

## 演算子積分法および高速多重極法を用いた 新しい二次元時間領域動弾性境界要素法について

A new time-domain boundary element method using the operational quadrature method and the fast multipole method in 2-D elastodynamics

齋藤 隆泰\*・石田貴之\*\*・福井卓雄\*\*\*・廣瀬壯一\*\*\*\*

Takahiro SAITOH, Takayuki ISHIDA, Takuo FUKUI and Sohichi HIROSE

\*正会員 博(工) 福井大学大学院工学研究科日本学術振興会特別研究員 PD (〒910-8507 福井県福井市文京 3-9-1)

\*\*非会員 修(工) (株) アーク情報システム (〒102-0076 東京都千代田区五番町 4-2 東プレビル)

\*\*\*正会員 工博 福井大学大学院工学研究科原子力・エネルギー安全工学専攻教授 (〒910-8507 福井県福井市文京 3-9-1)

\*\*\*\*正会員 工博 東京工業大学大学院情報理工学専攻教授 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

This paper presents a new time-domain Boundary Element Method (BEM) using the Operational Quadrature Method (OQM) and the Fast Multipole Method (FMM) in 2-D elastodynamics. In general, the use of direct time-domain BEM sometimes causes the instability of time-stepping solutions and needs much computational time and memory. To overcome these difficulties, in this paper, the Operational Quadrature Method developed by Lubich is applied to establish the stability behavior of the time-stepping scheme. Moreover, the Fast Multipole Method is adapted to improve the computational efficiency for large size problems. The formulation and numerical implementation of the new boundary element method, and the basic formulas for the fast multipole method such as the multipole expansion, the local expansion, and the translation relations of them in the fast multipole algorithm are presented. The accuracy, the computational efficiency and the applicability are checked by solving elastic wave scattering problems by cavities.

**Key Words** : Boundary Element Method (BEM), Operational Quadrature Method (OQM), Fast Multipole Method (FMM), Time-domain, Elastodynamics.

### 1. はじめに

境界要素法は、無限領域を容易に扱える唯一の数値解析手法であることから、無限および半無限媒体中の波動問題に対して幅広く利用されてきた<sup>1)</sup>。通常、境界要素法の時間領域解法では、時・空間について離散化を行い、各時刻の解をそれ以前の境界データから求める時間ステップ境界要素法が用いられている。しかしながら、そのような従来の時間領域境界要素法では、時間増分が小さい場合に解が数値的に不安定になること、大規模問題に対して計算時間・記憶容量が膨大となることが知られている<sup>2)</sup>。

そのような中、近年、演算子積分法 (Operational Quadrature Method)<sup>3)4)</sup> と呼ばれる繰込み積分を精度よく安定に計算できる方法を時間領域境界要素法に適用した、新たな時間領域境界要素法の開発に関する研究が行われている。例えば、二次元スカラー波動問題に対する Abreu<sup>5)</sup>ら、異方性問題に対しては Zhang<sup>6)</sup>が、三次元スカラー波動問題などに対して著者らの適用例<sup>7)</sup>もある。演算子積分法を用いた時間領域境界要素法は、解の安定性を向上させるだけでなく、従来の時間領域境界要素法に比べ定式化も容易になるが、大規模問題に対する計算効率を改善するものではない。そのため、著者らは、演算子積分法のみならず、さらに高速

多重極法 (Fast Multipole Method)<sup>8)9)</sup>をも用いることで計算の高速化・効率化を図る研究を行ってきた<sup>10)11)</sup>。時間領域境界要素法の高速化に関する研究は、PWTD アルゴリズムを用いた高橋ら<sup>12)</sup>による例があるものの、演算子積分法をベースとした境界要素法における高速多重極法の適用は著者らの研究以外に例はない。

本研究では前論文<sup>10)11)</sup>等での面外波動問題に対する報告をもとに、二次元時間領域動弾性問題に演算子積分法と高速多重極法を適用した新たな時間領域境界要素法について述べる。以下では、まず演算子積分法の基本的な考え方について述べた後、演算子積分法に基づいた時間領域境界要素法の定式化について述べる。次に、この型の境界要素法に高速多重極法を適用する方法について説明する。最後に、数値解析例を示し、本手法の有効性について検討する。

### 2. 演算子積分法 (Operational Quadrature Method)

はじめに、演算子積分法について述べる。Lubich は、繰込み積分  $f(t)*g(t)$  を、時間依存の関数である  $f(t-\tau)$  のラプラス変換を用いて離散化近似する手法を提案した (詳しい条件や証明については文献<sup>3)4)</sup>を参照)。一般

