応用力学論文集 Vol.11, pp.201-209 (2008年8月) 土木学会

Cohesive crackモデルを用いた準脆性材料の動的破壊解析手法に関する基礎的研究

A method of dynamic fracture analysis for quasi-brittle materials by means of cohesive crack model

車谷 麻緒*・岩田 暁**・寺田 賢二郎***・岡澤 重信****・樫山 和男†
Mao KURUMATANI, Satoshi IWATA, Kenjiro TERADA, Shigenobu OKAZAWA and Kazuo KASHIYAMA

*正会員 博(工) 日本学術振興会 特別研究員 PD・東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻
(〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
**学生会員 中央大学大学院 理工学研究科 土木工学専攻(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)
***正会員 Ph.D. 東北大学大学院准教授 工学研究科 土木工学専攻(〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
****正会員 博(工) 広島大学大学院准教授 工学研究科 社会環境システム専攻(〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)
†正会員 工博 中央大学教授 理工学部 土木工学科(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

With a view to the development of a new dynamic fracture analysis method, the cohesive crack model is incorporated into an explicit dynamic finite element method to evaluate dynamic fracture behavior in quasi-brittle materials. In order to evaluate the softening behavior of fracture process zone, we employ a cohesive spring approximation for implementing the cohesive crack model. After briefly summarizing the formulation and the solution algorithm in the present method, in which discrete crack model is used for representing evolving cracks, we examine the mesh-size dependency and the size-effect for quasi-brittle structures subjected to dynamic loading. Finally, a numerical simulation of the dynamic failure of a brick structure is performed to demonstrate the validity and applicability of the present approach.

Key Words : *fracture simulation, explicit dynamic analysis, cohesive crack model, discrete crack, quasi-brittle materials*

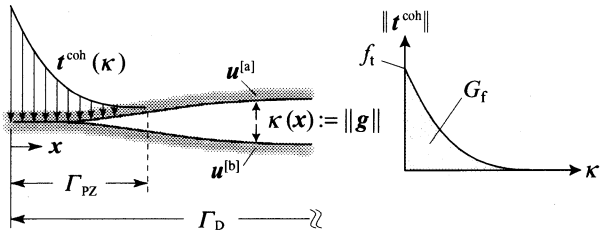
1. はじめに

一般に，破壊現象の多くは動的問題である．動的荷重の作用下においては，材料が有する破壊力学特性に加えて構造物の動的特性を考慮する必要があり，多様に変化する破壊モードの追跡および破壊強度の評価は，重要構造物を扱う土木工学において極めて重要なテーマである．材料や構造物の強度評価に加えて，近年では特に，社会的な関心の強い防災のための災害シミュレーションなど，動的な破壊問題に対する需要が多い．例えば，地震・土砂・水害の災害シミュレーションにおいては，地震力や衝撃荷重を受ける構造物の破壊や，土石流・地すべり・津波・高潮による流体力を受ける構造物の破壊を扱うことになるが，これらを精度良く再現するには，動的破壊シミュレーション技術の高度化が不可欠となる．

脆性材料の破壊現象を数値解析で適切に再現するには，破壊を具体的な不連続面の形成として表す必要がある．加えて，土木材料に代表されるコンクリート等の準脆性材料の破壊を扱う際には，ひび割れ先端付近での微細ひび割れを伴う破壊進行領域の力学挙動（引張軟化）をモデル化しなければならない．Cohesive crackモデルは，破壊進行領域でのエネルギー収支を考慮する破壊力学モデルであり，準脆性材料の破壊挙動を適切に評価するには，これを不連続面の形成過程に導入した破壊進展解析手法の適用が不可欠である．

Hillerborg *et al.*[1]は，開口変位に依存した結合力をひび割れ面に作用させることにより，Cohesive crackモデルを用いた有限要素法（FEM）による静的ひび割れ進展解析手法を提案し，比較的粗いメッシュでコンクリートの非線形な軟化挙動を再現可能とした．この研究に端を発し，これまでに，FEMを応用した手法[2),3)]やPUFEM[4),5)]，eXtended FEM[6),7)]，Hansbo法[8)]，有限被覆法[9),10)]にCohesive crackモデルを導入した静的破壊解析手法が数多く提案されている．しかし，Hillerborg *et al.*[1)]が提案したCohesive crackモデルは，力学的境界条件として付加する結合力の強弱で軟化挙動をモデル化しているため，数値解析は不安定であり，動的解析への応用も難しく，FEM[11)~14)]やメッシュフリー法[15)~17)]，eXtended FEM[18),19)]をベースとする動的破壊解析手法を見ても，その多くは，Cohesive crackモデルを用いていないか，あるいは一直線型・二直線型等の単純なCohesive crackモデルの導入にとどまっている．また，既往の静的破壊解析手法の研究によれば[9),10)]，Hillerborg *et al.*[1)]が定義したCohesive crackモデルに基づく破壊エネルギーを適切に考慮すると，有限要素解析における要素サイズ依存性の解消や，準脆性材料の特徴である寸法効果の再現が可能になることが示されているが，これらを動的な破壊問題において再現した解析手法も見当たらない．

そこで本研究では，準脆性材料に対する動的破壊解析手法に関する基礎的研究として，陽解法に基づく動的有限要素解析に離散ひび割れモデルとCohesive crackモデルを導入した破壊解析法を構築し，その適用性や



図–1 Cohesive crack モデル

有効性に関する検討・考察を行う．第 2 節では，本論文で採用した解析手法の定式化と破壊のモデル化について示す．まず，Cohesive crack モデルの概要と離散ひび割れの形成について説明する．そして，動的解析に対する Cohesive crack モデルの導入方法，および離散ひび割れの進展を考慮した動的陽解法の定式化について述べた後，動的破壊シミュレーションの解析アルゴリズムについて説明する．第 3 節では，本論文で構築した Cohesive crack モデルを用いた動的離散ひび割れ進展解析手法に関する数値解析例を示す．具体的には，まず，単純な要素試験を通して，静的解析結果および解析解との整合性を確認した後，動的破壊問題における要素サイズ依存性や寸法効果の再現性に関する検討を行う．そして，レンガ構造（ブロック構造）の動的破壊シミュレーション例を紹介し，本研究で構築した動的破壊のモデル化や解析アルゴリズムの有効性を示す．第 4 節では，本研究の総括を行い，今後の課題や展望について述べる．

