応用力学論文集 Vol.11, pp.167-176　(2008 年 8 月)　土木学会

き裂進展を考慮した構造最適設計

Structural optimization considering cracks propagation

鈴木克幸*・市川幸太**・稲田二郎***・栗原康行****
Katsuyuki Suzuki, Kota Ichikawa, Jiro Inada and Yasuyuki Kurihara

* Ph.D,　東京大学大学院准教授,　新領域創成科学研究科（〒227-8561 千葉県柏市柏の葉 5-1-5）
** 修士,　東京大学大学院 新領域創成科学研究科（〒227-8561 千葉県柏市柏の葉 5-1-5）
*** 東京大学大学院 新領域創成科学研究科（〒227-8561 千葉県柏市柏の葉 5-1-5）
****JFE 技研　土木・建築研究部（〒210-0855　神奈川県川崎市川崎区南渡田町 1-1）

In most structural optimization, the stress level based on the linear structural analysis is used as objective function or constraints. In this paper new structural optimization concept is proposed, that maximize lifetime period of structure based on the crack propagation analysis using X-FEM. In the optimization, period until structure became unstable is used as objective function to maximize, and volume of material is constrained. The shape of the structure is changed using basis vector method. In the example, it is shown that the optimized shape based on the von-Mises stress level and the optimized shapes based on the crack propagation analysis are quite different

Key Words: *crack propagation analysis, X-FEM, structure optimization, shape optimization*

1. 序論

近年, CAE の発展と普及により, 構造物の機械的強度を超えた破壊は減少している. 一方, き裂が進展することにより発生する疲労破壊は, 今日も発生し続けている. 疲労破壊による事故が発生し続ける原因として, 疲労寿命推定の不完全さが挙げられる. 現状の疲労寿命の推定は, 多くの場合線形弾性解析により導出された応力を用いて, S-N 線図から推定している. 一方, き裂の発生箇所により, 進展しやすいき裂と進展しにくいき裂が存在することはよく知られており, またき裂の位置によっては最終的な破断を引き起こさないき裂も存在する. この評価をきちんと行うためには, き裂の進展を考慮した解析が不可欠である.

さらに, 構造の最適設計を行う場合, 現状ではほとんどのケースでは線形弾性解析による応力レベル（多くの場合は等価応力）を目的関数, あるいは制約条件に使った最適化を行っている. しかし, 前述のように構造の疲労寿命を評価する場合, 異なる構造部位を単に応力レベルで評価するのは問題があり, それぞれの箇所のき裂進展を考慮した最適化を行う必要がある.

そこで, 本研究ではき裂進展の解析を行い, 最終的な構造物としての破壊に至るまでの寿命（繰り返し数）を最大化させるように構造の形状最適設計を行うことを試みる.

2. 解析手法

2.1 X-FEM

通常, 有限要素法に基づくき裂進展解析では, き裂の進展に合わせてメッシュの切り直しが必要になる. Belytschko ら[1]によって提案された extended finite element method (X-FEM)は有限要素法をベースとして, その要素内に不連続面を定義することによりき裂の不連続性を表現するとともに, き裂先端の応力, 変位の特異性を表現することを可能にした手法である. 変位の近似式は次式で表される.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i\in I} N_i(\mathbf{x})\mathbf{d}_i + \sum_{j\in J} N_j(\mathbf{x})H(\mathbf{x})\mathbf{b}_j + \sum_{k\in C} N_k(\mathbf{x})\sum_{l=1}^{4}\psi_l(\mathbf{x})\mathbf{c}_k^l \tag{1}$$

ここで, N_i は節点 i に関する（通常の FEM と同じ）形状関数であり, $H_{(x)}$はき裂面の不連続性を表わすためのヘビサイド関数であり, 点 $\mathbf{x}$ のき裂面からの符号付き距離 y の正負により下記のように定義される.

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \tag{2}$$

そして $\psi_l(\mathbf{x})$ はき裂端周辺の特異変位場を表す関数の基底であり, 次式で表される.

$$\{\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{r}\cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sqrt{r}\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \sqrt{r}\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\theta \\ \sqrt{r}\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\theta \end{Bmatrix}^T \tag{3}$$

ただし，これらはき裂端を原点とし，き裂線に平行にx軸をとった局所直行座標系及びそれと対応する極座標系の関数である．また，Jはき裂面周辺の変位の不連続性を考慮する節点の集合，そしてCは，き裂端周辺の特異性変位場を考慮する節点の集合である(図-1 参照)．すなわち，節点の内挿関数がき裂線によって完全に切断されるような節点は集合Jに属し，内挿関数が完全には切断されず，その内部にき裂端を含むような節点は集合Cに属する．そして$\mathbf{d}_i$，$\mathbf{b}_j$，$\mathbf{c}_k^l$は適当な節点において定義される自由度である．

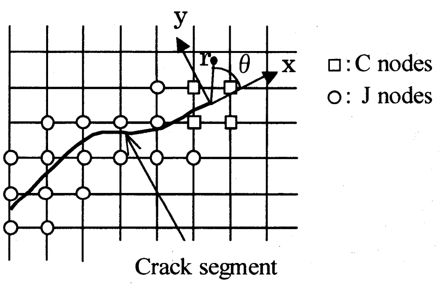


図-1　節点へのあらたな自由度の付加

2.2　混合モードき裂の応力拡大係数評価法

混合モードき裂では，通常のJ積分を実行してJ値を求めてもK_I値，K_{II}値を個別に求めることはできない．モード分離を行うため本研究では相互積分法[2)]を用いた．まず，ある形状のき裂に対して，変位場・ひずみ場・応力場が異なる二つの独立した状態（状態 1，状態 2）が存在するものとする．ここで，状態 1 は現実にK値を求めたい(モード分離を行いたい)状態であるのに対して，状態 2 は補助的に導入するものである．そしてそれら 2 つの状態を重ね合わせた状態を新たに考え，それに対してJ積分を実行する．すると，次式のように式展開される．

$$\begin{aligned} J^{(1+2)} &= \int_\Gamma \left[\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)})(\varepsilon_{ij}^{(1)}+\varepsilon_{ij}^{(2)})\delta_{1j} \right. \\ &\quad \left. -(\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)})\frac{\partial(u_i^{(1)}+u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] n_j \mathrm{d}\Gamma \\ &= J^{(1)}+J^{(2)}+I^{(1,2)} \end{aligned} \tag{4}$$