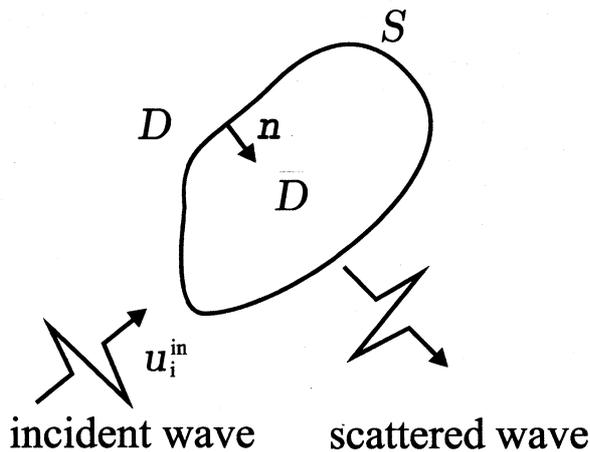


図-1 入射波による外部散乱問題

的に、繰込み積分は次のように表される。

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

式(1)で\*は時間に関する繰込み積を表す。Lubichの演算子積分法によれば、式(1)で表される繰込み積分は、時間 $t$ を時間増分 $\Delta t$ を用いて $N$ ステップに分割すれば、次のように近似される。

$$f(n\Delta t) * g(n\Delta t) \simeq \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t), \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (2)$$

ただし、 $\omega_j(\Delta t)$ は重み関数であり、時間依存関数 $f$ のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (3)$$

を用いて次のように表される。

$$\omega_n(\Delta t) \simeq \frac{\mathcal{R}^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\delta(z_l)}{\Delta t}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{L}} \quad (4)$$

ここで、 $f$ のラプラス変換 $F$ の存在を保証するためには、引数の実部が正のときに正則でなければならない。また、式(4)の $\delta(z_l)$ は線形マルチステップ法(差分法)における生成多項式の商であり、引数 $z_l$ は半径 $\mathcal{R} < 1$ の円周上の等分点 $L$ を考え、 $z_l = \mathcal{R}e^{2\pi i l/L}$ によって表される。そして、 $\mathcal{R}$ は目標とする精度によって決定されるパラメータである。以下では演算子積分法を二次元時間領域動弾性境界要素法に適用することを考える。

### 3. 二次元時間領域動弾性境界要素法

以下の定式化では、三次元直交直線座標系 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ に対し、変位は $(x_1, x_2)$ 方向成分のみを考え、全ての物理量は $x_3$ に依存しないものとした面内波動問題を考える。以上の規約の下、図1で表されるような等方弾性体の無限領域 $D$ 内における散乱体 $\bar{D}$ による弾性波動の散乱問題を考える。入射波 $u_i^{\text{in}}$ が存在し、散乱体 $\bar{D}$ の境界表面 $S$ によりそれは反射・散乱されるとする。このとき、入射波 $u_i^{\text{in}}$ が散乱体 $\bar{D}$ に到達するまで静かな過去を持つとする。すなわち、初期条件 $u_i(\mathbf{x}, t=0) = 0$ 及び $\partial u_i(\mathbf{x}, t=0)/\partial t = 0$ を考慮し、物体力を無視すれば、変位 $u_i$ 、対応する表面力 $t_i$ が満たす支配方程式及び境界条件は、それぞれ次のように表される。

$$\mu u_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu)u_{j,ji}(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{in } D \quad (5)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_1, \quad t_i = \bar{t}_i \quad \text{on } S_2, \quad S_2 = S \setminus S_1 \quad (6)$$

ただし、 $\rho$ は密度、 $\lambda, \mu$ はラメ定数を表し、 $(\cdot)$ は時間に関する微分を表す。また、 $\bar{u}_i$ 及び $\bar{t}_i$ は与えられた境界条件である。この問題の解は、次の時間領域境界積分方程式を解くことにより求まる。

$$C_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}, t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (7)$$

ただし、式(7)において、 $C_{ij}$ は境界表面 $S$ に依存する自由項である。通常的时间領域境界要素法では、境界積分方程式(7)に、境界上に適切な近似関数を導入し、時間・空間に関して離散化することで、境界未知量に関する代数方程式を得ることにより解が求まる。しかしながら、先に述べたように、通常的时间領域境界要素法では、時間増分が小さい場合の解の安定性に関する問題や大規模問題への対応方法について改善の余地がある。以下では、まず式(7)に演算子積分法を用いる方法について解説する。

### 4. 演算子積分法を用いた二次元動弾性時間領域境界要素法

式(7)の時間領域境界積分方程式を、 $M$ 個の一定要素で離散化し、数的に解くことを考える。滑らかな境界 $S$ に対して $\mathbf{x} \in D \rightarrow \mathbf{x} \in S$ を考慮すれば、時間増分 $\Delta t$ に対して、次の第 $n$ ステップにおける離散化された時間領域境界積分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) &= u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n [A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x})t_j^\alpha(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x})u_j^\alpha(k\Delta t)] \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、式(8)において、 $A_{ij}^m, B_{ij}^m$  は影響関数である。影響関数  $A_{ij}^m, B_{ij}^m$  は式(2)の離散化近似とその重み表現式(4)を用いた演算子積分法により、それぞれ次のように得ることができる。

$$A_{ij}^m(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (9)$$

$$B_{ij}^m(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (10)$$

ただし、 $s_l$  は  $s_l = \delta(z_l)/(\Delta t)$  で定義される。式(9)、(10)は離散フーリエ変換の形で表されていることから、それらの和には高速フーリエ変換を利用することにより計算を高速化することができる。また、影響関数の積分核は演算子積分法を用いたことでラプラス変換域での基本解となっていることに注意する。ラプラス変換域における基本解  $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  及び二重層核  $\hat{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  は次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) &= \frac{1}{2\pi\mu} \left[ K_0(sTr)\delta_{ij} - \frac{1}{sT} \{K_0(sTr) - K_0(sLr)\}_{,ij} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\hat{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = T_{jk}^{ny} \hat{U}_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, s) \quad (12)$$

