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon \quad (6)$$

いま、図-1(a)に示すように領域 Ω が M 個の部分領域 $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ から構成されているものとする。



(a) 部分領域 $\Omega^{(e)}$ (b) 共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$

図-1 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ と共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$

ハイブリッド型の仮想仕事の原理では、図-1(b)に示すように、隣接する2つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ における変位、 $\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}$ ならびに $\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}$ が

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (7)$$

であるという付帯条件を Lagrange の未定乗数 λ を用いて、

$$H_{ab} \stackrel{\text{def.}}{=} \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \lambda \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) dS \quad (8)$$

と表し、仮想仕事式に導入することで以下のように得られる。

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \sigma : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS \right) - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \lambda \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) dS \right) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad (9)$$

ここで、 $\delta(\bullet)$ は (\bullet) の変分量を表している。また、 N は隣接する2つの部分領域境界辺の数である。なお、Lagrange の未定乗数 λ は、 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の表面力を意味している⁹⁾。

3. HPM の板曲げモデルの定式化

3.1 薄板の変位場

いま、三次元の変位場において、ある領域 $\Omega^{(e)}$ に着目し、変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を点 $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \Omega^{(e)}$ についてテーラー展開すると2次の変位場は以下ようになる。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} + \mathbf{N}_{gx}^{(e)} \varepsilon_x^{(e)} + \mathbf{N}_{gy}^{(e)} \varepsilon_y^{(e)} + \mathbf{N}_{gz}^{(e)} \varepsilon_z^{(e)} \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{d}^{(e)} = [u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z]^t$ は部分領域内の点 \mathbf{x}_1 における剛体変位と剛体回転であり、 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^t$ は同点のひずみ、 $\varepsilon_x^{(e)}, \varepsilon_y^{(e)}, \varepsilon_z^{(e)}$ は、それぞれ、ひずみの x, y, z による微分を表している。このとき、任意点の z 方向のたわみは、

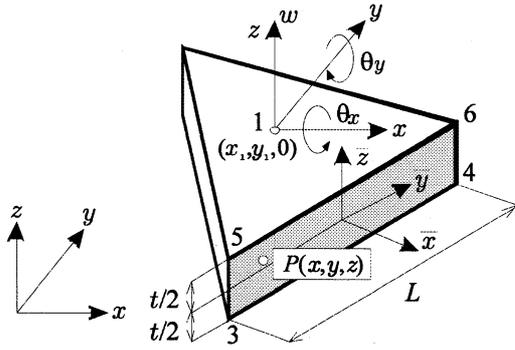
$$\begin{aligned} w = & w_1 + Y\theta_x - X\theta_y + Z\varepsilon_z + \frac{1}{2}Y\gamma_{yz} + \frac{1}{2}X\gamma_{zx} \\ & + ZX\varepsilon_{z,x} + \frac{1}{2}XY\gamma_{yz,x} + \frac{1}{2}X^2\gamma_{zx,x} \\ & + YZ\varepsilon_{z,y} + \frac{1}{2}Y^2\gamma_{yz,y} + \frac{1}{2}XY\gamma_{zx,y} \\ & - \frac{1}{2}X^2\varepsilon_{x,z} - \frac{1}{2}Y^2\varepsilon_{y,z} + \frac{1}{2}Z^2\varepsilon_{z,z} - \frac{1}{2}XY\gamma_{xy,z} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$, $Z = z - z_1$ である。

いま、一般的な三次元領域を図-2に示すような薄板の状態とし、以下の Kirchhoff-Love の仮定を式(12)に適用する。

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (12)$$

このとき、たわみは以下のように表すことができる。



$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in R^3 | z \in [-t/2, t/2], (x, y) \in A \in R^2\}$$

図-2 薄板と座標系

$$w = w_1 + Y\theta_x - X\theta_y - \frac{1}{2}X^2\varepsilon_{x,z} - \frac{1}{2}Y^2\varepsilon_{y,z} - \frac{1}{2}XY\gamma_{xy,z} \quad (13)$$

このたわみを用いると、薄板内の任意点における変位は、

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w = w \quad (14)$$

で表されるので、部分領域 $\Omega^{(e)}$ における変位 $\mathbf{u}^{(e)} = [u, v, w]^t$ は点 \mathbf{x}_1 における剛体変位と剛体回転、ひずみの勾配を用いて以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(e)} &= \mathbf{Z} \left(\mathbf{N}_{Z_d}^{(e)} \mathbf{d}_Z^{(e)} + \mathbf{N}_{Z_g}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_Z^{(e)} \right) \\ &= \mathbf{Z} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、それぞれの係数は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_Z^{(e)} &= [w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}]^t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_Z^{(e)} = [\varepsilon_{x,z}, \varepsilon_{y,z}, \gamma_{xy,z}]^t \\ \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_{Z_d}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & Y & -X \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_{Z_g}^{(e)} &= \begin{bmatrix} X & 0 & Y/2 \\ 0 & Y & X/2 \\ -X^2/2 & -Y^2/2 & -XY/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}^{(e)} = [\mathbf{N}_{Z_d}^{(e)}, \mathbf{N}_{Z_g}^{(e)}]^t, \quad \mathbf{U}^{(e)} = [\mathbf{d}_Z^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}_Z^{(e)}]^t$$

このように、本論文で用いる変位場は、領域内における任意点のたわみと剛体回転に加え、ひずみの z 方向に対する勾配を自由度として扱う。また、二次元、三次元のHPMと同様に、板曲げ問題においても各領域内の任意点におけるパラメータを用いて変位場を表しているため、自由度を要素頂点にも設定するような従来の変位型FEMの要素とは異なり、頂点において変位を共有しない。すなわち、本モデルにおける頂点は領域形状を認識するために用いるのであって、従来の変位型FEMのように頂点は形状関数に支配されない。したがって、部分領域の形状は特に限定されず、任意の多角形平板を部分領域として用いることができる。