2. Cohesive crack モデルを用いた動的離散ひび割れ進展解析

本節では，本研究で構築した動的破壊解析手法の詳細と破壊のモデル化について示す．まず，Cohesive crack モデルの概要と有限要素解析における離散ひび割れの形成について説明する．そして，動的陽解法に対する Cohesive crack モデルの導入方法，および離散ひび割れ進展を考慮した動的陽解法の定式化について述べた後，動的破壊シミュレーションの解析アルゴリズムについて説明する．なお，本研究では粘性減衰は考慮しない．

2.1 Cohesive crack モデル

コンクリートに代表されるの準脆性材料は，ひび割れ先端付近において，破壊進行領域（Fracture Process Zone; FPZ）を形成することが知られている．FPZ とは，連続体と応力フリーひび割れの中間領域であり，開口変位の増大とともに応力伝達が減少していくので，結果として FPZ は軟化挙動を示す．

Hillerborg *et al.*[1]が提案した Cohesive crack モデルは，**図–1** に示されるように，FPZ における応力伝達を仮想ひび割れ境界間の結合力（表面力）でモデル化するものである．具体的に，結合力の大きさは実験結果に基づいて決定した引張軟化曲線と呼ばれる表面力－開口変位関係により定められ，引張軟化曲線下の面積は破壊エネルギーと呼ばれている．破壊エネルギーとは，物理的には，完全な応力フリーとなる単位の破断面を形成するのに必要なエネルギーである．

本研究では，これまでに多くの実績を挙げており，指数関数型で破壊エネルギーを直接考慮可能な次式で示される表面力－開口変位関係[4]を採用する．

$$\left\|\boldsymbol{t}^{\mathrm{coh}}\right\| - f_{\mathrm{t}} \exp\left(-\frac{f_{\mathrm{t}}}{G_{\mathrm{f}}}\kappa\right) \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{PZ}} \tag{1}$$

ここで，$\left\|\boldsymbol{t}^{\mathrm{coh}}\right\|$ は結合力ベクトルの大きさ，f_{t} は引張強度，G_{f} は破壊エネルギー，κ は載荷履歴における最大開口変位である．

f_{t} の正確な定義は，**図–1** に示すように引張軟化の開始応力，すなわち破壊進行領域の形成応力であるので，f_{t} は静的・動的に依らないパラメータである．G_{f} についても，単位の不連続面を形成するのに必要なエネルギー，という定義は静的・動的に無関係である．したがって，本研究では構造寸法・境界条件に加えて，材料レベルの破壊発生・軟化剛性を考慮した全体系の運動方程式を解くことで，動的破壊問題における見かけの変形速度の影響を考慮することとする．

Cohesive crack モデルに従い，不連続面の開口を取り扱う際，本研究では不連続面における相対変位ベクトル $\boldsymbol{g}$ を定義しておく．なお，本研究では，式 (1) の履歴変数 κ は $\|\boldsymbol{g}\|$ で定めることとする．

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{u}^{[\mathrm{a}]} - \boldsymbol{u}^{[\mathrm{b}]} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}} \tag{2}$$

上式において，$\boldsymbol{u}^{[\mathrm{a}]}$, $\boldsymbol{u}^{[\mathrm{b}]}$ は**図–1** に示されるような不連続面における変位ベクトルである．また，不連続面 Γ_{D} 上での表面力ベクトル $\boldsymbol{t}_{\mathrm{D}}$ は，次のように与えられる（**図–1** を参照）．

$$\boldsymbol{t}_{\mathrm{D}} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = \begin{cases} \boldsymbol{t}^{\mathrm{coh}} = \left\|\boldsymbol{t}^{\mathrm{coh}}\right\| \boldsymbol{m}^{\mathrm{coh}} & \text{on } \Gamma_{\mathrm{PZ}} \\ \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}} \backslash \Gamma_{\mathrm{PZ}} \end{cases} \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{m}^{\mathrm{coh}}$ は相対変位ベクトル $\boldsymbol{g}$ の単位ベクトルであり，次式で表される．

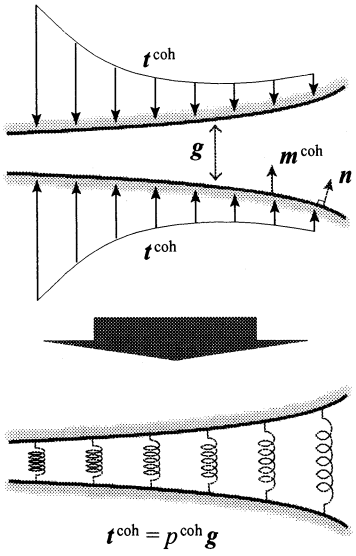
$$\boldsymbol{m}^{\mathrm{coh}} = \frac{\boldsymbol{g}}{\|\boldsymbol{g}\|} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{PZ}} \tag{4}$$

2.2 動的問題に対する Cohesive crack モデルの実装とその弱形式

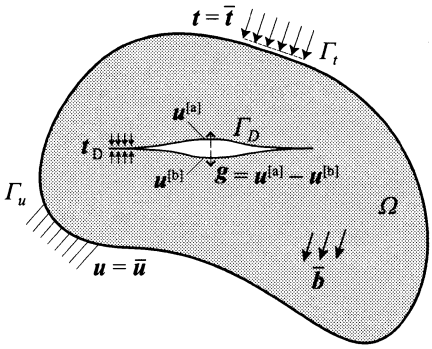
図–1 および式 (3) で与えたように，オリジナルの Cohesive crack モデルは，破壊進行領域での力学挙動を不連続面間の結合力でモデル化するものである．陰解法に基づく静的解析では，Cohesive crack モデルの結合力を分布外力による力学的境界条件として扱い，収束計算により全体のつり合いを満足させることで軟化挙動を再現可能であるが，動的解析では，静的解析と同様の実装方法で軟化挙動を再現することが困難となる．

そこで本研究では，**図–2** および次式に示すように，Cohesive crack モデルで与えられる結合力をバネの反力で書き換える．

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{coh}} = p^{\mathrm{coh}}\boldsymbol{g} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{PZ}} \tag{5}$$