ただし  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  であり、 $K_n$  は  $n$  次の第二種修正ベッセル関数、作用素<sup>1)</sup> $T_{jk}^{ny}$  は点  $\mathbf{y}$  に作用するものとする。また、式(11)中の  $s_L, s_T$  はそれぞれ表記を簡単にするために、縦波、横波の波速  $c_L, c_T$  で除した値  $s_L = \delta(z)/(c_L\Delta t)$ 、 $s_T = \delta(z)/(c_T\Delta t)$  とした。そのため、以降の定式化においても、同様の表記を用いたことに注意する。これより、式(8)を書き直せば、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^M [B_{ij}^0(\mathbf{x})u_j^\alpha(n\Delta t) - A_{ij}^0(\mathbf{x})t_j^\alpha(n\Delta t)] \\ &= u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} [A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x})t_j^\alpha(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x})u_j^\alpha(k\Delta t)] \end{aligned} \quad (13)$$

となる。よって、第  $n$  ステップ以前の境界値  $u_i^\alpha, t_i^\alpha$  が全て求まっていれば、式(13)の右辺は既知となり、第  $n$  ステップにおける境界値を決定することができる。つまり、 $n=1$  から始めて、順番に境界未知量を決定することができる。しかしながら、解くべき問題の規模が大きい場合には、式(13)を逐次的に解いていく上での計算時間・記憶容量を抑える工夫が必要である。以下では、式(13)に高速多重極法を適用し計算を効率的に行うことを考える。

## 5. 高速多重極法の適用

式(13)の右辺の計算を高速多重極法を用いて解くことを考える。高速多重極法のアルゴリズムは文献<sup>9)</sup>に詳しい。そのため、高速多重極法の詳しい説明については本論文では省略する。高速多重極法を境界要素法に適用するには基本解の多重極展開が必要である。本手法ではラプラス変換域での二次元動弾性問題の基本解(11)及び対応する二重層核(12)を利用する。ここでは、それらのポテンシャル表現を用いて、二次元動弾性場を縦波、横波のそれぞれの成分に関する多重極展開で表現することにより、高速多重極法を適用する。

### 5.1 二次元動弾性問題における多重極展開

まず、二次元動弾性問題におけるラプラス変換域での基本解(11)を次のようなポテンシャル表現に変形する。

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{\mu s_T^2} [\Phi_{,i}^U + e_{3ik} \Psi_{,k}^U] \quad (14)$$

ただし、 $\Phi^U$  および  $\Psi^U$  はそれぞれ縦波、横波成分に関する変位ポテンシャルであり、

$$\Phi^U = \frac{1}{2\pi} K_0(s_L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)_{,j} \quad (15)$$

$$\Psi^U = e_{3jl} \frac{1}{2\pi} K_0(s_T|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)_{,l} \quad (16)$$

で表される。

さて、図2のように観測点  $\mathbf{x}$ 、源点  $\mathbf{y}$  に対して、点  $\mathbf{y}$  の近くに多重極点  $\mathbf{y}_0$  をとり、点  $\mathbf{y}_0$  から見た  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の極座

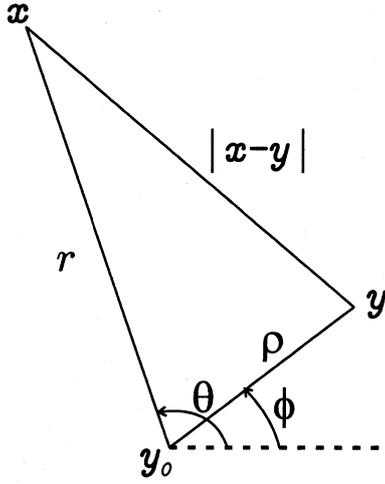


図-2 多重極展開

標成分をそれぞれ  $(r, \theta)$ ,  $(\rho, \phi)$  とすれば, 式 (15), (16) に Graf<sup>13)</sup> の加法定理を用いて展開すると,

$$\Phi^U(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n^U K_n(s_L r) e^{in\theta} \quad (17)$$

$$\Psi^U(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n^U K_n(s_T \rho) e^{in\phi} \quad (18)$$

と多重極展開できる. ここで, 式 (17), (18) において,  $M_n^U, N_n^U$  はそれぞれ点  $y_0$  に関する縦波, 横波に関する多重極モーメントであり,

$$M_n^U = -\frac{\partial}{\partial y_j} [I_n(s_L \rho) e^{-in\phi}] \quad (19)$$

$$N_n^U = -e_{3jl} \frac{\partial}{\partial y_l} [I_n(s_T \rho) e^{-in\phi}] \quad (20)$$

で定義される. ここで  $I_n$  は  $n$  次の第一種修正ベッセル関数である. 二重層核に関しても同様に考えれば,  $y_0$  に関する縦波, 横波に関する多重極モーメント  $M_n^S, N_n^S$  をそれぞれ求めることができる.