ただし、変位に関する境界条件に関しては、3次元HPMと同様、ペナルティ関数を用いて、節点あるいは辺を拘束するか⁹⁾、境界用の要素を設けてその自由度を拘束する¹⁾。本論文では、前者のペナルティ関数による方法を用いた。

3.2 薄板のひずみと構成関係

式(14)の関係から、薄板の場合、ひずみに関して以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

また、 $\sigma_z = 0$ として、 ε_z を消去すれば、

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = z \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (16)$$

ここで、

$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき、構成行列は以下ようになる。

$$\mathbf{D}^{(e)} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、 E は弾性係数、 ν はポアソン比であり、式(6)の関係を用いて行列で表すと以下ようになる。

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (18)$$

4. 離散化方程式

4.1 仮想仕事式の離散化

離散化方程式の誘導にあたり、式(9)のハイブリッド型仮想仕事式の仮想仕事式部分は以下のように表される。

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS \right) = 0 \quad (19)$$

このとき、式(16)(18)より、第1項を離散化すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dV &= \int_{\Omega^{(e)}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \mathbf{D}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \, dV \\
&= (\delta U^{(e)})^t \int_{\Omega_{xy}^{(e)}} {}^t \mathbf{B}^{(e)} \left(\int_{-t/2}^{t/2} z^2 \mathbf{D}^{(e)} \, dz \right) \mathbf{B}^{(e)} \, dAU^{(e)} \\
&= (\delta U^{(e)})^t \int_{\Omega_{xy}^{(e)}} {}^t \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \, dAU^{(e)} \quad (20)
\end{aligned}$$

ここで、 $\Omega_{xy}^{(e)}$ は図-2に示すように、部分領域(e)の x - y 平面を表しており、 $\mathbf{k}^{(e)}$ は以下のとおりである。

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \mathbf{D}^{(e)} \, dz = \frac{t^3}{12} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

一方、第2項、3項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS \\
= (\delta U^{(e)})^t \left(\int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{Z} \mathbf{f} \, dV + \int_{\Gamma^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{Z} \mathbf{t} \, dS \right) \quad (21)
\end{aligned}$$

4.2 部分領域境界での相対変位

いま、図-2に示す座標系に関して、式(15)で表される変位 $\mathbf{u}^{(e)}$ の変換を行うと以下のようになる。

$$\bar{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{R}_{<s>}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad (22)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{u}}^{(e)}$ は局所座標系の変位を表しており、 $\mathbf{R}_{<s>}^{(e)}$ は部分領域(e)の境界辺<s>における座標変換行列で

$$\mathbf{R}_{<s>}^{(e)} = \begin{bmatrix} l_{<s>}^{(e)} & m_{<s>}^{(e)} & 0 \\ -m_{<s>}^{(e)} & l_{<s>}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{<s>}^{(e)} &= \frac{y_{43}}{L_{<s>}} \\ m_{<s>}^{(e)} &= -\frac{x_{43}}{L_{<s>}} \\ L_{<s>} &= \sqrt{x_{43}^2 + y_{43}^2} \\ x_{ij} &= x_i - x_j \\ y_{ij} &= y_i - y_j \end{aligned}$$

である。いま、

$$-\mathbf{R}_{<ab>}^{(a)} = \mathbf{R}_{<ab>}^{(b)} \quad (23)$$

なる関係があるので、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の境界 $\Gamma_{<ab>}$ における相対変位が以下のよう求められる。

$$\delta_{<ab>} = \sum_{l=1}^2 \mathbf{R}_{<ab>}^{(l)} \mathbf{u}_{<ab>}^{(l)} = \mathbf{Z} \mathbf{B}_{<ab>} \mathbf{U}_{<ab>} \quad (24)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{<ab>} &= [\mathbf{R}_{<ab>}^{(a)} \mathbf{N}^{(a)}, \mathbf{R}_{<ab>}^{(b)} \mathbf{N}^{(b)}]^t \\ \mathbf{U}_{<ab>} &= [\mathbf{U}^{(a)}, \mathbf{U}^{(b)}]^t \end{aligned}$$

4.3 Lagrangeの未定乗数とペナルティ法

2章の終わりで述べたように、Lagrangeの未定乗数は、物理的には表面力を意味している。ハイブリッド型変分

原理を用いる手法では、この未定乗数も未知数として取り扱う方法が一般的である^{6),10)}。

一方、著者らが提案したハイブリッド型ペナルティ法では、Lagrangeの未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ が表面力に対応するという物理的意味を考慮して、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力を式(24)で与えられる相対変位 $\delta_{<ab>}$ を用いて以下のように表す⁷⁾⁻⁹⁾。

$$\boldsymbol{\lambda}_{<ab>} = \mathbf{k} \cdot \delta_{<ab>} \quad (25)$$

これは、三次元問題の場合、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}<ab>} \\ \lambda_{\bar{y}<ab>} \\ \lambda_{\bar{z}<ab>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & k_{\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{\bar{x}<ab>} \\ \delta_{\bar{y}<ab>} \\ \delta_{\bar{z}<ab>} \end{bmatrix} \quad (26)$$