図–2 バネの反力でモデル化した Cohesive crack モデル



図–3 不連続面を含む準脆性材料の物理問題

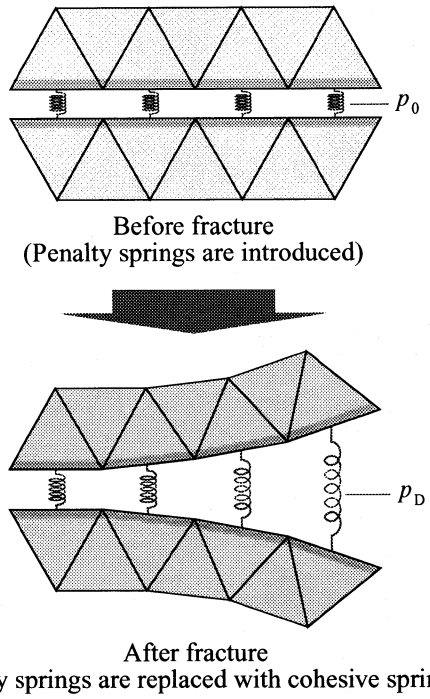
ここで，p^{coh} は不連続面での相対変位方向の結合（粘着）を表すバネ剛性であり，$\boldsymbol{g} \approx \boldsymbol{0}$ の場合には一般的なペナルティ法におけるペナルティ係数と同一視できる．式 (5) は，式 (3) と式 (4) より，次のように書き換えられる．

$$p^{coh} = \frac{\|\boldsymbol{t}^{coh}\|}{\|\boldsymbol{g}\|} \tag{6}$$

p^{coh} は，もともと $\|\boldsymbol{g}\|$ の関数であるが，動的陽解法を採用することにより，前の時間ステップの値で近似することができる．

式 (1) は，不連続面の開口に伴って進行する軟化応答のみを与えており，不連続面の閉口や除荷の応答については，別の構成関係を導入する必要がある．ただし，本研究では，上記のように Cohesive crack モデルをバネ剛性としてモデル化しているので，除荷剛性は自動的に組み込まれている．なお，履歴変数 κ は不連続面の開口に対してのみ更新されるので，除荷については軟化進行を伴わない弾性除荷となる．

以上より，**図–3** に示されるような，不連続面を含む準脆性材料の動的問題に対する Cohesive crack モデルを用いた弱形式の支配方程式は，ペナルティ法と同様



図–4 バネの反力でモデル化した Cohesive crack モデル

の形式で，次のように表される．

$$\int_{\Omega} \rho \delta \boldsymbol{u} \ddot{\boldsymbol{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \delta \boldsymbol{u} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma_D} p_D \, \delta \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g} \, d\Gamma}_{\text{Cohesive crack term}}$$
$$= \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{u} \cdot \bar{\boldsymbol{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \boldsymbol{u} \cdot \bar{\boldsymbol{t}} \, d\Gamma \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \ (\forall \delta \boldsymbol{g}) \tag{7}$$

$$p_D = \begin{cases} p^{coh} & \text{on } \Gamma_{PZ} \\ 0 & \text{on } \Gamma_D \backslash \Gamma_{PZ} \end{cases} \tag{8}$$

ここで，ρ は密度，$\ddot{\boldsymbol{u}}$ は加速度ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力テンソル，Ω は物体領域，Γ_t は Neumann 境界，$\bar{\boldsymbol{b}}$ と $\bar{\boldsymbol{t}}$ はそれぞれデータとして与えられる物体力ベクトルと分布外力ベクトルである．また，本研究では微小変形問題を仮定し，材料の挙動は線形弾性体に従うものとする．

2.3 離散ひび割れ進展による破壊のモデル化

本論文は，動的破壊解析手法に関する基礎的研究として，簡易なひび割れ進展解析法として知られる，ひび割れ発生位置にインターフェイス要素を用いる離散ひび割れモデルを適用する．具体的に，インターフェイス要素にペナルティ法を適用することにすれば，**図–4** に示されるように，破壊の発生時点でペナルティ係数を式 (8) のバネ係数に容易に変換でき，ひび割れの発生前から発生後までを一貫して追跡可能な手法を構築することができる．

すなわち，ひび割れが発生する前の弾性解析では，弱形式 (7) に対して，次式のように，通常のペナルティ法を適用する．

$$\int_{\Omega} \rho \delta \boldsymbol{u} \ddot{\boldsymbol{u}}\, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \delta \boldsymbol{u} : \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} p_0\, \delta \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g}\, d\Gamma}_{\text{Penalty term}}$$

$$= \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{u} \cdot \bar{\boldsymbol{b}}\, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \boldsymbol{u} \cdot \bar{\boldsymbol{t}}\, d\Gamma \quad \forall \delta \boldsymbol{u}\ (\forall \delta \boldsymbol{g}) \quad (9)$$

ここで，p_0 はペナルティ係数であり，構成材料の Young 率の 10^4 倍程度の大きな実数を設定する．ペナルティ係数は,「変位拘束を課すための物理的に意味のない係数」であるが，相対変位を許容した時点で「相対変位を小さく抑えるための物理的に意味のある大きなバネ係数」とみなすことができる．したがって，本研究ではペナルティ係数をバネ係数と読みかえることとし，式 (5) と同様に，ここでのペナルティ法における拘束面上の表面力 $\boldsymbol{\lambda}$ は，バネ係数 p_0 の反力として次式により計算される．

$$\boldsymbol{\lambda} = p_0 \boldsymbol{g} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}} \quad (10)$$

本研究では，この表面力を用いて，破壊の発生基準を次のように定めることにする．

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{n} > 0 \quad \text{and} \quad \|\boldsymbol{\lambda}\| - f_{\mathrm{t}} = 0 \quad (11)$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は Γ_{D} における外向き単位法線ベクトルである．この式で破壊が判定されれば，式 (10) と式 (5) が同形式であることから，式 (9) を式 (7) に置き換えることにより，Cohesive crack モデルによる引張軟化の非線形解析へとスムーズに移行できる．