ここで各物理量の右上添え字(1)または(2)はそれぞれ状態 1，または 2 に関する量であることを示している．そして$J^{(1)}$，$J^{(2)}$は，状態 1 と状態 2 がそれぞれ単独で存在した場合の J 積分の値である．それに対して$I^{(1,2)}$は状態 1 と状態 2 の相互積分(interaction integral) と呼ばれ，次式で計算される．

$$I^{(1,2)} = \int_\Gamma \left[\sigma_{kl}^{(1)}\varepsilon_{kl}^{(2)}\delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)}\frac{\partial(u_i^{(2)})}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)}\frac{\partial(u_i^{(1)})}{\partial x_1} \right] n_j \mathrm{d}\Gamma \tag{5}$$

この連成項$I^{(1,2)}$とK値の間には式(6)の関係が成り立つ．ただしE^*はヤング率であり，平面ひずみ状態の場合は等価な平面応力状態に変換する．

$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E^*}(K_{\mathrm{I}}^{(1)}K_{\mathrm{I}}^{(2)} + K_{\mathrm{II}}^{(1)}K_{\mathrm{II}}^{(2)}) \tag{6}$$

ここで補助状態(状態 2)を純粋な単一モード状態($K_{\mathrm{I}}^{(2)}=1, K_{\mathrm{II}}^{(2)}=0$ または$K_{\mathrm{I}}^{(2)}=0, K_{\mathrm{II}}^{(2)}=1$)と仮定し，そのような場の関数を式(5)に代入すれば，その問題(状態 1)の$K_{\mathrm{I}}^{(1)}, K_{\mathrm{II}}^{(1)}$を得ることができる．

$$\begin{cases} K_{\mathrm{I}}^{(1)} = \dfrac{E^*}{2} I^{(1,\mathrm{Mode\,I})} \\ K_{\mathrm{II}}^{(1)} = \dfrac{E^*}{2} I^{(1,\mathrm{Mode\,II})} \end{cases} \tag{7}$$

2.3　領域積分法

式(5)の積分計算は境界 Γ 上で実行されるが，これを領域積分に変換することによって数値計算が好都合になる．これは一般に領域積分法[3)] (Domain integral method)と呼ばれる方法である．式(5)の被積分関数にある重み関数 $q(x_1, x_2)$をかけ，その後 Gauss の発散定理を適用する．そして境界Γがき裂端に収縮した極限を考えるものとすると，式(8)のように変形できる．

$$\begin{aligned} I^{(1,2)} &= \int_\Gamma \left[W^{(1,2)}\delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)}\frac{\partial(u_i^{(2)})}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)}\frac{\partial(u_i^{(1)})}{\partial x_1} \right] q n_j \mathrm{d}\Gamma \\ &= \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)}\frac{\partial(u_i^{(2)})}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)}\frac{\partial(u_i^{(1)})}{\partial x_1} - W^{(1,2)}\delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} \mathrm{dA} \end{aligned} \tag{8}$$

ここでAは，図-2 の境界$\Gamma, \Gamma_0, C_+, C_-$によって囲まれる領域である．ただし，境界$\Gamma_0$は境界$\Gamma$の外側に存在する境界であるものとする．

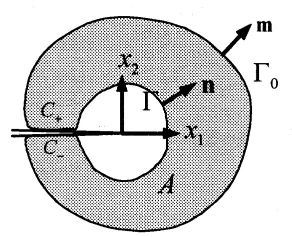


図-2 領域積分法の概念図

また，重み関数 q は領域A内部に分布し，式(9)を満足する十分なめらかな関数であるとする．

$$q(x_1,x_2)=\begin{cases}1 & \text{on } \Gamma\\ 0 & \text{on } \Gamma^0\end{cases} \tag{9}$$

境界 Γ に沿った経路であれば，方向，すなわちベクトル量を扱わなければならないのに対し，領域であれば「き裂端からの距離」などのようなスカラー量を扱うことになるので処理が簡単になる．なお，領域積分における積分点数は各要素4×4点とした．

重み関数 $q(\mathrm{x})$ の具体的形状，大きさに関しては，筆者らが文献4)において検討を行っている．ここでは，形状を台地形(円)とし，また，き裂端からの広がりは中心（き裂端)から要素2個分の長さとした．

2.4 き裂進展方向

き裂が進展するときの進展方向角度 θ の決定には最大円周応力基準（maximum circumferential stress criterion）を用いた．これは円周方向の応力が最大となるような方向にき裂が進展するという仮説に基づいている．各計算ステップにおいて得られた K_I 値，K_{II} 値を用いて式(10)により進展方向角度が求まる．

$$\theta = 2\arctan\frac{1}{4}\left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{K_{\mathrm{II}}}\pm\sqrt{\left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{K_{\mathrm{II}}}\right)^2+8}\right) \tag{10}$$

これは互いに直交する2つの方向(主応力方向)であり，このうちの円周方向の引張り応力が最大となる方向にき裂を進展させる．

2.5 き裂進展長さ

繰り返し荷重が与えられた時のき裂伝播寿命の計算で広く使われている手法として Paris によって提案されたパリス則[5)]があり，き裂進展長さの繰り返し回数に対する関係が以下の関係で示される．

$$\frac{da}{dN}=C\Delta K^m \tag{11}$$

ここで，a:き裂進展長さ，N:繰返し回数，C, m:伝播定数，ΔK:応力拡大係数範囲である．具体的な値としては，文献6)を参考に C=5.4654e-12, m=2.76を用いた．

き裂が1つの場合は，適当なき裂進展長さ Δa を定義し，応力，変位場に対して計算した応力拡大係数範囲 ΔK を用い，以下の式よりそのき裂進展長さに至るまでの繰り返し数を求める．

$$\Delta N=\frac{\Delta a}{C\Delta K^m} \tag{12}$$

また，複数のき裂がある際は，き裂進展量は，最大き裂進展長さ Δa に対して，各き裂における応力拡大係数範囲 ΔK_i の中の最大のものを $\Delta K_{\max}$ とすれば，それに至るまでの最小繰り返し数は

$$\Delta N_{\min}=\frac{\Delta a}{C\Delta K_{\max}{}^m} \tag{13}$$

であり，各き裂 i の進展長さは下記のようになる．

$$\Delta a_i = C\Delta K_i{}^m \Delta N_{\min} \tag{14}$$

2.6 初期き裂作成方向

き裂進展解析においては，き裂進展解析を行うためには初期き裂が存在しなければならない．しかし，実際の構造物において初期状態でき裂が予め存在するということはないので，初期のき裂が発生のメカニズムに照らし合わせて，初期き裂を設定する必要がある．き裂発生の過程は，下記の通りである[6)]．

