

鉄道用バラスト材の繰り返し変形解析のための 時間域均質化法定式化

Formulation of Time-domain Homogenization Method
for Cyclic Deformation Analysis of Railway Ballast

紅露一寛*・嘉数東陽**・阿部和久***

Kazuhiro KORO, Toyo KAKAZU and Kazuhisa ABE

*正会員 博士(工学) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科(〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

**非会員 修士(工学) ホープ設計(〒901-0064 沖縄県那覇市寄宮 3-3-5, 研究当時 新潟大学大学院博士前期課程学生)

***正会員 工博 新潟大学准教授 工学部建設学科(〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

The time-domain homogenization method for hypoplastic elastoplastic model is formulated for cyclic deformation analysis of railway ballast, and its numerical algorithm for stress analysis is developed. The multiple temporal scales of the stress, strain and void ratio are introduced, and the original constitutive equations are decomposed into coupled micro-chronological and macro-chronological equations using asymptotic analysis. Accuracy of the simulated macro-chronological strain, corresponds to the accumulated permanent strain induced by cyclic loading, depends on the approximation of the time derivatives of temporal averages of micro-chronological response.

Key Words : railway ballast, hypoplastic model, cyclic loading, time-domain homogenization method

1. はじめに

現在, わが国の鉄道軌道では, 鉄道用バラスト材を道床部に用いた有道床軌道を採用している. 単粒度碎石の集合体であるバラスト道床部は列車の走行による繰り返し載荷によって変形し, その残留変形(軌道狂い)は安全かつ快適な走行の妨げとなる. 軌道狂いがある程度進展すると保線作業が必要となり, 特に道床上面の沈下量(鉛直方向変位)を高精度に予測することは鉄道軌道の新設, 既設を問わず重要となる.

しかしながら, 繰り返し変形に関する道床内部の変形機構は未だ解明されておらず, 沈下量の予測は経験則^{1),2)}に基づいた式で行われている. わが国でもバラスト道床の沈下現象のメカニズムの解明とその定量評価が試みられている. 石川ら³⁾はバラスト道床を有した実物大試験軌道の繰り返し載荷試験を実施し, 残留変位の累積特性や粒子集合体の密粒化による剛性の変化特性について論じている. また, 石川ら⁴⁾は鉄道用バラスト材の大型繰り返し三軸試験を実施し, その変形特性について実験的見地から検討している. 名村ら⁵⁾は, 実物大有道床模型軌道の繰り返し載荷試験を実施し, 上載荷重の中央値と荷重振幅がバラスト道床の沈下挙動に及ぼす影響について検討し, 文献⁶⁾ではまくらぎ形状と道床沈下との関係についても論じている.

実験的アプローチによる道床沈下現象の解明とあわせて, 解析的なアプローチからの検討や汎用離散化解析手法を援用した道床沈下予測手法の構築に関する研究も進展してきている. 石川・大西は, バラスト材の

大型繰り返し三軸試験および有道床軌道の繰り返し載荷試験を対象に, 不連続変形法 (DDA) により載荷時における粒子の運動状態や残留変位の発現特性などについて検討している^{7),8)}. また, 相川らは, 有道床軌道の地震時における動的特性・破壊特性の検討を目的として, DDA 解析を試みている^{9),10),11)}. なお, 個別要素法 (DEM) を用いた解析的アプローチもいくつか報告されている. 阿部ら¹²⁾は, 2次元 DEM 解析により, 道床部の繰り返し変形特性を検討している. また, Saussine ら¹³⁾も有道床軌道の2次元沈下解析を DEM を用いて試みている.

鉄道バラストが大粒径の粒子集合体であることもあり, バラスト道床の繰り返し変形特性を論じるために DDA や DEM などの不連続体モデルを用いることは, 力学的には自然な選択と言える. しかし, 実際のバラストを忠実に再現したこれらの手法は計算負荷が大きく, 道床の沈下量予測のための手法として適切なものかどうかは議論の分かれるところである. そのような経緯から, バラスト道床の繰り返し変形挙動を連続体モデルを用いて評価する取り組みがいくつか報告されている. 連続体モデルでは, 粒子集合体としてのバラスト材をそれと等価な連続体と置き換えてモデル化し, 変形特性は弾塑性構成則を与えて表現する. 繰り返し変形解析に限定すれば, Indraratna & Salim¹⁴⁾は, 独自の構成モデルを含めたいくつかの弾塑性モデルによる応力解析を試み, その評価精度について検討している. また, 著者ら¹⁵⁾は, 下負荷面モデルの適用性についても