さて, 式 (17), (18) の多重極展開は, 面外波動場における多重極展開と同様の形<sup>10)</sup> をしている. よって, 高速多重極法を構成する上で必要な各種移動公式 (M2M, M2L, L2L) も面外波動場における移動公式と同様の形式で表すことが可能である.

## 5.2 多重極係数, 局所展開係数の移動公式

縦波, 横波に関する多重極モーメントが存在することから, それぞれの成分に関して各種移動公式を用いて計算することを考える. 多重極展開 (17), (18) に対応し, 観測点  $x$  の近傍点  $x_0$  まわりの局所展開を次のように定義する.

$$\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n I_n(s_L r) e^{-in\theta} \quad (21)$$

$$\Psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n I_n(s_T \rho) e^{-in\theta} \quad (22)$$

ここで  $r, \theta$  はそれぞれ点  $x_0$  を基準とした  $x$  の極座標成分  $(r, \theta)$  である. また  $L_n, H_n$  はそれぞれ  $M_n, N_n$  に対応した縦波, 横波に関する局所展開係数である.

多重極点の移動による多重極係数の変換式 (M2M), 多重極係数から局所展開係数への変換 (M2L), 局所展開点の移動による局所展開係数の変換式 (L2L) は Graf の加法定理をそれぞれの移動点に対して適用すれば導くことが出来る. それらの結果をまとめると, 縦波, 横波に関する多重極係数  $M_n, N_n$  に対する M2M は,

$$M'_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m I_{n-m}(s_L \rho) e^{-i(n-m)\phi} \quad (23)$$

$$N'_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} N_m I_{n-m}(s_T \rho) e^{-i(n-m)\phi} \quad (24)$$

であり, M2L は,

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m M_m K_{n+m}(s_L \rho) e^{i(n+m)\phi} \quad (25)$$

$$H_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m N_m K_{n+m}(s_T \rho) e^{i(n+m)\phi} \quad (26)$$

であり, そして L2L は,

$$L'_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-m} L_m I_{n-m}(s_L \rho) e^{i(n-m)\phi} \quad (27)$$

$$H'_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-m} H_m I_{n-m}(s_T \rho) e^{i(n-m)\phi} \quad (28)$$

で与えられる. ただし,  $M'_n, N'_n$ , および  $L'_n, H'_n$  はそれぞれ多重極展開点, 局所展開点の移動により得られる新しい多重極係数, 局所展開係数を表す. また, 座標値  $(\rho, \phi)$  は, 新しい展開点から古い展開点を見た相対座標の極座標成分である.

## 5.3 多重極展開のスケーリング

修正ベッセル関数は引数  $|z|$  が大きいとき,

$$I_n(z) \sim e^{|\Re[z]|}, \quad K_n(z) \sim e^{-z} \quad (29)$$

である. したがってセルのサイズが大きい場合には M2M や L2L の変換において展開係数や, 修正ベッセル関数の値が相当に大きく (小さく) なり, 数値計算で扱える

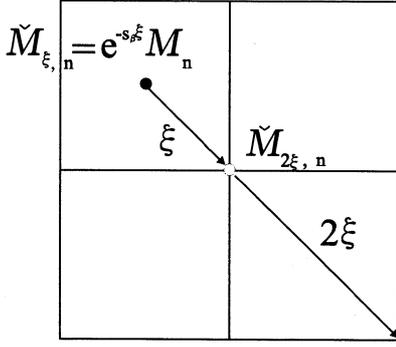


図-3 M2M の場合のスケーリング

範囲をこえてしまう可能性がある。したがって、多重極展開や各種移動公式に適切なスケーリングを施してやるのが安定なアルゴリズムのために必須となる。

そのため、第一種、第二種修正ベッセル関数  $I_n, K_n$  に対して次のようなスケーリングを施す。

$$\check{I}_n(z) = e^{-z} I_n(z), \quad \check{K}_n(z) = e^z K_n(z) \quad (30)$$

これより、セル  $C_\xi$  ( $\xi$  はセルの対角長の半分の長さを表す) におけるスケーリングされた多重極展開係数、および局所展開係数もそれぞれ次のように表すこととする。

$$\check{M}_{\xi, n} = e^{-sL\xi} M_n, \quad \check{N}_{\xi, n} = e^{-sT\xi} N_n \quad (31)$$

$$\check{L}_{\xi, n} = e^{sL\xi} L_n, \quad \check{H}_{\xi, n} = e^{sT\xi} H_n \quad (32)$$

ここで  $\check{M}_{\xi, n}, \check{N}_{\xi, n}$  および  $\check{L}_{\xi, n}, \check{H}_{\xi, n}$  はそれぞれスケーリングされた多重極係数、局所展開係数を表す。このとき、演算子積分法の成立条件から  $\Re[s_\beta]\rho > 0$  ( $\beta = L$  or  $T$ ) であることに注意する。これより、スケーリングされた多重極展開は、式 (17), (18) に対応して、

$$\Phi^U(\mathbf{x}) = \frac{e^{sL(\xi-r)}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{M}_{\xi, n}^U \check{K}_n(sLr) e^{in\theta} \quad (33)$$

$$\Psi^U(\mathbf{x}) = \frac{e^{sT(\xi-r)}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{N}_{\xi, n}^U \check{K}_n(sTr) e^{in\theta} \quad (34)$$