① 結晶におけるすべり発生
② 多点表面き裂の発生
③ 多点表面き裂の成長
④ 合体
⑤ ひとつの大きな表面き裂

この過程の①ー③において，初期の表面き裂の成長段階があることが分かる．このとき，き裂成長方向は，通常のき裂進展の場合と同様のメカニズムで，円周応力が最大である方向にき裂が発生するという仮定に基づき，初期き裂発生方向を、最大主応力方向に対して垂直な方向と考え，き裂発生の基点に対して,その方向に十分短い初期き裂を配置することとする．

3. 最適設計

3.1 目的関数，制約条件

本論文では序論に述べたように，疲労によるき裂進展による構造破壊に至るまでを構造の寿命と考え，複数の箇所から同時にき裂進展が起ると仮定して解析を行い，寿命を最大にすることを考える．

実際のき裂発生は，決まった繰り返し数で確定的に必ずおこるというものではなく，表面の状態などによりき裂進展の進み具合は大きく左右されるものであるが，それらのすべてのケースを考慮することは不可能である．そこで，最も危険な場合という意味で，いくつかのき裂進展の発生

する箇所をあらかじめ規定しておき，それぞれの箇所に初期き裂を配置し，それぞれが２章で述べたアルゴリズムに基づき同時に進展するとする．そして，最終的に剛性マトリクスが特異になり，構造として不安定になった状態を構造としての最終的な破壊とし，そこに至るまでの繰り返し数を最大化すべき目的関数とする．

実際の構造物では，き裂をそのまま放置しておくということはなく，検査によって発見されたき裂は何らかの形でメンテナンスが行われることが多い．しかし，これを考慮すると問題設定が非常に複雑になり，考え方も構造によってケースバイケースになってしまい，一般論で展開するのが困難である．本論文ではこのメンテナンスの効果は考慮しない．ただし，この手法を実務に適用する上では，メンテナンスの影響は今後考慮していくべきだと考える．

制約条件としては，後の例題では構造最適設計の定式化としては典型的な重量制約を考える．ただし，他の様々な一般的な構造最適設計に使われている制約条件も容易に利用可能であり，構造破壊に至るまでの繰り返し数も目的関数ではなく，制約条件として考慮することも可能である．

3.2 形状変更

本論文では，設計変数として構造の形状を考える．形状を設計変数とする場合，自由に形状を変化させる力法[7]などの手法も有効であるが，目的関数や制約条件の選び方は限られてきてしまう．ここで扱う目的関数に対して，少ない設計変数で形状最適化を行うためには，ベーシスベクトル法は形状変更後のメッシュの再構築が非常に容易である．そこで，ここではベーシスベクトル法による形状最適設計を行う．

設計前の形状に対して有限要素法のメッシュ分割を行い，そのメッシュの各節点の座標値を列ベクトルとして並べたものをM_0とする．また，適当な形状変形パターンを定義し，それらの変形パターンに応じて形状を変化させたメッシュを変形パターンi $(i=1\sim n)$に対して，M_iとする．これを用いると，形状変更後のメッシュをパラメータα_i $(i=1\sim n)$を用いて次式のように表すことができる．

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(M_i - M_0 \right) \tag{15}$$

α_iは定義したベーシスベクトルの形状を基準とした倍率であるので，α_iを設計領域の形状を表現する設計変数となる．設計変数の上下限値は最適解を十分に表現でき，形状に不整合が生じないように設定する．

3.3 最適化手法

最終的な破壊に至るまでの繰り返し数の，設計変数であるベーシスベクトルのパラメータに対する微係数（いわゆる感度）を求めるのは，非常に困難である．解析的にこの感度を求めることは状態変数の感度に対する解析を行う必要があり，式が非常に煩雑になる一方で，差分による感度を求めるには，目的関数のなめらかさが不足している．しかし，ここで取り扱う目的関数は，多くの場合本質的にそれほど多峰性の多い関数ではなく，比較的スムーズな関数であると考えられる．そこで最適化手法としては，勾配を使用せずに比較的簡単に最適解を求めることができるNelder-Mead Simplex 法[8]を用いて解析を行う．

4. 数値解析例

4.1 解析対象

解析例として，図-3 に示した T 字形状の構造物（T 字継ぎ手）に対し，横部材両端を完全固定、縦部材上端に一様荷重（1KN）を片振りで繰り返し負荷することとする．また，ヤング率 E=2.1×10^5 とし，ポアソン比ν=0.3 とした．図中に丸で示した左側の角部の２点に対し初期き裂を配置し、き裂の進展解析を行った．

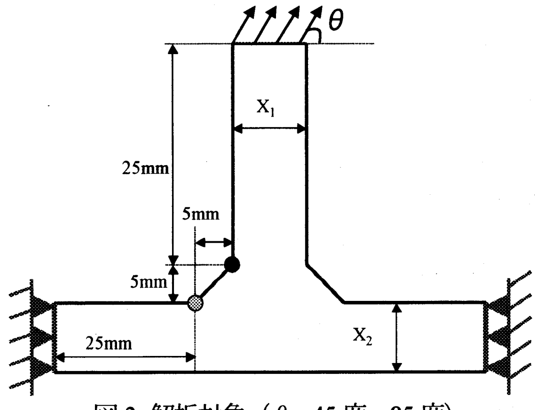
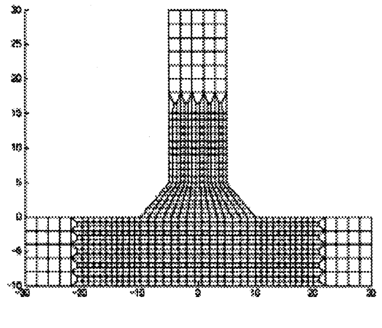