ここで、 $\delta_{\bar{x}<ab>}$ 、 $\delta_{\bar{y}<ab>}$ 、 $\delta_{\bar{z}<ab>}$ は図-2に示す領域境界 $\Gamma_{<ab>}$ の局所座標系に対する相対変位で、同様に、 $\lambda_{\bar{x}<ab>}$ 、 $\lambda_{\bar{y}<ab>}$ 、 $\lambda_{\bar{z}<ab>}$ は、対応するLagrangeの未定乗数、すなわち表面力である。ハイブリッド型ペナルティ法では、この係数 \mathbf{k} としてペナルティ関数 p を用い、以下のように表す⁹⁾。

$$k_{\bar{x}} = k_{\bar{y}} = k_{\bar{z}} = p \quad (27)$$

4.4 付帯条件の離散化

付帯条件の離散化をおこなうにあたり、式(7)で示した付帯条件を、式(22)の関係を用いて部分領域境界面に沿った局所座標系の成分に変換する。

$$\mathbf{R}_{<ab>} \mathbf{u}_{<ab>}^{(a)} = \mathbf{R}_{<ab>} \mathbf{u}_{<ab>}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{<ab>} \quad (28)$$

ここで、 $\mathbf{R}_{<ab>}$ は全体座標系から局所座標系への座標変換行列で、式(23)との間に次の関係がある。

$$\mathbf{R}_{<ab>} = -\mathbf{R}_{<ab>}^{(a)} = \mathbf{R}_{<ab>}^{(b)} \quad (29)$$

このとき、式(8)は、式(28)(29)の関係を用いて次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} H_{ab} &= \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \boldsymbol{\lambda}_{<ab>}^t \mathbf{R}_{<ab>} (\mathbf{u}_{<ab>}^{(a)} - \mathbf{u}_{<ab>}^{(b)}) \, dS \\ &= -\sum_{l=1}^2 \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \boldsymbol{\lambda}_{<ab>}^t \mathbf{R}_{<ab>}^{(l)} \mathbf{u}_{<ab>}^{(l)} \, dS \end{aligned} \quad (30)$$

式(30)において、式(24)の関係を用いるなら

$$H_{ab} = -\delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \boldsymbol{\lambda}_{<ab>}^t \delta_{<ab>} \, dS \quad (31)$$

さらに、式(25)の関係を代入すると以下のようになる。

$$H_{ab} = -\delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \delta_{<ab>}^t \cdot \mathbf{k} \cdot \delta_{<ab>} \, dS \quad (32)$$

これに式(24)の関係を用いれば、付帯条件に関する式は以下のようになる。

$$H_{ab} = -\delta U_{<ab>}^t \int_{\Gamma_{<ab>}} \mathbf{B}_{<ab>}^t \mathbf{k}_{<ab>} \mathbf{B}_{<ab>} ds \mathbf{U}_{<ab>} \quad (33)$$

ここで、 $\mathbf{k}_{<ab>}$ は、

$$\mathbf{k}_{<ab>} = \mathbf{Z}^t \mathbf{k} \mathbf{Z} \quad (34)$$

である。いま、薄板の場合、式(33)における積分の積分範囲を板厚方向($-t/2 \leq z \leq t/2$)に対する積分と面内方向(x - y 平面)に分けて考え、

$$\int_{\Gamma_{xy<ab>}} \mathbf{B}_{<ab>}^t \left(\int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{k}_{<ab>} dz \right) \mathbf{B}_{<ab>} ds \quad (35)$$

とする。ただし、 Γ_{xy} は、 x - y 平面における境界を表している。式(35)におけるカッコ内の板厚方向の積分は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_{<s>} &= \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{k}_{<s>} dz = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{Z}^t \mathbf{k} \mathbf{Z} dz \\ &= \begin{bmatrix} \frac{t^3}{12} k_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^3}{12} k_y & 0 \\ 0 & 0 & tk_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

以上より、付帯条件式(8)は以下のようになる。

$$H_{ab} = -\delta U_{<ab>}^t \int_{\Gamma_{xy<ab>}} \mathbf{B}_{<ab>}^t \bar{\mathbf{k}}_{<ab>} \mathbf{B}_{<ab>} ds \mathbf{U}_{<ab>} \quad (37)$$

4.5 離散化方程式の誘導

いま、全部分領域における自由度を並べた1次元配列を \mathbf{U} とすると、各部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する自由度 $\mathbf{U}^{(e)}$ は、以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \mathbf{U} \quad (38)$$

ここで、 $\mathbf{A}^{(e)}$ は、全部分領域における自由度と着目部分領域における自由度を関係付ける行列である。同様にして、仮想変位についても以下のように表す。

$$\delta \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \delta \mathbf{U} \quad (39)$$

この関係を式(20)(21)に代入すると仮想仕事式(19)は、以下のようになる。

$$\delta U^t \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} \right) \mathbf{U} - \delta U^t \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \right) = 0 \quad (40)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{(e)}$ 、 $\mathbf{P}^{(e)}$ は、それぞれ以下のとおりである。

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathbf{A}^{(e)})^t \int_{\Omega_{xy}^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dA \mathbf{A}^{(e)}$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = (\mathbf{A}^{(e)})^t \left(\int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{Z} \mathbf{f} dV + \int_{\Gamma^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{Z} \mathbf{t} dS \right)$$

一方、部分領域境界面 $\Gamma_{<ab>}$ に関する自由度 $\mathbf{U}_{<ab>}$ は、全部分領域における自由度と着目部分領域境界面に関係する自由度を関係付ける行列 $\mathbf{M}_{<ab>}$ を用いて以下

のように関係付けられる。

$$\mathbf{U}_{<ab>} = \mathbf{M}_{<ab>} \mathbf{U} \quad (41)$$

同様にして、仮想の相対変位についても、

$$\delta \mathbf{U}_{<ab>} = \mathbf{M}_{<ab>} \delta \mathbf{U} \quad (42)$$

とする。これらの関係を用いると、 s 番目の境界 $\Gamma_{<s>}$ に関する付帯条件式(37)は以下のように書くことができる。

$$H_{ab} = -\delta U^t \left(\sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{<s>} \right) \mathbf{U} \quad (43)$$