であり、またスケーリングされた局所展開は、式 (21), (22) に対応して、

$$\Phi(\mathbf{x}) = e^{-sL(\xi-r)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{L}_{\xi, n} \check{I}_n(sLr) e^{-in\theta} \quad (35)$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = e^{-sT(\xi-r)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{H}_{\xi, n} \check{I}_n(sTr) e^{-in\theta} \quad (36)$$

で表される。M2M は、セル  $C_\xi$  から親セル  $C_{2\xi}$  に対し図3のように考えて、

$$\check{M}_{2\xi, n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \check{M}_{\xi, m} \check{I}_{n-m}(sL\xi) e^{-i(n-m)\phi} \quad (37)$$

$$\check{N}_{2\xi, n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \check{N}_{\xi, m} \check{I}_{n-m}(sT\xi) e^{-i(n-m)\phi} \quad (38)$$

となる。M2L の場合は同一レベル (セルの大きさが等しいもの) 同士の変換である。セル  $C_\xi$  から遠方セル  $C_\xi$  へのスケーリングされた M2L は、

$$\check{L}_{\xi, n} = \frac{e^{sL(2\xi-\rho)}}{2\pi} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \check{M}_{\xi, m} \check{K}_{n+m}(sL\rho) e^{i(n+m)\phi} \quad (39)$$

$$\check{H}_{\xi, n} = \frac{e^{sT(2\xi-\rho)}}{2\pi} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \check{N}_{\xi, m} \check{K}_{n+m}(sT\rho) e^{i(n+m)\phi} \quad (40)$$

となり、セル  $C_{2\xi}$  から子セル  $C_\xi$  へのスケーリングされた L2L は、

$$\check{L}_{\xi, n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{(n-m)} \check{L}_{2\xi, m} \check{I}_{n-m}(sL\xi) e^{i(n-m)\phi} \quad (41)$$

$$\check{H}_{\xi, n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{(n-m)} \check{H}_{2\xi, m} \check{I}_{n-m}(sT\xi) e^{i(n-m)\phi} \quad (42)$$

で表される。以上で、高速多重極アルゴリズムを実行する準備は整った。

#### 5.4 時間ステップ解析と高速多重極法の適用

今、式 (13) における各ステップ毎の行列ベクトル積の計算に高速多重極法を適用することを考える。例えば、式 (13) の右辺第二項の行列ベクトル積  $\sum_{\alpha=1}^M A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}) t_j^\alpha(k\Delta t)$  の計算部分に関する遅延ポテンシャルを具体的に書き下すと、

$$u_i^{RA}(\mathbf{x}, n\Delta t) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\alpha=1}^M A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}) t_j^\alpha(k\Delta t) \\ = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathcal{R}^{-(n-k)}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[ \sum_{\alpha=1}^M t_j^\alpha(k\Delta t) \int_S \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha, s_l) dS_y \right] \\ \times e^{-2\pi i(n-k)l/L} \quad (43)$$

と書ける。式 (43) における右辺の [ ] 内は境界上の積分の項であるから、この部分の計算が高速多重極法により高速化される。また、その [ ] 内の計算に対し、FFT

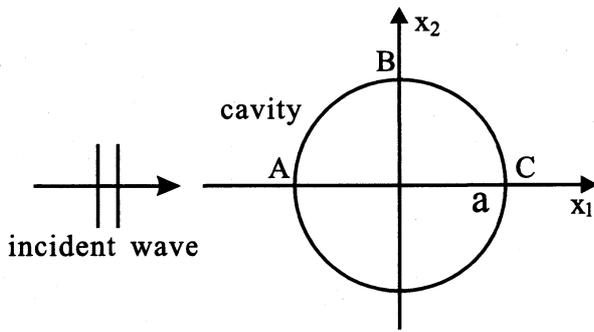


図-4 半径  $a$  の空洞による入射波の散乱解析モデル

表-1  $c_L \Delta t/a$  を変化させた場合の A, C 点における  $c_L t/a = 8.0$  での  $u_1/u_0$  の相対誤差

$c_L \Delta t/a$	0.25	0.125	0.0625
points			
A	7.81E-03	9.92E-04	2.15E-03
C	8.03E-02	1.26E-02	4.03E-03

を適用すれば  $A^m t^k = \sum_{\alpha=1}^M A_{ij}^m(x) t_j^\alpha(k\Delta t)$ , ( $m = 0, \dots, L-1$ ) が計算される。いま、式 (43) において、各ステップ毎の遅延ポテンシャルの計算を行列の形で表せば、 $\mathbf{u}^{R_A, n} = \{u_i^{R_A}(\mathbf{x}^\alpha, n\Delta t)\} (\alpha = 1, \dots, M)$  として、

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{R_A, 1} \\ \mathbf{u}^{R_A, 2} \\ \mathbf{u}^{R_A, 3} \\ \mathbf{u}^{R_A, 4} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{R_A, n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{A}^1 t^1 \\ \mathbf{A}^2 t^1 + \mathbf{A}^1 t^2 \\ \mathbf{A}^3 t^1 + \mathbf{A}^2 t^2 + \mathbf{A}^1 t^3 \\ \dots \\ \mathbf{A}^{n-1} t^1 + \dots + \mathbf{A}^1 t^{n-1} \end{bmatrix} \quad (44)$$