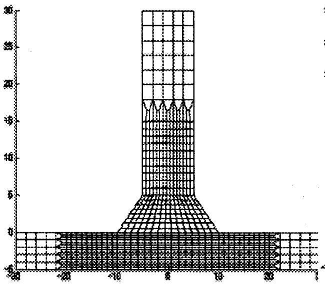
図-3 解析対象（θ=45 度、85 度）

4.2 形状変更方法

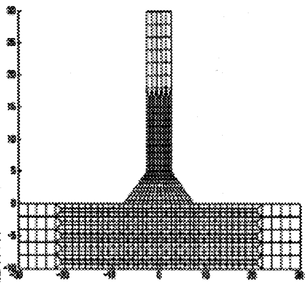
図-3 の解析対象に対し縦部材厚さ、横部材厚さをそれぞれ変化させた場合について解析を行った．形状変更の手法として前述のベーシスベクトル法を用いた．図-4 の様に２つの形状変形パターンの有限要素メッシュを用意し，式(15)に基づき形状変更後の有限要素メッシュの生成を行った．



形状変更前メッシュ M_0



メッシュ M_1



メッシュ M_2

図-4 ベーシスベクトル法のメッシュ

4.3 解析例1 45° 方向荷重

以下ではまず，T 字継ぎ手に対し 45°方向に荷重をかけた場合について解析する．

4.3.1 形状変更による疲労寿命の変化

最適設計を行う前に，2つのパラメータを変化させたときの，構造破壊に至るまでの繰り返し数を調べる．縦・横部材厚さをそれぞれ 10mm から 5mm で変化させた場合の疲労寿命の変化を図-5 に示す．また、それぞれの場合において，いずれのき裂により最終的な構造破壊に至ったかを表-1 に示す．

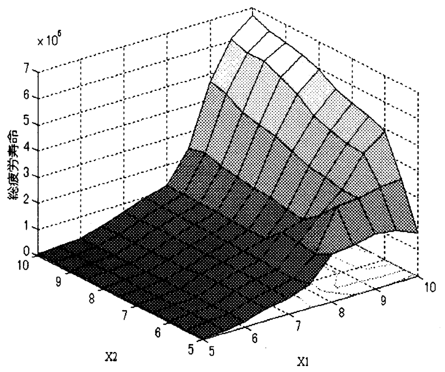


図-5 部材厚さを変更した場合の疲労寿命

表-1 部材厚さを変更した場合の破断するき裂の変化
(●は上部き裂　○は下部き裂)

X_2 \ X_1	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10
10mm	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
9.5mm	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
9.0mm	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
8.5mm	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
8.0mm	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
7.5mm	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
7.0mm	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
6.5mm	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
6.0mm	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
5.5mm	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	○
5.0mm	●	●	●	●	●	●	○	○	○	○	○

以上の結果より，総疲労寿命に対しての影響は，横部材厚さを薄くする場合より，縦部材厚さを薄くする場合のほうが大きくなることが分かり，横部材厚さを薄くすると下部き裂が破断するようになる．

4.3.2 疲労寿命に対する形状の影響

初期形状と初期形状から縦部材厚さを 4.5mm 薄くした形状（Case A）の疲労寿命を比較したものを，図-7 から図-12 に示す．図-7,図-10 ではそれぞれのケースのき裂進展経路，図-8,図-11 ではき裂進展速度，図-9,図-12 では応力分布を示す．き裂進展経路は，縦部材厚さを薄くすることによる応力集中部が上方に移動したことにより，上方に移っている．またき裂進展速度は，応力集中により初期から速度が速くなっている．応力集中部は縦部材厚さを薄くしたことにより上方に移っている．

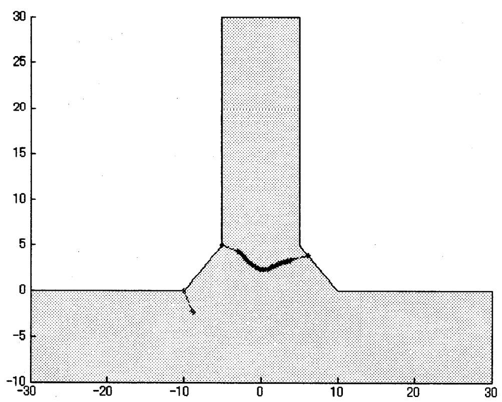


図-6 部材厚さを変更した場合の破断するき裂の変化
(●は上部き裂　○は下部き裂)