ただし、

$$\mathbf{K}_{<s>} = \mathbf{M}_{<s>}^t \int_{\Gamma_{xy<s>}} \mathbf{B}_{<s>}^t \bar{\mathbf{k}}_{<s>} \mathbf{B}_{<s>} ds \mathbf{M}_{<s>}$$

以上のようにして求めた式(40)(43)より、式(9)のハイブリッド型仮想仕事式は以下のように離散化される。

$$\delta U^t \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{<s>} \right) \mathbf{U} - \delta U^t \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \right) = 0 \quad (44)$$

ここで、仮想変位 $\delta \mathbf{U}$ は任意であるため、最終的に以下の離散化方程式が得られる。

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (45)$$

ただし、 \mathbf{K} および \mathbf{P} は以下のとおりである。

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{<s>} \quad (46)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \quad (47)$$

このように、HPMにおける薄板モデルの離散化方程式は、式(45)に示す連立1次方程式に帰着し、左辺の係数行列 \mathbf{K} は、各部分領域の剛性と部分領域境界面に関する付帯条件の関係を組み合わせることによって得られる。

5. 非線形解析法

5.1 部分領域境界面上の物理量

式(14)の関係を用いると、部分領域内の変位は

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\theta}^{(e)} \quad (48)$$

と表すことができる。ここで、 $\boldsymbol{\theta}^{(e)} = [\theta_y, \theta_x, w]^t$ であり、 θ_x, θ_y は、それぞれ、 x 軸、 y 軸周りの回転成分である。この関係を用いると、式(24)で表される相対変位は

$$\delta_{<ab>} = \mathbf{Z} \sum_{l=1}^2 \mathbf{R}_{<ab>}^{(l)} \boldsymbol{\theta}_{<ab>}^{(l)} = \mathbf{Z} \delta \boldsymbol{\theta}_{n<ab>} \quad (49)$$

となる。ここで、 $\delta \boldsymbol{\theta}_n^{(e)} = [\delta \theta_x, \delta \theta_y, \delta w]^t$ であり、それぞれ、 \bar{x}, \bar{y} 回りの相対回転成分、すなわち、ねじりと曲げに関する回転角と相対たわみを表している。

一方、式(31)の付帯条件の関係は、式(49)を用いることで次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} H_{ab} &= -\delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \mathbf{Z}\lambda_{<ab>}^t \delta\theta_{n<ab>} ds \\ &= -\delta \int_{\Gamma_{xy<ab>}} \int_{-t/2}^{t/2} (\mathbf{Z}\lambda_{<ab>}^t) dz \delta\theta_{n<ab>} ds \end{aligned} \quad (50)$$

ここで、

$$\mathbf{M}_{<ab>} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{Z}\lambda_{<ab>}^t dz \quad (51)$$

であり、 $\mathbf{M}_{<ab>} = [M_{\bar{x}}, M_{\bar{y}}, Q]^t$ は、それぞれ、ねじりモーメント、曲げモーメント、せん断力に該当する。この結果、式(50)は、

$$H_{ab} = -\delta \int_{\Gamma_{xy<ab>}} \mathbf{M}_{<ab>}^t \delta\theta_{n<ab>} ds \quad (52)$$

となる。この式は、部分領域境界上の、ねじりモーメント、曲げモーメント、せん断力の仕事を表している。すなわち、本モデルでは、部分領域境界上の表面力として、ねじりモーメント、曲げモーメント、せん断力の3つを扱っていることになる。

5.2 薄板の破壊規準と構成式

5.1節で述べたように、本モデルでは、部分領域境界面上において、曲げモーメント、ねじりモーメント、せん断力を扱うため、境界面の破壊を表現するための破壊条件もこれらの物理量を用いて表す必要がある。ここでは、以下のような2次形式の破壊規準を仮定して、本モデルによる離散化極限解析の手法を述べる。

$$f(\mathbf{M}) = \left(\frac{M_J}{M_{PJ}}\right)^2 + \left(\frac{Q}{Q_y}\right)^2 + \left(\frac{M_n}{M_{Pn}}\right)^2 - 1 \quad (53)$$

ここで、 M_{PJ} は全塑性ねじりモーメント、 Q_y は全塑性せん断力、 M_{Pn} は全塑性曲げモーメントである。このとき、破壊条件は、以下の式で与えられる。

$$f(\mathbf{M}) = 0 \quad (54)$$

いま、降伏関数と塑性ポテンシャルを等しいとする関連流れ則に従えば、塑性理論より増分表面力と増分相対変位の関係が以下のように得られる¹⁾。

$$\Delta\mathbf{M} = \left(\mathbf{K}^e - \frac{\mathbf{K}^e \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} \mathbf{K}^e}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} \mathbf{K}^e \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}} \right) \Delta\delta \quad (55)$$

なお、除荷については塑性仕事から求めるべきであるが、ここで便宜上次の式を用いて判定する。

$$\mu < 0, \quad \mu = \frac{\mathbf{K}^e \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} \mathbf{K}^e \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}} \Delta\delta \quad (56)$$

5.3 荷重増分法による材料非線形解析

FEMの非線形解析法として、荷重増分法における r_{\min} 法がある。この方法は、最も降伏しやすい要素を見つけ、そこが降伏するために必要な荷重増分率を自動的に計算から求め、順次その要素を降伏させながら解析する手法である。この方法は、順次破壊の進展を追跡することができる⁹⁾。本論文では、曲げによるヒンジ線の進展を解析するため、この方法を非線形解析として適用する。