2.4 Cohesive crack モデルを考慮した動的陽解法による離散ひび割れ進展解析

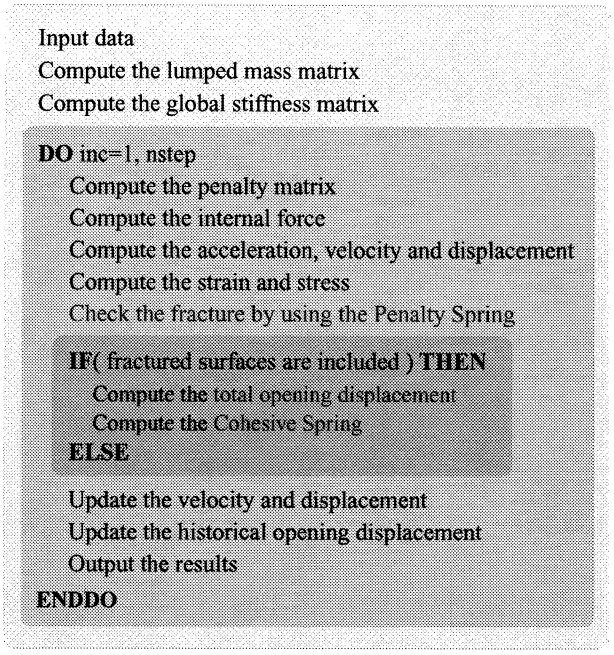
準脆性材料の動的破壊問題では，動的に発生・進展する破壊に加えて，破壊進行領域での軟化挙動を動的に扱う必要があり，これらを再現する数値解析は非常に複雑化するため，陰解法による求解は困難となる．本研究では，複雑な動的問題であっても簡易的かつ効率的に扱える動的陽解法を採用し，不連続面同士のバネ剛性として与えた Cohesive crack モデルを導入することにより，準脆性材料の動的破壊解析手法を構築する．以下に，Cohesive crack モデルを考慮した動的陽解法による離散ひび割れ進展解析の手順を述べる．

数値解析アルゴリズムを**図–5** に示す．本研究では，微小変形問題を仮定し，有限要素境界での破壊を扱う離散ひび割れモデルを採用したことにより，質量行列と剛性行列は解析中において不変となるため，増分計算の前にあらかじめ計算しておくことができる．なお，本研究では動的陽解法を採用しているため，集中質量行列を用いており，連立一次方程式を解く必要はない．

時間ステップの計算においては，まずペナルティ行列を計算した後，次式により内力ベクトルを求める．

$$\boldsymbol{F}^n_{\mathrm{int}} = (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{P}^n)\, \boldsymbol{u}^n \quad (12)$$

ここで，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ は内力ベクトル，$\boldsymbol{K}$ は剛性行列，$\boldsymbol{P}$ はペナルティ行列，n は時間ステップである．ペナルティ行列の計算については，破壊前は p_0，破壊後は p_{D} をそれぞれ用いる．次に，中央差分法（**図–5** 下を参照）により，加速度・速度・変位を次式により計算する．



図–5 Cohesive crack モデルを用いた陽解法に基づく動的離散ひび割れ進展問題の解析アルゴリズム

$$\ddot{\boldsymbol{u}}^n = \overline{\boldsymbol{M}}^{-1} \left(\boldsymbol{F}^n_{\mathrm{ext}} - \boldsymbol{F}^n_{\mathrm{int}} \right) \quad (13)$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{\boldsymbol{u}}^{n-\frac{1}{2}} + \ddot{\boldsymbol{u}}^n \Delta t \quad (14)$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^n + \dot{\boldsymbol{u}}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (15)$$

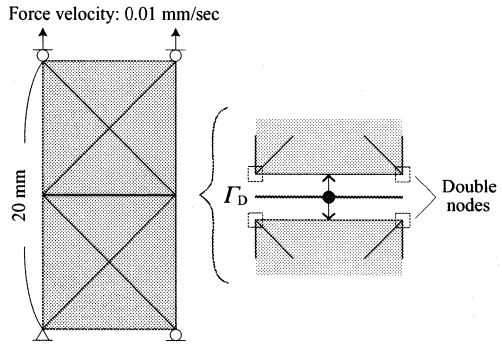
ここで，$\overline{\boldsymbol{M}}$ は動的陽解法における集中質量行列，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ は外力ベクトル，$\ddot{\boldsymbol{u}}$ は加速度ベクトル，$\dot{\boldsymbol{u}}$ は速度ベクトル，Δt は微小時間増分である．そして，ひずみ・応力を求めた後，式 (10), (11) を用いて破壊発生の有無を判定する．新たな破壊が判定されれば，開口変位 $\boldsymbol{g}$ を求め，Cohesive crack モデルの定義式 (1) と式 (6) により，次の時間ステップで用いるバネ定数を算出する．

最後に，次ステップのために，次式により速度と変位の更新を行い，

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{n-\frac{1}{2}} \Leftarrow \dot{\boldsymbol{u}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (16)$$

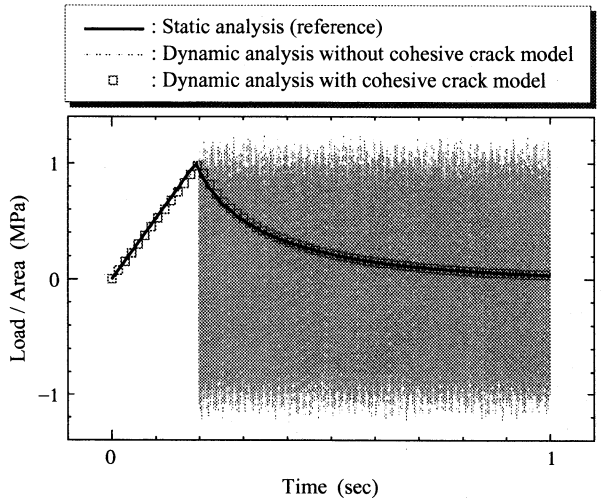
$$\boldsymbol{u}^n \Leftarrow \boldsymbol{u}^{n+1} \quad (17)$$

履歴パラメータ κ を更新し，解析結果の出力を行った後，次の時間ステップに移行する．



Young's modulus	10000 MPa
Poisson's ratio	0.20
Density	2500 kg/m^3
Tensile strength	1.0 MPa
Fracture energy	0.003 N/mm