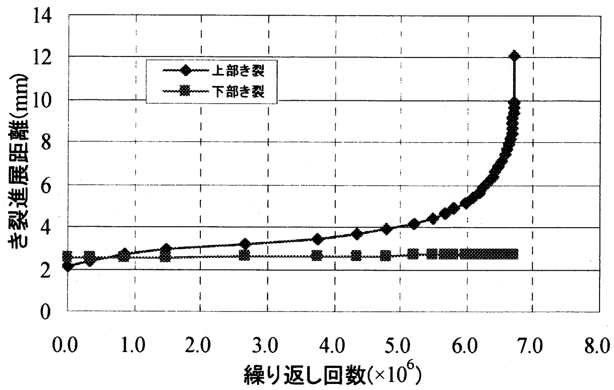


図-7 き裂進展速度（初期形状）

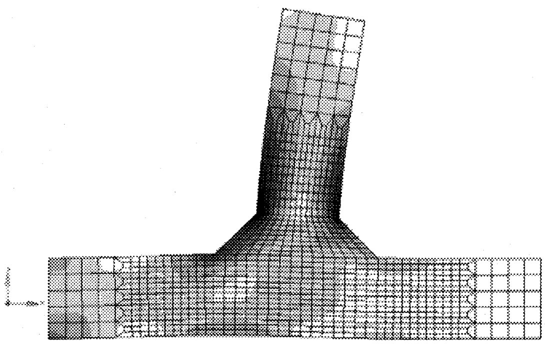


図-8　応力分布（初期形状）

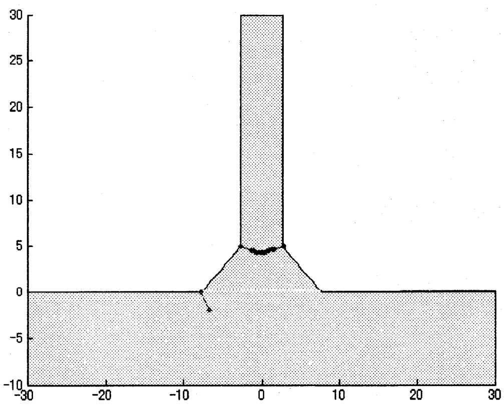


図-9 き裂進展（Case A）

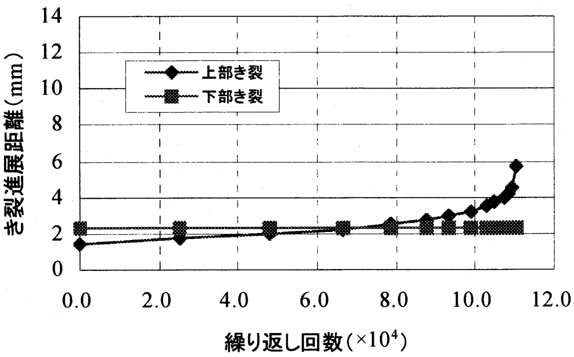


図-10 き裂進展速度（Case A）

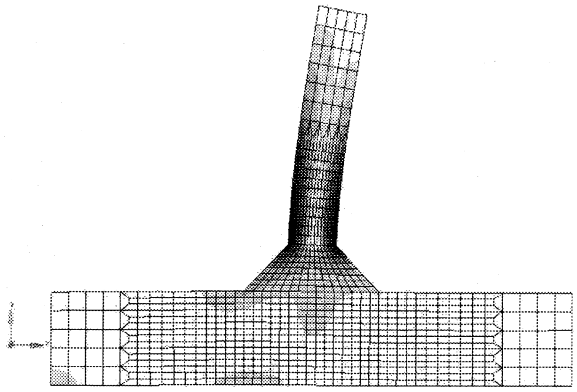


図-11　応力分布（Case A）

つぎに，初期形状と初期形状より横部材厚さを 4.5mm 短縮した形状（Case B）の疲労寿命を図-12 から図-14 に示す．図-12 ではき裂進展経路，図-13 ではき裂進展長さ，図-14 では応力分布を示している．き裂進展経路は、横部材厚さを薄くすることにより，下部き裂がより早く進展している．そして，き裂進展速度に関しては，下部のき裂が進展する場合は急速進展を起こさず破断している．また、応力集中部は横部材厚さを薄くしたことにより下方に移っている．

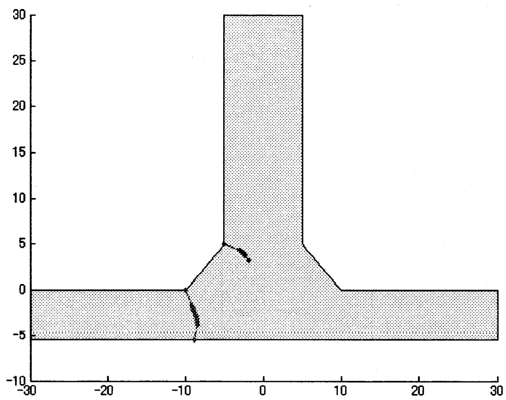


図-12 き裂進展（Case B）

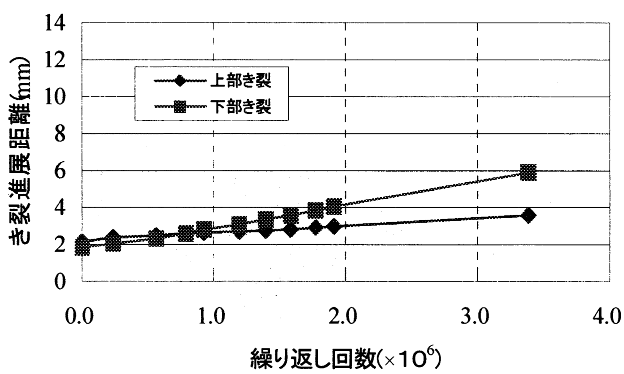


図-13 き裂進展速度（Case B）

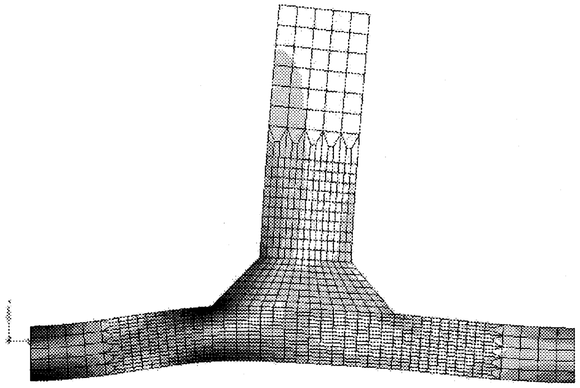


図-14　応力分布（Case B）

4.3.4 構造最適設計

これらの目的関数を用いて，最適設計を行った．疲労寿命を目的関数にし，重量を設計変更前と同じかそれ以下とする場合の最適設計の結果と，き裂基点における最大 von-Mises 応力を目的関数にし，同じ重量制約を課した場合の最適設計の結果を表-1 に示す．初期値は縦部材厚さ 6.0mm，横部材厚さ 6.0mm とした．

表-1 各最適設計における疲労寿命

	初期条件	疲労寿命最適設計	von-Mises 応力最適設計
縦部材厚	6.00	8.04	7.73
横部材厚	6.00	4.98	5.13
疲労寿命	1.80E+05	1.84E+06	9.22E+05
疲労寿命比	1.0	10.2	5.1

最適設計により，初期設計に比べ疲労寿命比を 10 倍近く延ばすことができた．また，疲労寿命による最適設計と von-Mises 応力による最適設計では，形状に大きな変化はないが，疲労寿命は疲労寿命の最適化の半分程度となった．形状があまり変らないのは，von-Mises 応力の最適解は，上部き裂基点と下部き裂基点の von-Mises 応力が同程度，つまり von-Mises 応力の大きいき裂基点分布の境界付近の形状になるのに対し，疲労寿命解析では、破断き裂が上部き裂と下部き裂の境界付近の疲労寿命が長く，境界付近の形状となるため，von-Mises 応力の大きなき裂基点の分布と，破断き裂の分布が似通っているためである．

疲労寿命最適解と初期条件の比較を図-15 から図-20 に示す．図-15，図-18 では，き裂進展経路、図-20,図-23 ではき裂進展速度，図-21,図-24 では応力分布を示している．疲労寿命による最適解の場合は，下部き裂がより進展している．この時，横部材厚さが薄くなることにより応力集中が下部き裂に移動している．また疲労寿命による最適解では，上部き裂もある程度進展させることによりエネルギー発散をすることで疲労寿命を延ばしていると考えられる．疲労寿命による最適解の上部き裂は，応力集中が下部に移動したことによりき裂進展経路も下部に移動している．