いま、降伏関数を f 、現在の部分領域境界に働いている表面力を \mathbf{M} 、増分表面力を $\Delta\mathbf{M}$ とすると、次式を満たすような r が存在する。

$$f(\mathbf{M} + r\Delta\mathbf{M}) = 0 \quad (57)$$

ここで、簡単のため、式(53)に示す破壊規準において全塑性曲げモーメントのみを考慮すれば、式(57)は、次のようになる。

$$\left(\frac{M_n + r\Delta M_n}{M_{Pn}}\right)^2 - 1 = 0 \quad (58)$$

これを解けば、負号を考慮し以下の関係が得られる。

$$r = \frac{M_{Pn} - M_n}{\Delta M_n} \quad (59)$$

この r は荷重増分率と呼ばれており、全てのヒンジを形成していない部分領域境界面上の表面力についてこの r を求める。

このようにして求めた増分率のうち、最小のものを今回の荷重増分率とする。このとき、現在の値と増分後の値を、それぞれ、 n と $n+1$ を付けて表すと、

$$\mathbf{M}^{n+1} = \mathbf{M}^n + r \cdot \Delta\mathbf{M} \quad (60)$$

として増分後の値を求めることができる。変位や要素内応力についても式(60)と同様にして求める。この結果、増分後の表面力は、降伏曲面を越えることはなく、降伏曲面上もしくはその内側に必ずあることになる。

非線形解析にあたり、荷重 \mathbf{P} を幾つかの荷重 $\Delta\mathbf{P}$ に分割する。この荷重 $\Delta\mathbf{P}$ を作用させ、 r_{\min} 法にしたがって $i-1$ ステップ目までの荷重増分率を求め、その合計を r_{\min} とすると、 $i-1$ ステップ目までに作用した荷重は、 $r_{\min}\Delta\mathbf{P}$ となる。このとき、 i ステップに載荷すべき未載荷分の荷重は次のようになる。

$$\Delta\mathbf{P}^{(i)} = (1 - r_{\min})\Delta\mathbf{P} \quad (61)$$

次に、この荷重を作用させて求めた荷重増分率をとすれば、 $(i+1)$ ステップで作用する荷重は次式によって与えられる。

$$\Delta\mathbf{P}^{(i+1)} = (1 - r_i)\Delta\mathbf{P}^{(i)} \quad (62)$$

したがって、第 n ステップ目に作用させる荷重は、初めに与えた荷重を $\Delta\mathbf{P}$ として以下のようになる。

$$\Delta P^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - r_i) \Delta P \quad (r_0 = 0) \quad (63)$$

このようにして、初めに与えた荷重を全て使い切るまで繰り返し計算を行う。このとき、荷重増分率の合計 r_{total} を

$$r_{total} = \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} (1 - r_i) r_k \right\} \quad (64)$$

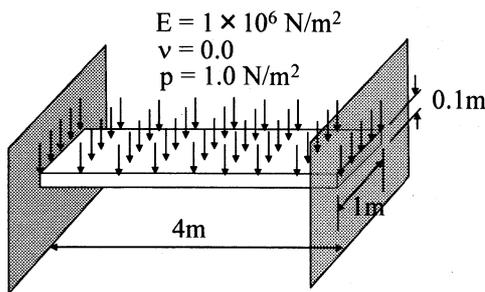
とし、 $r_{total} = 1$ で収束したものと考えることができる。

6. 数値計算例

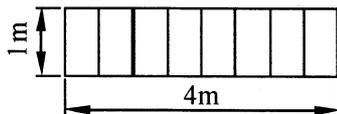
6.1 弾性解析

(1) 分布荷重が作用する両端固定ばり

はじめに、本モデルによる弾性解の精度を検証するため、両端固定ばりに分布荷重 ($p = 1.0 \text{ N/m}^2$) が作用した場合の解析を行った。図-3に解析モデルと材料定数、要素分割例を示す。はりの部分領域への分割にあたり、奥行き方向を1分割に固定、スパン方向のみ分割する準1次元的なモデルを想定した。図は8分割の例である。



(a) 解析モデルと材料定数



(b) 要素分割例 (8分割の例)

図-3 両端固定ばりの解析モデル

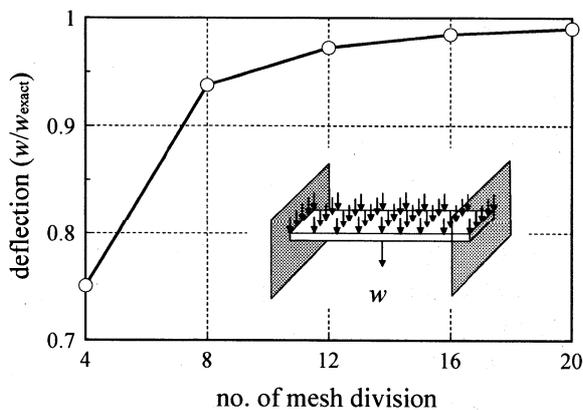


図-4 たわみの収束状況

図-4は、横軸に分割数、縦軸に本モデルによるはり中央部におけるたわみ解と解析解の比をとった図である。本モデルでは、たわみは2次関数で表されており、厳密解とは一致しないが、はり中央部のたわみは20分割で誤差が1%程度となり、良好な結果が得られた。