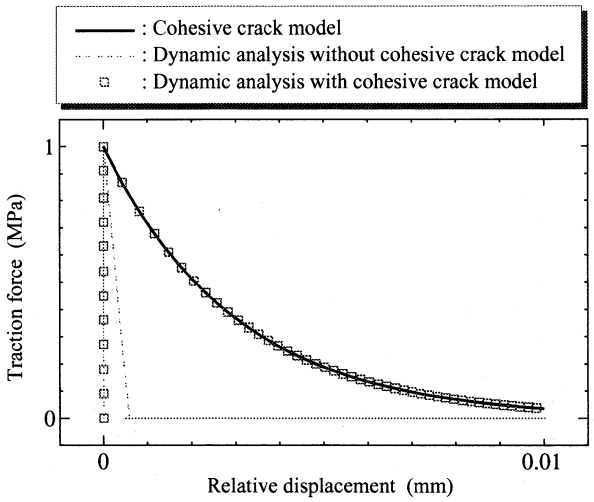
図–6 要素試験のモデル



図–7 要素試験における見かけの荷重－変位関係

3. Cohesive crack モデルを用いた動的離散ひび割れ進展解析の数値実験

本節では，Cohesive crack モデルを用いた動的離散ひび割れ進展解析の基礎的な性能評価を行う．具体的には，まず，単純な要素試験により，静的解析結果と厳密解との整合性を検証する．次に，動的破壊問題の有限要素解析結果に対する要素サイズ依存性の検討を行った後，準脆性材料の特徴である寸法効果の再現性についても検討する．また，レンガ構造に対する動的破壊シミュレーション例を示し，本解析手法の妥当性・有効性についても検討する．以下の解析例においては，平面ひずみ状態を仮定し，有限要素は定ひずみ三角形要素を用いることとする．



図–8 要素試験における破断面の表面力－開口変位関係

3.1 動的破壊に対する要素試験（検証例 1）

検証例 1 として，単純な引張破断の要素試験を行い，Cohesive crack モデルを用いた動的陽解法による破壊解析の妥当性を検証する．

(1) 解析対象と条件

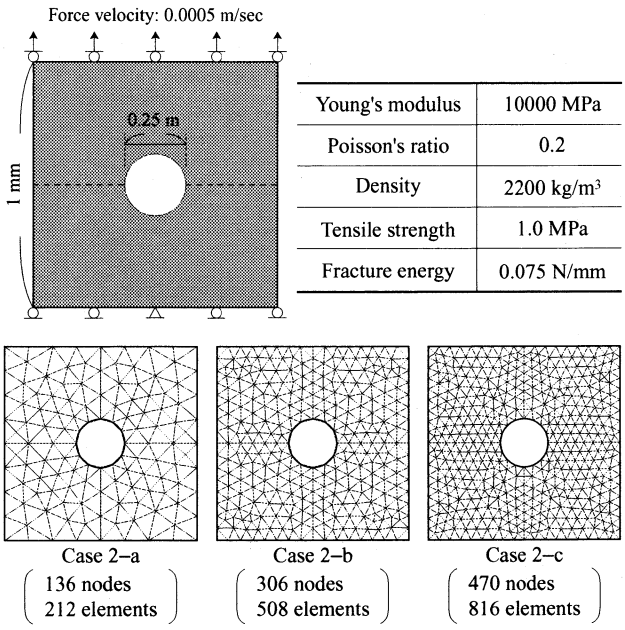
解析対象は，**図–6** に示されるような，領域中央に潜在的な破壊面を設けた単純な引張破断の例題である．この問題に対する境界条件として，下端を変位拘束し，上端面には慣性力の影響が無視できる程度の等速度 0.01 mm/sec を与える．ここで，一軸引張り状態下においてこのような速度を与える理由は，従来の静的解析の結果との比較・検討を行うとともに，破断面での Cohesive crack モデルそのものの応答の再現性を確かめるためである．また，構造物の変形・損傷が徐々に進行する問題に対しても，このような準静的な検討は必要である．

材料パラメータは同図の通りであり，Cohesive crack モデルを用いないケースと用いるケースの 2 通りの動的破壊解析を行い，それぞれの結果について検討・考察する．

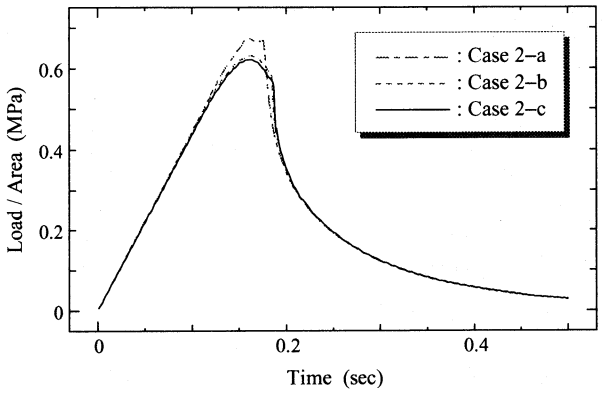
(2) 解析結果と考察

はじめに，モデルの上端面での反力（表面力）の時刻歴応答を**図–7** に示す．グラフ中には，参照解として，静的解析の結果[21]を併記している．まず，Cohesive crack モデルを用いない動的破壊解析の結果は，破壊が起こると，その解放力の作用によって，自由振動が発生していることが分かる．これに対して，Cohesive crack モデルを用いた本解析手法による動的破壊解析の結果は，自由振動を示しておらず，引張軟化の非線形挙動が再現されている．これは，この例題において，比較的遅い載荷速度を設定したことと，Cohesive crack モデルの粘着によって解放力による自由振動を抑制したからである．また，参照解である静的解析結果ともほとんど一致しており，本論文で構築した Cohesive crack モデルを用いた動的破壊解析の妥当性が認められる．

次に，破断面における表面力－開口変位関係の解析結果を**図–8** に示す．ここで，本研究では，式 (7), (8) の



図–9 要素サイズの異なる円孔穴あき板のモデル

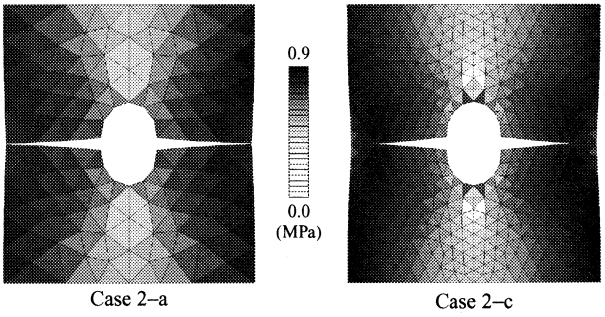


図–10 各ケースにおける荷重－変位関係の比較

ように，Cohesive crack モデルを一種のペナルティ法で近似しているので，グラフの縦軸の表面力は，バネ係数×開口変位，すなわち $p_D\|\boldsymbol{g}\|$ から算出された値である．まず，Cohesive crack モデルを用いない動的破壊解析では，破壊後の破断面に粘着がなく，突然応力フリーの不連続面が形成されるので，破壊後は急激に表面力が低下する結果となっている．これに対して，Cohesive crack モデルを用いた本解析手法による動的破壊解析の結果は，適切な引張軟化曲線が得られており，厳密解である Cohesive crack モデルそのものの応答と一致した結果となっている．