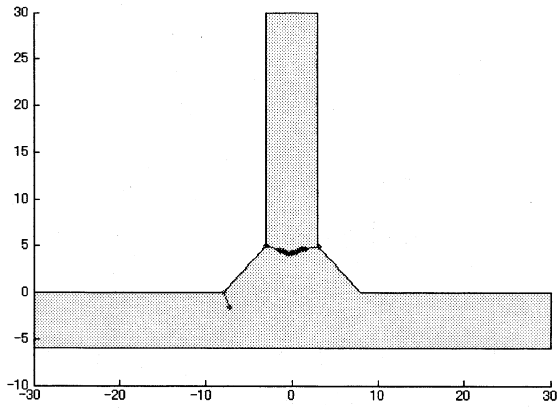


図-15 き裂進展（初期形状）

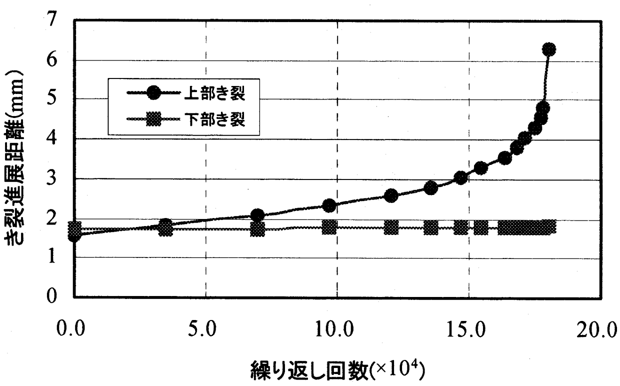


図-16 き裂進展速度（初期形状）

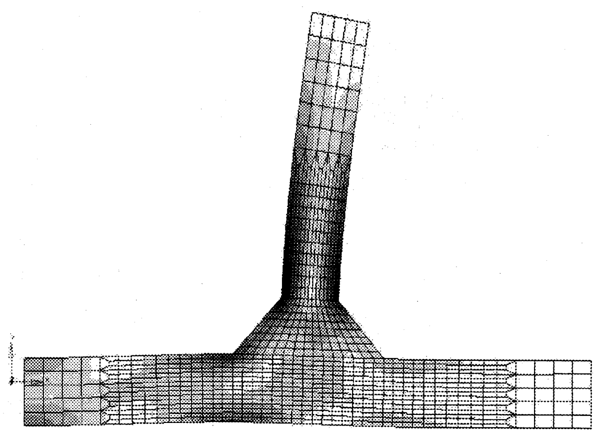


図-17 応力分布（初期形状）

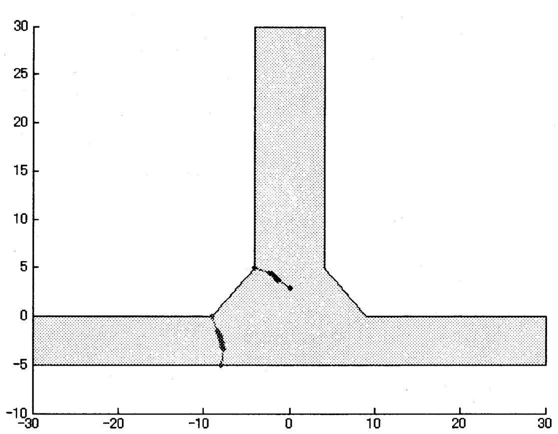


図-18 き裂進展（疲労寿命最適形状）

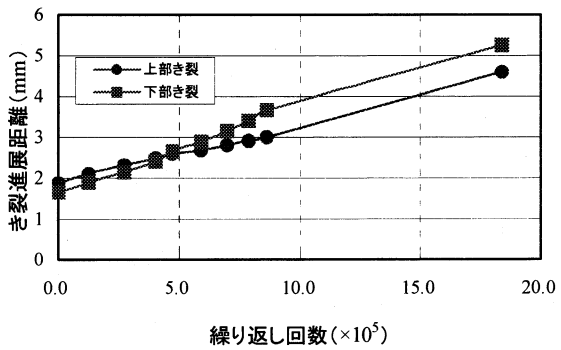


図-19 き裂進展速度（疲労寿命最適形状）

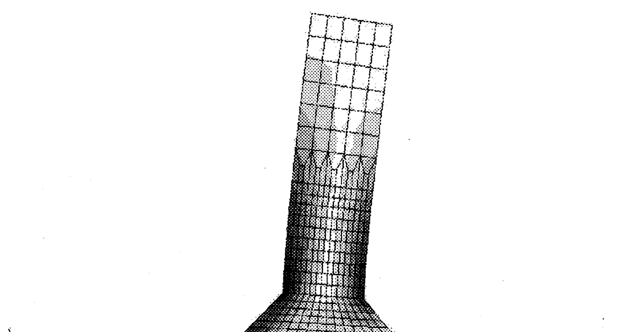


図-20 応力分布（疲労寿命最適形状）

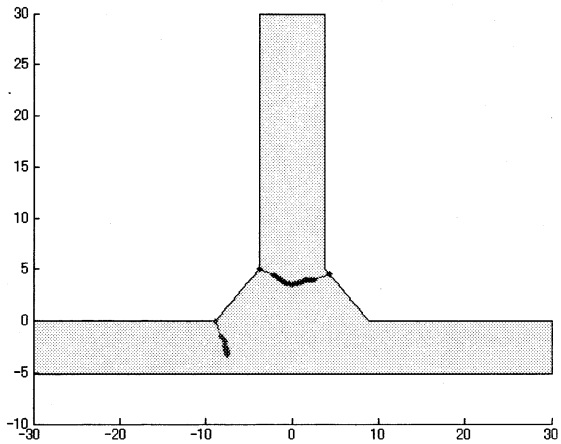


図-21 き裂進展（von-Mises 応力最適形状）

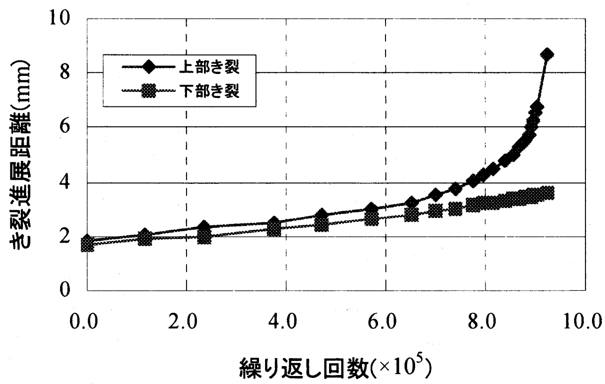


図-22 き裂進展速度（von-Mises 応力最適形状）

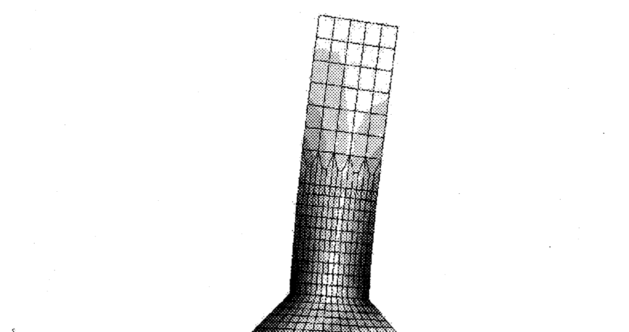


図-23 応力分布（von-Mises 応力最適形状）

また，von-Mises 応力最適解におけるき裂進展経路，き裂進展速度，応力分布を図-21 から図-23 に示している．von-Mises 応力による最適設計では上部き裂基点と下部き裂基点の応力集中が同程度になっている．これにより初期のき裂進展では同じような速さで進展しているが，上部き裂は急速進展を始めるため疲労寿命が短くなってしまう．疲労寿命による最適形状は，上部き裂を伸ばしつつ，急速進展しない下部き裂を破断させることにより寿命を延ばしていると考えられる．

4.4 解析例 2 85°方向荷重

次に，同じ例題に対し荷重方向を 85°方向に変化させた場合について解析する．前述の疲労寿命を目的関数にした場合と von-Mises 応力を目的関数にし，重量一定の条件下で最適設計を行ったケースを表-2 に示す．初期値は縦部材厚さ 6.0mm，横部材厚さ 6.0mm とした．

表-2 各最適設計における疲労寿命

	初期条件	疲労寿命最適設計	von-Mises 応力最適設計
縦部材厚	6.00	5.87	4.67
横部材厚	6.00	6.07	6.66
疲労寿命	1.33E+06	1.72E+06	4.34E+05
疲労寿命比	1	1.3	0.3

最適設計により疲労寿命比を1.3倍程度延ばすことができた．一方，von-Mises 応力による最適設計では疲労寿命が初期設計よりもはるかに短くなってしまうという結果になってしまっている．その意味でも，von-Mises 応力による最適設計は問題があると考えられる．

疲労寿命最適解と初期条件の比較を図に示す．図-24～26 は初期形状におけるそれぞれき裂進展経路，き裂進展速度，応力分布を示している．また，図-27～29 は疲労寿命最大化における結果をしめす．疲労寿命による最適解と初期条件の解は、共に下部き裂が進展している．初期条件では，比較的縦部材厚さが大きく上部き裂が進展しにくくなっているのに対し，疲労寿命最適解では縦部材厚さが薄くなることで，応力集中を上部き裂に移動させ上部き裂を伸ばす形状となっていることが分かる．