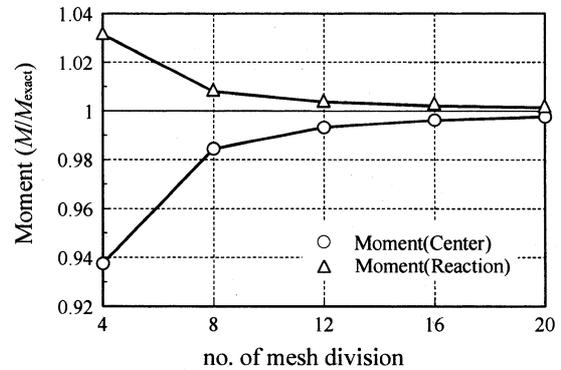


図-5 モーメントの収束状況

一方、曲げモーメントの収束状況を図-5に示す。横軸が分割数で、縦軸が解析解との比である。○印ははり中央部における曲げモーメントに関するもので、12分割で誤差が0.7%以下となっており、高い精度の解が得られた。また、△印はモーメント反力で、やはり、12分割で0.35%以下と高い精度になっている。

図-6は8分割したときの曲げモーメントの分布状況を示した図である。○印は、部分領域の境界における値 (Lagrange の未定乗数) で、△印が部分領域内におけるスパン方向の曲げモーメントの値、実線が解析解である。どちらも良好な分布状況が得られている。

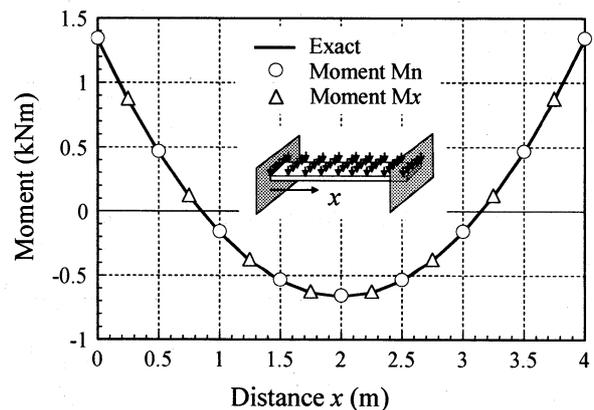
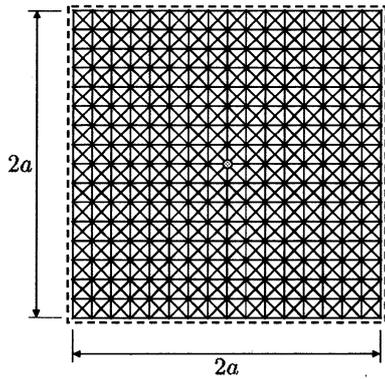


図-6 モーメント分布

(2) 周辺単純支持の矩形板

次に、周辺単純支持の矩形板に関する解析を行った。図-7に本解析で用いたモデルの形状と要素分割例を示す。図中の矩形寸法は $a = 2\text{m}$ 、板厚は $t = 0.1\text{m}$ で、周辺は単純支持である。図は、1024要素、545節点の場合の分割例である。集中荷重 ($P = 4.0 \text{ N}$) が作用する場合は、中央の節点に載荷した。また、分布荷重 ($p = 1.0 \text{ N/m}^2$) が

作用する場合は、すべての要素に面外方向の力を載荷した。図中に解析に用いた材料定数を示す。



弾性係数 $E = 1.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
 ポアソン比 $\nu = 0.0$

図-7 解析に用いた矩形板の要素分割例

図-8は集中荷重が作用した場合の板中央部におけるたわみの収束状況を示したものである。横軸は図-7に示す横(縦)方向の正方形メッシュ数で、図-7は16分割の例である。また、縦軸は本モデルによるたわみと解析解の比で、16分割の場合0.8%の誤差で、高い精度の解が得られた。

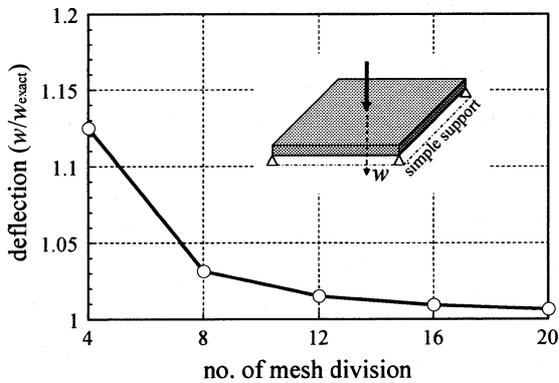


図-8 たわみの収束状況 (集中荷重)

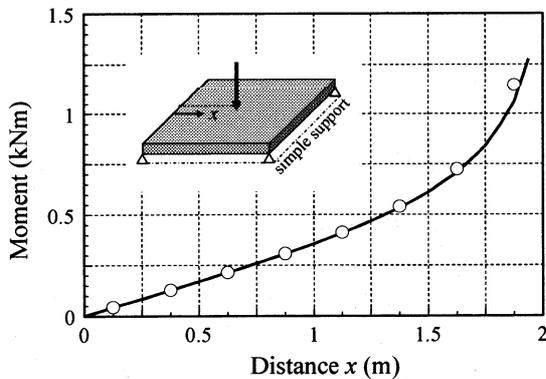


図-9 曲げモーメントの分布状況 (集中荷重)

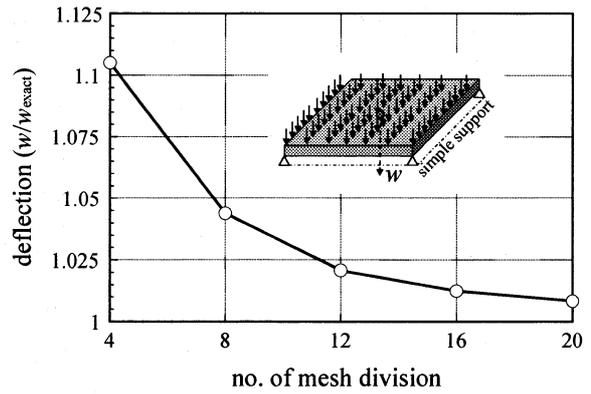


図-10 たわみの収束状況 (分布荷重)