となる。高速多重極法を用いるので、実際には、例えば式 (44) の右辺の計算を行うために  $A^m$  の係数は保存しない。つまり、計算には、第  $n$  ステップまでの遅延ポテンシャルの部分 (例えば式 (44) 右辺各行の和) を格納する配列一列のみを用意し、第  $k$  ステップ目の  $t^k$  が得られた直後に高速多重極法と FFT により  $A^m t^k$  を計算し、その用意した配列へ加算していけばよい。各ステップ毎に得られた部分和は二度と必要としないので、記憶しておく必要もない。従来の時間領域境界要素法では通常、 $A^m$  の係数を保存しておく必要があることから、高速多重極法を用いることにより大幅に記憶容量を削減することが可能である。

## 6. 数値解析例

以下、ポアソン比 0.25 の等方弾性体に対して、境界要素を一定要素で離散化することにより解析を行った。

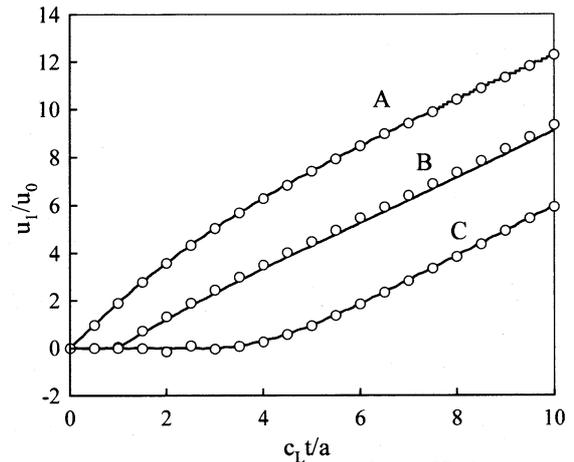


図-5 A, B, C 点における  $u_1/u_0$  変位の時間変化 (Pao と Mow の解との精度比較)

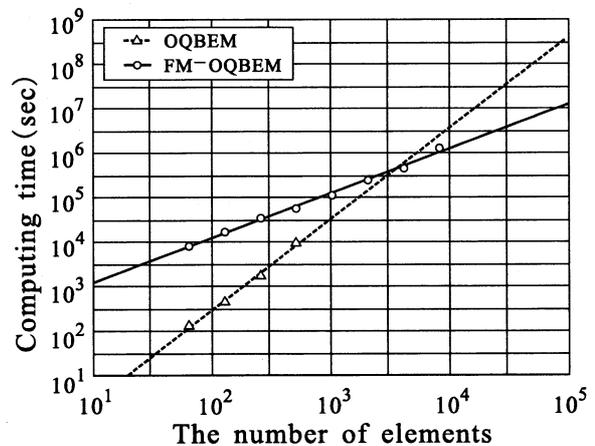


図-6 演算子積分法を適用した場合 (OQBEM) とさらに高速多重極法を適用した場合 (FM-OQBEM) の要素数と計算時間の関係

この場合、縦波と横波の速度比は  $c_L/c_T = \sqrt{3}$  となる。

### 6.1 演算子積分法を用いた場合の精度確認

まず、図 4 で表されるような半径  $a$  の 1 つの空洞による入射波の散乱解析を行い、演算子積分法を適用した場合の精度を確認する。ここでは、入射波として、次の平面波を用いた。

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0 \delta_{i1} [(c_L t - x_1 - a)/a] H(c_L t - x_1 - a) \quad (45)$$

ここに、 $u_0$  は振幅、 $H$  はステップ関数である。時間増分は  $c_L \Delta t/a = 0.125$  とした。また、演算子積分法におけるパラメータを  $L = 128$ ,  $R \approx 0.905798$  とした (演算子積分法におけるパラメータの詳しい設定方法は参考文献<sup>7)10)</sup>等を参照)。総ステップ数  $N$  は  $N = 128$  とし、全要素数は 64 である。 $N = L$  とした理由は、式 (9) や (10) の影響関数の計算や、式 (44) の時間ステッ

ブ解析における計算を、FFTを用いて容易にかつ高速に計算するためである。図5は図4のA, B, C点における変位  $u_1/u_0$  の時刻歴を示している。比較のために、PaoとMow<sup>14)</sup>による周波数領域での解析解をFFTによって逆フーリエ変換して得られた時間領域の解を実線で示している。両者は概ねよく一致している。また、表1は  $c_L \Delta t/a$  を変化させた場合のA, C点における  $c_L t/a = 8.0$  でのPaoとMowの解と比較した  $u_1/u_0$  の相対誤差を示している。 $c_L \Delta t/a$  が小さい場合でも計算は安定である。