3.2 動的破壊に対する要素サイズ依存性（検証例 2）

破壊の進展解析を行う際は，要素サイズ依存性（メッシュ分割依存性）を回避する必要がある[20]．ここでは，Cohesive crack モデルを用いた動的破壊解析に対する要素サイズ依存性の有無について検討する．



図–11 メッシュ分割の異なるモデルに対する変形図と von-Mises 相当応力分布の比較（変形 ×1000）

(1) 解析対象と条件

要素サイズ依存性を検討する例題は，**図–9** に示すような，円孔穴あき板の単純な引張破断の問題である．材料パラメータおよび有限要素メッシュの分割パターンは同図に示す通りとし，モデル上端を等速度で引っ張る境界条件を設定する．

(2) 解析結果と考察

まず，各ケースにおける速度載荷面での反力（表面力）の時刻歴応答（荷重－変位関係）を**図–10** に示す．各ケースの時刻歴応答は，ピーク付近で若干異なるのみであり，ポストピークの軟化挙動はほとんど一致している．すなわち，有限要素近似に対するメッシュ依存性の影響はあるものの，ひび割れ進展に対するメッシュ依存性はみかけの応答においてほとんど見られず，本論文で構築した Cohesive crack モデルを用いた動的破壊解析は，要素サイズ依存性を回避可能であることが分かる．

次に，時刻 0.18 sec における Case 2–a と Case 2–c の変形図および von-Mises 相当応力分布を**図–11** に示す．この結果を見ても分かるように，本解析手法は，メッシュ分割の相違にかかわらず，ほぼ同様のシミュレーション結果を与えうることが分かる．

3.3 動的破壊に対する寸法効果（検証例 3）

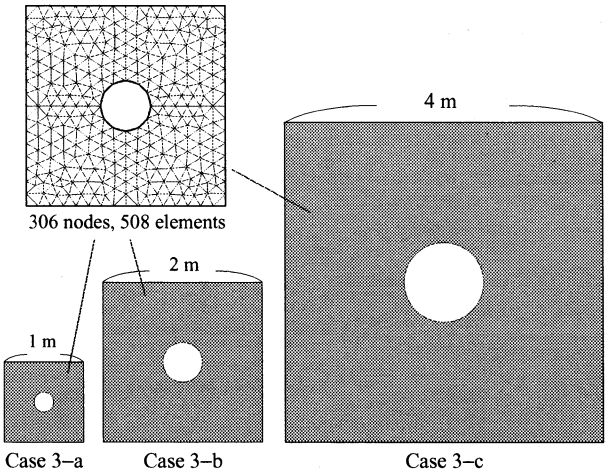
コンクリート等の準脆性材料は，構造物の大きさ（寸法）によって強度や靭性能が異なるといった，いわゆる寸法効果の発現が知られている[20]．ここでは，本論文で構築した Cohesive crack モデルを用いた動的破壊解析に対する寸法効果の再現性について考察する．

(1) 解析対象と解析条件

寸法効果の再現性を検証する解析対象は，前の例題と同様の円孔穴あき板とする．ただし，モデルの大きさは，**図–12** に示すように，相似的に変化させた 3 パターンを設定し，すべて同一の有限要素メッシュを与える．すなわち，単純にモデルの大きさのみが異なる有限要素モデルを解析対象とする．材料パラメータは同図に示す通りとし，境界条件はモデルの大きさを考慮し，上端にひずみ速度 0.0005 /sec を与える．

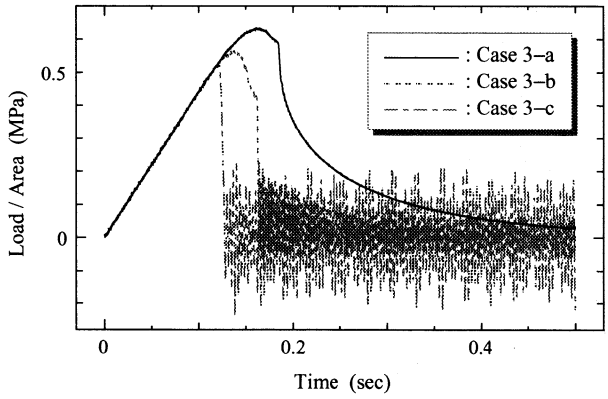
(2) 解析結果と考察

まず，モデル上端面での見かけの表面力の時刻歴応答を**図–13** に示す．グラフの縦軸は，見かけの表面力



Young's modulus	10000 MPa
Poisson's ratio	0.20
Density	2200 kg/m³
Tensile strength	1.0 MPa
Fracture energy	0.075 N/mm

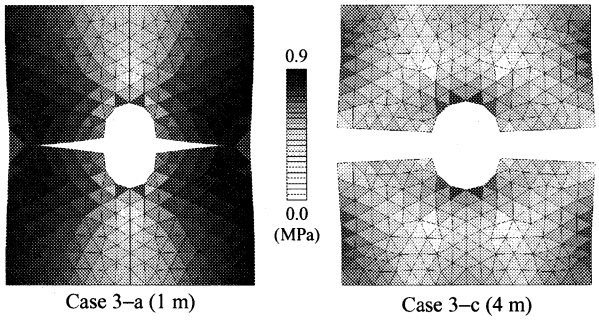
図–12 寸法効果の再現のための大きさの異なるモデル



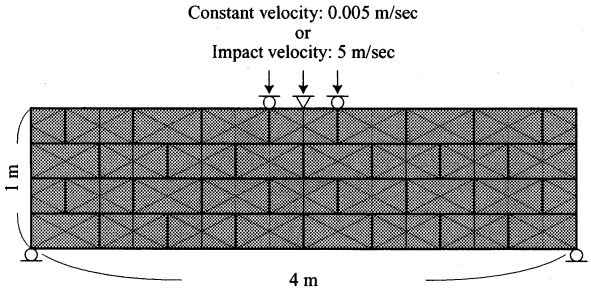
図–13 大きさの異なるモデルに対する荷重－変位関係の比較

になるよう各モデルの寸法で除している．解析結果を見て分かるように，準脆性材料の特徴である強度・靭性の寸法効果が再現されている．これは，本解析において，Cohesive crack モデルが適切に機能していることを意味している．また，モデルが大きいと脆性的となるため，言い換えれば Cohesive crack モデルの粘着が弱くなるため，破壊の発生に伴う解放力によって自由振動が起こっている．このことからも，Cohesive crack モデルを用いた本論文における動的破壊解析の妥当性が見て取れる．