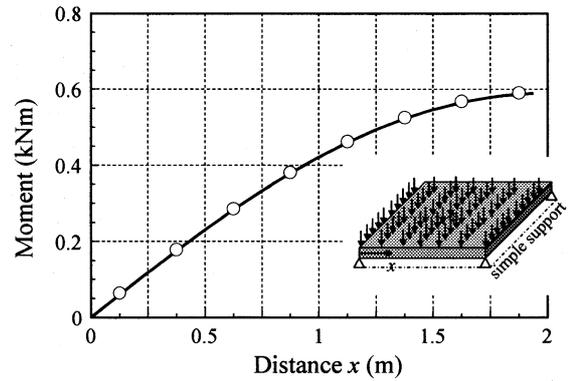


図-11 曲げモーメントの分布状況 (分布荷重)

図-9は集中荷重が作用した場合の矩形板端部から中央部にかけての曲げモーメントの分布状況を示したものである。図は16分割の場合で、集中荷重近傍の要素に関する曲げモーメントは1.1921kNm (解析解: 1.0577kNm)で12.7%の相対誤差が生じているが、それ以外の箇所では1%以下の誤差となっている。本モデルの部分領域内のモーメント分布は一定であり、FEMにおける定ひずみ要素と同様、集中荷重を受けるような場合には、その周辺の要素を細分割する必要がある。

図-10には分布荷重が作用した場合の矩形板中央部におけるたわみを解析解と比較した結果が示されている。分割数の増加とともに誤差が減少する傾向にあり、20分割で約0.82%であった。

一方、図-11は16分割した場合の、板端部から中央部にかけての曲げモーメントの分布状況を示した図で、集中荷重の場合とは異なり、やはり中央部においても解析解と1%程度の誤差となっており、良好な結果が得られている。

剛体要素を用いるRBSMの板曲げ要素¹⁾では、要素内におけるポアソン比の影響を評価することが難しく、大きなポアソン比の場合、精度が若干低下していた。一方、本モデルでは、部分領域内での剛性が評価されているため、ポアソン比の影響をほとんど与えることはない。図-12は16分割の例で、横軸にポアソン比、縦軸に解析

解とのたわみの比をとった図である。すべてのポアソン比に対して、たわみは1%以下の誤差となっている。

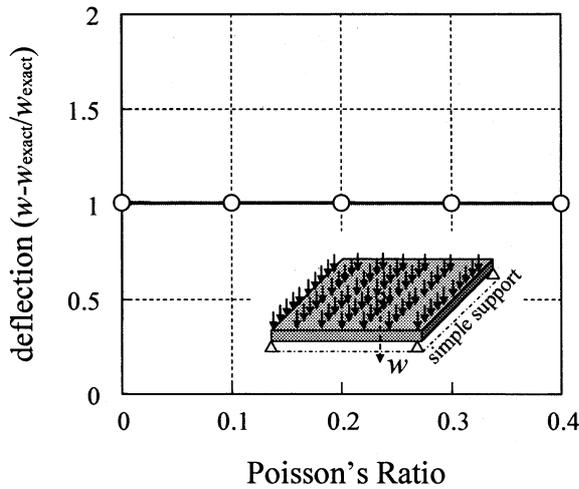


図-12 ポアソン比の影響

6.2 離散化極限解析

次に、図-7に示した周辺単純支持の矩形板に対する離散化極限解析を行う¹¹⁾。解析モデルおよび、材料定数は図に示すとおりであり、破壊条件としては、全塑性曲げモーメント ($M_{pn} = 0.1 \text{ Nm/m}$) のみを考慮した。

(1) 集中荷重を受ける周辺単純支持の矩形板

図-13は集中荷重が作用した場合の荷重-変位曲線で、横軸に矩形板中央部における無次元化されたたわみ、縦軸に無次元化された荷重をとっている。図中○が本手法による結果で、一点鎖線が塑性解析による崩壊荷重である。本手法による崩壊荷重は、塑性解析における崩壊荷重と同じ値となった。

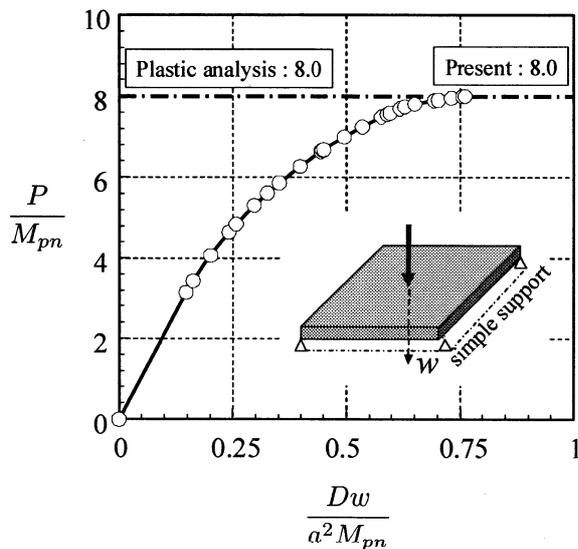


図-13 荷重-変位曲線 (集中荷重)

一方、図-14は、ヒンジ線の状況を示した図で、左端は塑性解析で仮定されたヒンジ線、中央は本手法による無次元化された荷重が6.634のときのヒンジ線、右端が崩壊時（無次元化された荷重が8.0のとき）のヒンジ線を表している。最終的なメカニズムは本手法と塑性解析で同じになるため、崩壊荷重が一致したものと考えられる。