## 6.2 演算子積分法および高速多重極法を用いた場合の計算効率の確認

次に、同様の条件で要素数のみを変化させた場合の計算時間を、演算子積分法のみ用いた場合(OQBEM)と、さらに高速多重極法を用いた場合(FM-OQBEM)の二通りで解析し、計算効率の検証を行った。ただし、式(17)や式(18)などにおける多重極展開や局所展開による無限和を有限項数  $p = \pm 10$  として打ち切った。図6に要素数と計算時間の関係を両対数グラフで表したものを示す。なおOpenMPなどの並列化は行っていない。図6の直線は図6のプロットした値から推定したものである。OQBEMでは、必要記憶容量は  $O(M^2N)$  である。よって記憶容量の制限から、要素数が512程度までしか計算を実行できなかった。またOQBEMでは第  $N$  ステップまでの全計算量は  $O(M^2LN)$  であるが、FM-OQBEMの全計算量はおよそ  $O(MLN)$  程度である。図6より、OQBEMの場合、計算時間はほぼ要素数の2乗に比例しており、FM-OQBEMの場合は、計算時間はほぼ要素数に比例していることがわかる。よって、要素数が少ない場合はOQBEMの方が速いが、要素数が数千程度ではFM-OQBEMの方が速くなる。

なお、ここで行った計算例は、要素数に対する計算時間を計測するために行ったもので、実用的な計算を想定したものではないことを注意しておく。実用的には、要素サイズに応じて時間増分を決めることになるので、要素数が増加すれば時間増分が小さくなって、同じ問題を解く場合は全体の計算時間は増加する。しかしながら、そのような場合でも高速多重極法を適用した場合は計算量を低減できることは上の検証結果より明らかである。

## 6.3 多数の空洞による散乱解析

最後に、図7に示すように正方配置された  $8 \times 8$  の空洞群による散乱解析を行った。空洞の半径を  $a$  とし、 $x_1, x_2$  方向に対する空洞の中心間隔はそれぞれ  $3a$  としている。各空洞における要素数は64であり、全要素数は4096である。入射波は  $c_L t/a = 0$  で図7における左一列の空洞の前面に到達するとして、次の式

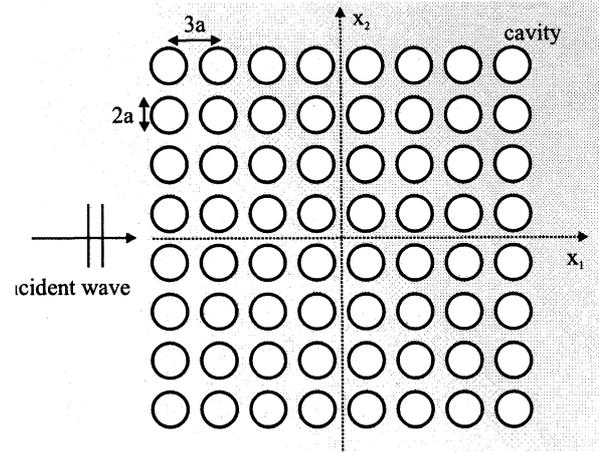


図-7 半径  $a$  の  $8 \times 8$  空洞群による散乱解析モデル

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0 \delta_{i1} [1 - \cos^* [\pi(c_L t - x_1 - 11.5a)/a]] / 2,$$

ただし

$$\begin{cases} \cos^*[\alpha] = \cos[\alpha], & \text{for } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ \cos^*[\alpha] = 1, & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (46)$$

を用いた。演算子積分法におけるパラメータは、 $L = 256$ ,  $\mathcal{R} \simeq 0.951734$ ,  $c_L \Delta t/a = 0.125$ , 総ステップ数  $N$  は  $N = 256$  とした。また、多重極展開の項数は  $p = \pm 10$  とした。通常、周波数領域の高速多重極法では多重極展開の項数  $p$  をレベルによって変化させる必要がある<sup>1)</sup>。しかしながら、時間領域を扱う本手法の場合は、演算子積分法と対象とするラプラス変換域での基本解の特性により、周波数領域の場合と同様の展開項数と精度の関係を利用することはできない。そのため、ここでは試験的に多重極展開の項数を各レベルで一定としている。なお、この問題は演算子積分法のみ用いた場合では記憶容量の制限から解くことができなかった。そのため、高速多重極法を用いることで記憶容量を抑え、計算を効率的に行っている。また、スケーリングを用いない場合、修正ベッセル関数の値が数値計算で扱える範囲を超えたために安定に解析することができなかった。よって、スケーリングを導入した計算を行っている。図8に空洞群周辺の時刻  $c_L t/a = 2.5$ ,  $c_L t/a = 12.5$ ,  $c_L t/a = 22.5$  における  $u_1/u_0$  の波動場を示した。なお計算にはOpenMPを利用した8つのスレッド(Intel(R) Xeon(R) E5310, 1.60GHzを利用)による並列化も行っている。全計算時間はおよそ49時間12分であった。

## 7. おわりに

演算子積分法を用いた二次元時間領域動弾性境界要素法の定式化、および高速多重極法を適用する方法について述べた。演算子積分法による時間領域境界要素法の定式化は従来の時間領域境界要素法に比べ極めて