図–14 は，時刻 0.18 sec のときの Case 3–a と Case 3–c の変形と応力の分布を示している．寸法の小さい Case 3–a は高靭性であるため，Case 3–c よりもひび割れの形成が遅くなっており，この結果からも本アルゴリズムの妥当性を主張することができる．



図–14 大きさの異なるモデルに対する変形図と von-Mises 相当応力分布の比較（変形 ×1200）



Young's modulus	5000 MPa
Poisson's ratio	0.07
Density	1800 kg/m³
Tensile strength	0.1 MPa
Fracture energy	0.04 N/mm

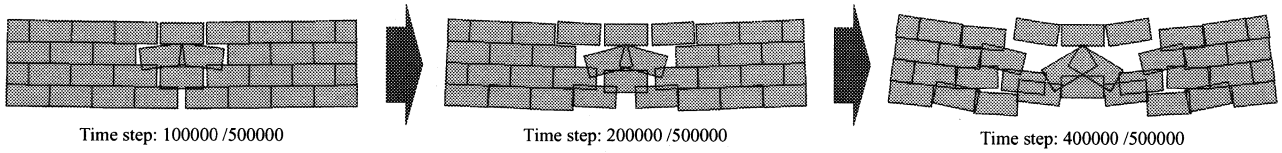
図–15 レンガ構造に対する動的破壊の解析モデル

3.4 レンガ構造の動的破壊シミュレーション例

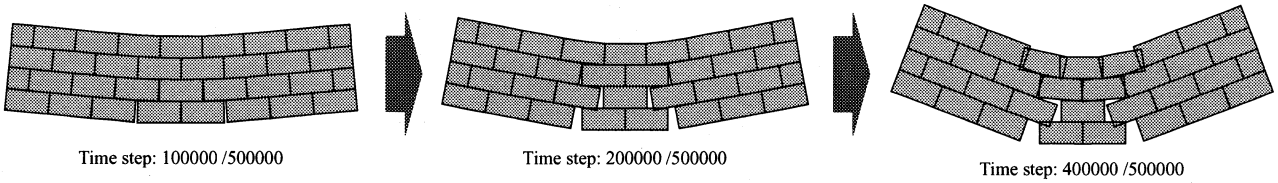
最後に，レンガ構造に対する動的破壊の数値解析例を示し，本論文で構築した Cohesive crack モデルを用いた動的破壊解析の有効性・適用性について考察する．

(1) 解析対象と解析条件

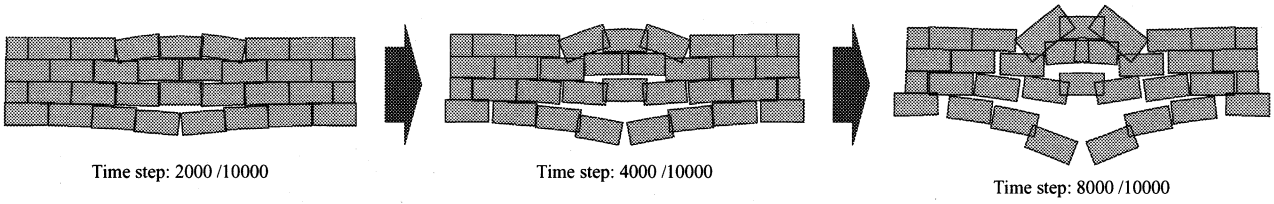
解析対象は，**図–15** に示されるようなレンガ積み構造であり，各レンガ間の界面でのみ破壊が生じるものとする．材料パラメータは，文献[22]を参考に同図のように設定した．境界条件は，構造物の下端を単純支持とし，上端の中央部に常時一定の速度を与えるケースとはじめのステップのみに衝撃速度を与えるケースの 2 通りを設定する．また，動的破壊シミュレーションにおいては，Cohesive crack モデルを用いないケースと用いるケースについて比較・考察する．なお，本例題では破壊後の界面の再接触や摩擦応答は考慮しないこととするが，本研究では破壊判定後に Cohesive crack モデルの軟化応答を示すバネが導入されているので，破壊発生後ただちに応力フリーの不連続面が形成されることはなく，開口変位が微小である間は応力が伝達する仕組みとなっている．



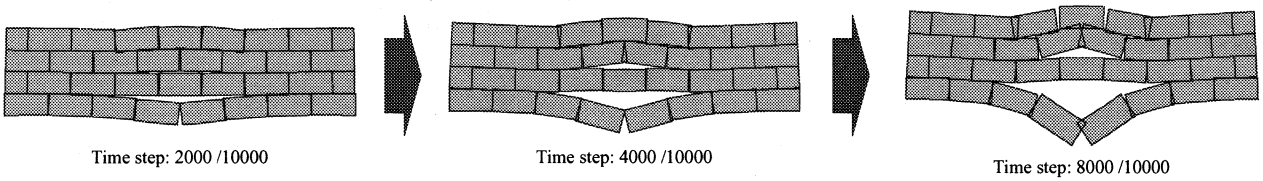
(a) Results of dynamic fracture simulation without cohesive crack model in case of constant velocity



(b) Results of dynamic fracture simulation with cohesive crack model in case of constant velocity



(c) Results of dynamic fracture simulation without cohesive crack model in case of impact velocity



(d) Results of dynamic fracture simulation with cohesive crack model in case of impact velocity

図–16 レンガ構造の動的破壊シミュレーション結果

(2) 解析結果と考察

動的破壊シミュレーション結果として，それぞれのケースにおける破壊の進行の様子を**図–16** に示す．まず，常時一定の速度を与えるケースにおいて，Cohesive crack モデルを用いない解析では，破壊発生後ただちに応力フリーの不連続面が形成されるので，同図 (a) のように破壊が瞬時に進展して不安定な結果となっている．これに対して，Cohesive crack モデルを用いた本解析手法では，破壊発生後に Cohesive crack モデルによる応力伝達が考慮されているので，同図 (a) のように局所的な破壊が瞬時に起こることはなく，同図 (b) のように梁がたわみながら破壊が徐々に進行する結果となっている．このことから，Cohesive crack モデルを用いることにより，準脆性材料の動的破壊挙動を適切に再現できることが分かる．