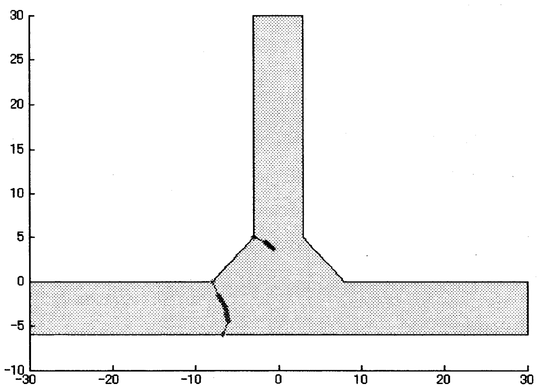


図-24 き裂進展（初期形状）

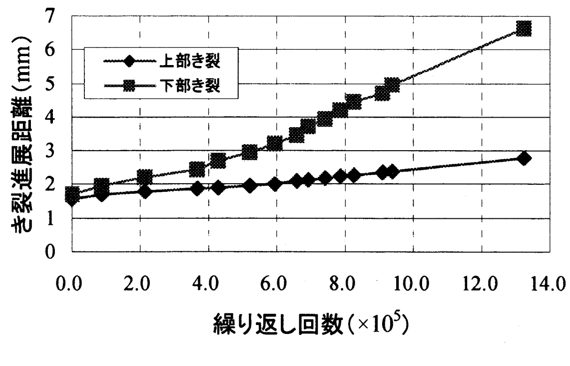


図-25 き裂進展速度（初期形状）

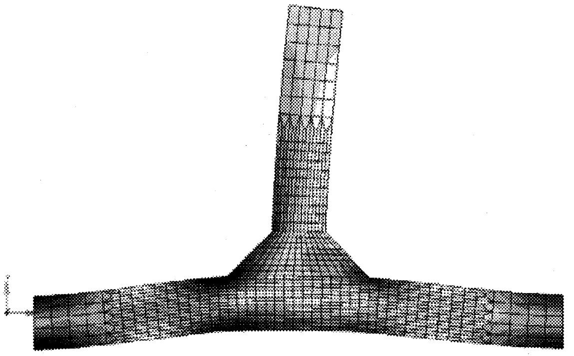


図-26 応力分布（初期形状）

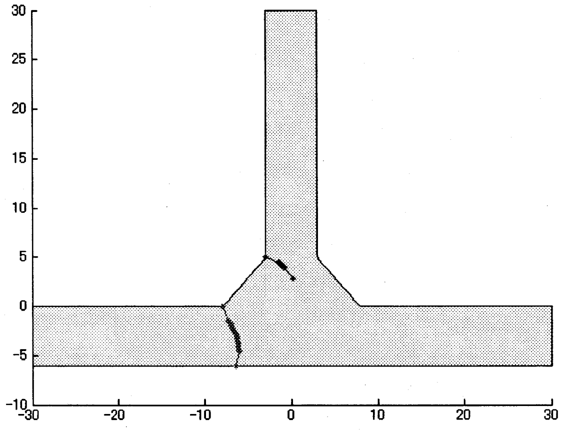


図-27 き裂進展（疲労寿命最適形状）

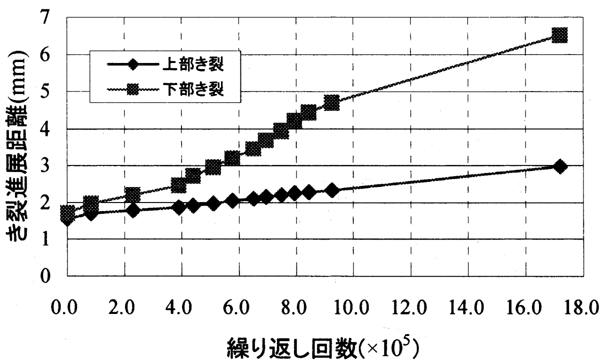


図-28 き裂進展速度（疲労寿命最適形状）

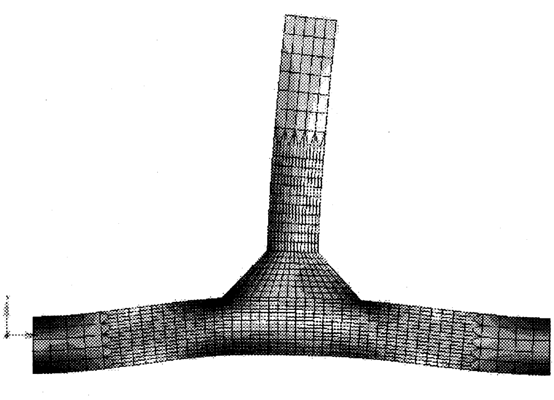


図-29 応力分布（疲労寿命最適形状）

図-30−32 に最大応力最小化による結果を示す．本解析の初期条件では，下部き裂基点の von-Mises 応力は上部き裂基点に比べ大きくなっている．これにより，応力を目的関数とする最適設計では，下部き裂基点の von-Mises 応力を小さくする為，縦部材厚さを薄く，横部材厚さを厚くする形状になる．これにより，上部き裂が進展しやすくなり疲労寿命が短くなったものと考えられる．これに対し疲労寿命最適解では，上部き裂が急速進展を起こしやすいき裂であるために，上部き裂を破断原因としない形状が求まることとなる．

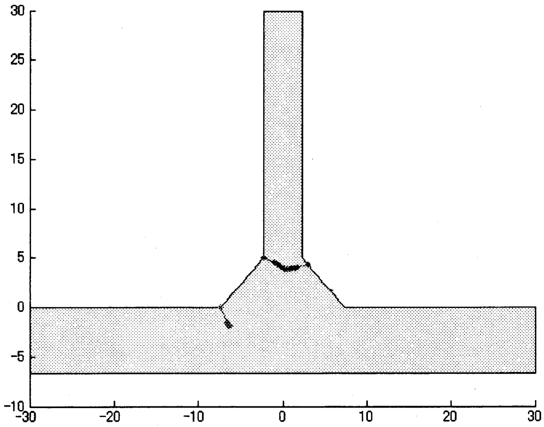


図-30 き裂進展（von-Mises 応力最適形状）

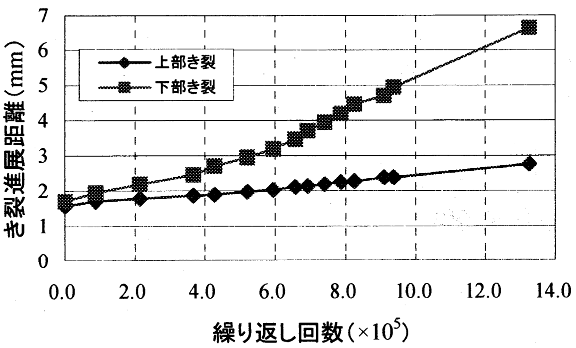


図-31 き裂進展速度（von-Mises 応力最適形状）

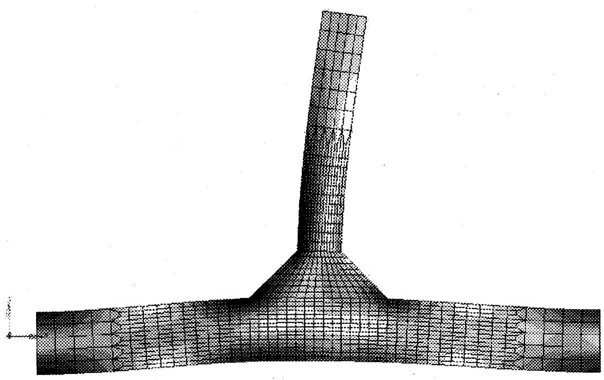


図-32 応力分布（von-Mises 応力最適形状）

5. 結論

本論文では構造物の寿命を評価関数として設計を行うため，複数のき裂を定義してき裂進展解析を行う手法を提案した．X-FEM による複数き裂の進展解析を行い，き裂進展解析を行った．破断に至るまでの荷重繰り返し数を構造物の疲労寿命とし，この寿命を最大化する形状最適化をベーシスベクトル法に基づき行った．

T 字継ぎ手の解析結果より，これまで一般的に行われてきた最大 von Mises 応力による最適設計と，大きく異なる形状が得られる可能性があることがわかった．本手法を使えば，疲労寿命を大幅に増加させることができる一方，従来手法では逆に寿命を短くしてしまう危険性もあることを示した．