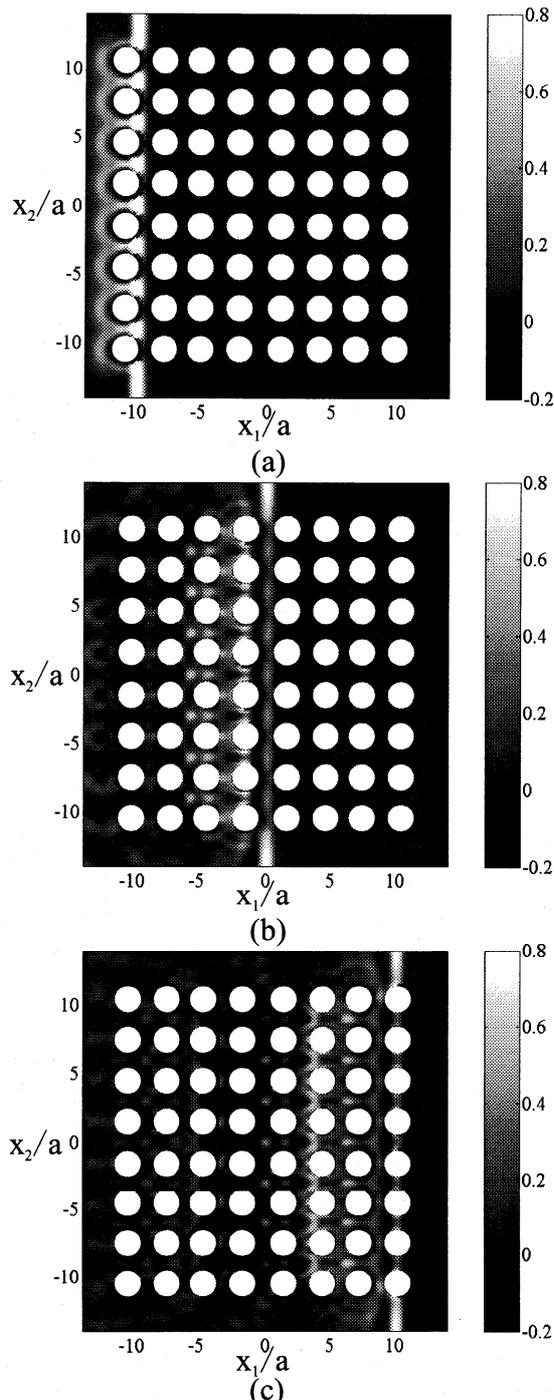


図-8 8×8 空洞群周辺の  $u_1/u_0$  変位場の時間変化 (a)  $c_L t/a = 2.5$  (b)  $c_L t/a = 12.5$  (c)  $c_L t/a = 22.5$  の場合

簡便であり、各ステップ毎の計算は周波数領域の境界要素法と同様の手順で実行できる。また、時間領域基本解を直接に必要とせず、基本解のラプラス変換が閉じた形で与えられる問題では容易に適用できる。そのため、粘弾性波動問題のような時間領域基本解を解析的に閉じた形で求めることができなかった問題にも、今後大いに発展できる<sup>11)</sup>。一方、高速多重極法の適用も比較的容易である。領域の大きな問題を解く場合には、アルゴリズムの中にスケールリングを導入する必要はあるも

の、スケールリングをしない場合と同形式で多重極係数や局所展開係数の移動公式を表すことができる。多重極展開の展開項数と計算精度に関する詳細は今後の課題であるが、展開項数は比較的小さくすることができ、計算精度も維持することができる。

最後に、大規模波動問題にも適用し、本手法の適用性について示した。今後は三次元動弾性問題へと拡張する予定である。

#### 参考文献

- 1) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法，京都大学学術出版会，(2000)。
- 2) 福井卓雄：境界要素法の研究-高速・高精度計算法の開発と応用- 京都大学学位論文，(1998)。
- 3) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 129-145.
- 4) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus II, *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 413-425.
- 5) Abreu, A. I., Carrer, J. A. M. and Mansur, W. J.: Scalar wave propagation in 2D: a BEM formulation based on the operational quadrature method, *Engineering analysis with Boundary Elements*, **27** (2003), pp. 101-105.
- 6) Zhang, Ch.: Transient elastodynamic antiplane crack analysis of anisotropic solids, *Int. J. Solids and Structures*, **37** (2000), pp. 6107-6130.
- 7) 斎藤隆泰・廣瀬壮一・福井卓雄・石田貴之：三次元スカラー波動および弾性波動問題における演算子積分時間領域境界要素法，応用力学論文集，**10** (2007)，pp.217-224.
- 8) Rokhlin, V: Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60** (1985), pp. 187-207.
- 9) Greengard, L. and Rokhlin, V.: A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.*, **73** (1987), pp. 325-348.
- 10) 福井卓雄・岡山美央・石田貴之：2次元波動伝播問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用，計算数理工学論文集，**6-2** (2006)，pp.153-158.
- 11) 斎藤隆泰・石田貴之・福井卓雄・廣瀬壮一：粘弾性面外波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用，計算工学論文集，原稿番号 200803031,(2008)。
- 12) Takahashi, T., Nishimura, N. and Kobayashi, S.: A fast BIEM for three-dimensional elastodynamics in time domain, *Engineering analysis with Boundary Elements*, **28** (2004), pp.165-180.
- 13) Abramowitz, M. and Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, (1960).
- 14) Pao, Y.-H. and Mow, C. C.: *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane and Russak, New York, (1973).

(2008年4月14日 受付)