図–16 (c), (d) を見て分かるように，衝撃的な速度を与えるケースにおいても上と同様の考察が可能である．Cohesive crack モデルを用いないケースでは，応力波の伝達に従って破壊が早期にかつ広域的に広がっていくが，Cohesive crack モデルを用いたケースでは，応力波が主に伝わる領域でのみ破壊が段階的に進行する様子が再現されている．また，速度の与え方に応じた動的問題特有の破壊形態の相違が適切に再現されており，本解析手法の有効性・適用性が見て取れる．

4. おわりに

セメント系材料に代表される準脆性材料の動的破壊現象を適切に再現するには，破壊に伴う不連続面の形成過程に Cohesive crack モデルを導入した動的破壊解析手法の構築が必要である．

本論文では，その基礎的研究として，破壊エネルギーを直接考慮できる指数関数型の Cohesive crack モデルを離散ひび割れ間のバネ剛性として導入することにより，動的陽解法に基づく準脆性材料の破壊解析手法を開発した．そして，いくつかの数値実験を通して，準脆性材料の動的破壊問題に対する本解析手法の妥当性を検証した．まず，単純な要素試験により，静的解析との整合性や Cohesive crack モデルの再現性を検証した．さらに，動的破壊挙動に対する要素サイズ依存性が解消されることを確認するとともに，準脆性材料の破壊現象に特有の寸法効果を，動的問題においても再現可能であることを示した．また，レンガ構造の動的破壊シミュレーション例において，Cohesive crack モデルを用いることにより，準脆性材料の動的破壊挙動の高度化だけでなく安定化にも寄与することを示し，さらに速度の与え方に応じた動的問題特有の破壊形態の相違を再現することにより，本解析手法の妥当性と有効性を示した．

今後の課題として，任意方向の破壊進展や破壊後の界面の接触・摩擦応答のモデル化，および3次元化が挙げられる．また，本手法を構造－流体連成解析に応用し，災害シミュレーション技術へと発展させていく予定である．

謝辞

本研究は，第一著者が日本学術振興会特別研究員であった期間に行われ，特別研究員奨励費の援助により行われました．また，本研究の一部は，平成19年度科学研究費補助金（基盤研究(B)：19360207）の援助を得て行われました．ここに記して感謝いたします．

参考文献

1) Hillerborg, A., Modéer, M. and Petersson, P.-E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cem. Concr. Res.*, Vol.6, pp.773–782, 1976.
2) Bocca, P., Carpinteri, A. and Valente, S.: Mixed mode fracture of concrete, *Int. J. Solids. Struct.*, Vol.27, pp.1139–1153, 1991.
3) Remmers, J.J.C., de Borst, R. and Needleman, A.: A cohesive segments method for the simulation of crack growth, *Comput. Mech.*, Vol.31, pp.69–77, 2003.
4) Wells, G.N. and Sluys, L.J.: A new method for modelling cohesive cracks using finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.50, pp.2667–2682, 2001.
5) Gasser, T.C. and Holzapfel, G.A.: Modeling 3D crack propagation in unreinforced concrete using PUFEM, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.194, pp.2859–2896, 2005.
6) Moës, N. and Belytschko, T.: Extended finite element method for cohesive crack growth, *Engng. Fract. Mech.*, Vol.69, pp.813–833, 2002.
7) Unger, J.F., Eckardt, S. and Könke, C.: Modeling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.196, pp.4087–4100, 2007.
8) Mergheim, J., Kuhl, E. and Steinmann, P.: A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.63, pp.276–289, 2005.
9) 石井建樹，寺田 賢二郎，京谷孝史，岸野佑次：界面要素を用いた有限被覆法に基づく破壊進展解析法の開発，土木学会論文集, No.794/I-72, pp.213–225, 2005.
10) 車谷麻緒，寺田 賢二郎：多重被覆モデリングによる有限被覆法 —— 非均質脆性材料の不連続面進展解析：日本計算工学会論文集，論文番号 20060029, 2006.
11) Zhou, F. and Molinari, J.F.: Dynamic crack propagation with cohesive elements: a methodology to address mesh dependency, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.59, pp.1–24, 2004.
12) 野口裕久，滝戸まゆみ：粒子離散化にもとづく有限要素法による動的破壊進展解析，第19回計算力学講演会，日本機械学会，Vol.2006, pp.575–576, 2006.
13) Zhang, Z., Paulino, G.H., and Celes, W.: Extrinsic cohesive modelling of dynamic fracture and microbranching instability in brittle materials, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.72, pp.893–923, 2007.
14) Remmers J.J.C., de Borst, R. and Needleman, A.: The simulation of dynamic crack propagation using the cohesive segments method, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.56, pp.70–92, 2008.
15) Belytschko, T., Organ, D. and Gerlach, C.: Element-free galerkin methods for dynamic fracture in concrete, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.187, pp.385–399, 2000.
16) Rabczuk. T. and Eibl, J.: Simulation of high velocity concrete fragmentation using SPH/MLSPH, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.56, pp.1421–1444, 2003.
17) Rabczuk, T. and Belytschko, T.: Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.61, pp.2316–2343, 2004.
18) Réthoré, J., Gravouil, A. and Combescure, A.: An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.63, pp.631–659, 2005.
19) Menouillard, T., Réthoré, J., Moës, N., Combescure, A., and Bung, H.: Mass lumping strategies for X-FEM explicit dynamics: Application to crack propagation, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.74, pp.447–474, 2008.
20) Bažant, Z.P. and Planas, J.: *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*, CRC Press, 1998.
21) 車谷麻緒，寺田 賢二郎：Cohesive crack モデルに対する陽的近似アルゴリズムの提案とその性能評価，土木学会論文集 A, 印刷中.
22) 渡辺和明，永尾拓洋，花里利一，江草弘章：石・レンガ積み橋脚の耐震性に関する研究，大成建設技術センター報，Vol.39, pp.10-1–10-6, 2006.

（2008年4月14日受付）