今後，本文中にも述べたように、メンテナンスなどの影響を取り入れるなどして，より実用的な手法としていくことを試みたい．

参考文献

1) Belytschko T, Black T.:Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. Int.J. Numer. Meth. Eng., 45.5,pp.601-620, 1999.

2) Yau, J.F, Wang, S.S.and Corten, H.T.:A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. J. Appl. Mech, 47, pp.335-341, 1980

3) Moran, B. and Shih, C.F.: A general treatment of crack tip contour integrals. Int. J. Fracture, 35, pp.295-310 , 1987.

4) 中住，鈴木，大坪: 重合メッシュ法と XFEM を用いたき裂の進展解析，日本造船学会論文集，Vol.195, 2004, pp.79-86.

5) Paris, P.C., The mechanics of fracture propagation and solutions to fracture arrestor problems, The Boeing Company Document D-2-2195, 1957.

6) 豊貞雅宏,丹波敏男：鋼構造物の疲労寿命予測,共立出版株式会社, 2001.

7) 畔上、領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A 編, Vol 60 pp 1479-1486, 1994.

8) Lagarias, J.C., J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, “Convergence Property of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions,” SIAM Journal of Optimization, Vol. 9 Number 1, pp.112-147, 1998.

(2008 年 4 月 14 日　受付)