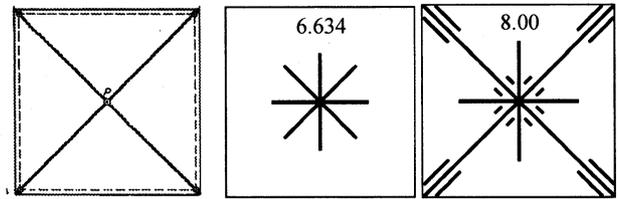


図-14 ヒンジ線 (集中荷重)

(2) 分布荷重を受ける周辺単純支持の矩形板

次に、同じ矩形板に分布荷重が作用した場合の結果を示す。図-15は荷重-変位曲線で、塑性解析と本手法による崩壊荷重は同じ値となっている。参考までに極限解析における上界値と下界値も示してあるが、本手法は、この間の値となっている。

図-16はヒンジ線で、はじめコーナーから発生したヒンジ線は、最終的に塑性解析における仮定を含む形状に進展し、メカニズムを形成した。

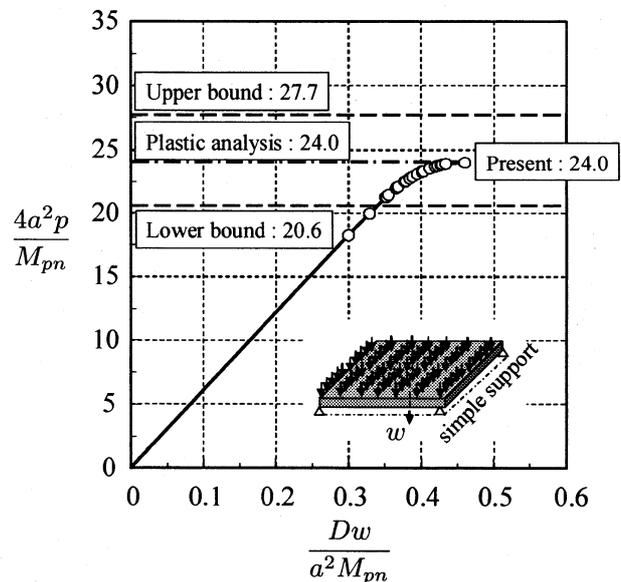


図-15 荷重-変位曲線 (分布荷重)

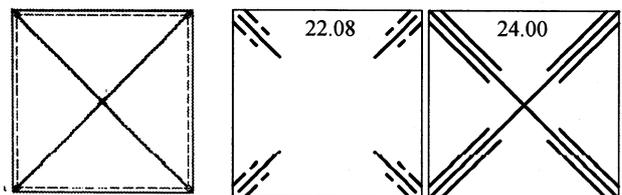


図-16 ヒンジ線 (分布荷重)

7. むすび

HPMの板曲げモデルを開発することを目的に、一般的な3次元における2次の変位場に対して、Kirchhoff-Loveの仮定を適用し、HPMにおける薄板の変位場を誘導した。また、部分領域境界上における表面力がねじりモーメント、曲げモーメント、せん断力であることを利用して、RBSMと同等の離散化極限解析法を開発した。簡単な数値解析例により以下の結果が得られた。

- 1) 自由度として、剛体変位(たわみ)と剛体回転、ひずみの勾配を用いた低次のモデルでありながら、ある程度の領域分割数で、たわみ、曲げモーメントとも弾性解との誤差が1%以下と、良好な結果が得られた。
- 2) 離散化極限解析による、ヒンジ線は、塑性解析における仮定と一致した。
- 3) 崩壊荷重に関しても、塑性解析の結果と一致した。

以上から、本手法は、弾性解の精度を維持しつつ、薄板の離散化極限解析を効率的に行うことができるモデルであると考えられる。

本モデルでは部分領域間にヒンジを導入することができ、1章でも述べたように、連続体を基礎とするFEMでは難しかった脆性材料における進行型の離散ひび割れを、自由度の変更無く容易に表現できる。今後、部分領域内の塑性を考慮することで下界値求めるなどすれば、薄板問題に対する効果的な離散化極限解析手法になるものと考えられる。

参考文献

- 1) 竹内則雄: RBSM 板曲げ要素を用いた離散化極限解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol.19, pp.125-130, 1995.

- 2) D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn and L.D. Marini : Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM journal on numerical analysis*, Vol.39, No.5: pp.1749-1779, 2002.
- 3) T.J.R. Hughes and K. Garikipati : On the continuous/discontinuous Galerkin(CDG) formulation of Poisson-Kirchhoff plate theory, *Computational mechanics-Theory and practice*, 2004.
- 4) J. Mergheim, E. Kuhl and P. Steinmann : A hybrid discontinuous Galerkin/interface method for the computational modeling of failure, *Communications in numerical methods in engineering*, Vol.20, pp.511-519, 2004.
- 5) D.N. Arnold : An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM journal on numerical analysis*, Vol.19, No.4: pp.742-760, 1982.
- 6) K. Washizu : *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, New York, 1968.
- 7) 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人, "ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析", 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20010002), pp.53-62, 2001.
- 8) 見原理一, 竹内則雄, 草深守人 : 2次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法の開発, 土木学会構造工学論文集, Vol.51A, pp.249-257, 2005.
- 9) 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦 : ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp.261-270, 2000.
- 10) 浅井光輝 : 微視的構造特性を考慮した非均質脆性材料の破壊シミュレーション, 東北大学提出学位論文, 2003.
- 11) A. Sawczuk and T. Jaeger : *Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

(2008年4月14日 受付)