検討しており、Augustin ら¹⁶⁾や著者ら¹⁵⁾は hypoplastic モデル^{17),18)}をバラスト材の繰り返し変形解析に適用し、その有用性について検討している。

ただし、連続体モデルを用いた変形解析においても、一度の载荷・除荷過程を増分解析で評価した上で、さらに軌道保守が必要となる沈下量レベルに達するまでには一連の载荷・除荷過程解析を多数回反復する必要がある、計算負荷の軽減が必須である。繰り返し荷重作用時の残留変形量の評価を効率的に行なう試みとしては、载荷・除荷の繰り返し回数を制御パラメータとする構成則・発展則を構成し、有道床軌道の繰り返し変形解析を行なった Suiker らの試み¹⁹⁾や、繰り返し载荷による累積損傷度関数を定義し、それを用いてバラスト材のせん断剛性を低下させることで残留変形を推測する方法で解析を試みた石川ら²⁰⁾の研究がある。特に Suiker らの方法は非常に洗練されており、载荷・除荷の繰り返し過程の解析が不要で、残留変形量は繰り返し回数についての積分によって評価される。そのため、計算負荷が通常の繰り返し変形解析と比べて劇的に削減できる方法である。

本研究では、上記 2 種類のいずれにもよらない、バラスト道床の繰り返し変形量を効率的に評価する方法を構築することを主目的として、hypoplastic モデルによるバラスト材繰り返し変形解析において時間域均質化法^{21),22)}を導入する。本論文では、その解法構築の第一段階として、構成方程式に時間域均質化法を適用し、その結果得られた諸方程式を用いて繰り返し荷重下での応力解析（要素試験のシミュレーション）を行い、当該の定式化を応力解析に適用した場合の基本的な特性について検討する。

時間域均質化法は、1 つの物理現象の中で複数の時間スケールが存在する場合などのように、評価の物理応答が長時間の変動成分と短時間の（周期的な）変動成分により構成される場合に、長時間の変動成分と短時間の変動成分とを分離し、各々の応答成分の連成効果を考慮しながら双方の時間スケール応答を効率的に評価する方法である。Fish らは、繰り返し载荷を受ける粘弾性体や粘塑性体の変形解析²¹⁾や、疲労寿命の評価²²⁾に当該の手法・定式化を用いている。また、Manchiraju²³⁾らは、繰り返し応力作用下での結晶塑性解析において時間域均質化法を適用し、計算効率の向上の観点から、長時間の変動成分に関する問題の解法に工夫を加えている。疲労損傷解析においては、損傷変数の発展則を繰り返し回数に関する初期値問題として定義することで、数値解析における繰り返し過程を省略 (cyclic-jump) する方法²⁴⁾も提案されている。先に述べた Suiker らの方法¹⁹⁾は、cyclic-jump の考え方を応用して繰り返し変形解析の効率化を図ったものである。

なお、以下でも述べるように、本論文では当該問題の時間域均質化法の定式化とその応力解析アルゴリズム

の基本的な妥当性の検証に主眼を置き、繰り返し各サイクルでの残留ひずみの評価性能について、通常の繰り返し弾塑性解析結果との比較を通して検討する。本来であれば、当該手法を用いた場合の計算負荷の削減効果も評価・検討する必要があるが、この点については別報で議論することとしたい。

2. Hypoplastic モデル

本研究では、バラスト材をそれと等価な連続体とみなし、繰り返し変形挙動を hypoplastic モデルを用いて評価する場合を考える。Hypoplastic モデル^{17),18)}では、古典的弾塑性論のような弾性域と塑性域の区別がなく、構成式が古典的弾塑性モデルと比べて簡易な形で表現できる。文献^{17),18)}で提案されている構成式は、真応力 T_{ij} の Jaumann 速度 $\dot{T}_{ij}$ とストレッチング D_{ij} との関係が次式で定義される。

$$\dot{T}_{ij} = f_s \left[L_{ij} + f_d N_{ij} \sqrt{D_{\gamma\delta} D_{\gamma\delta}} \right] \quad (1)$$

$$L_{ij} = a_1^2 D_{ij} + \hat{T}_{ij} \hat{T}_{kl} D_{kl}, \quad N_{ij} = a_1 (\hat{T}_{ij} + \hat{T}_{ij}^*)$$

なお、本研究では微小変形を仮定し、 ε_{ij} を微小ひずみとして、 $\dot{T}_{ij} \approx \dot{T}_{ij}$, $D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ で与える。また、 $\hat{T}_{ij} = T_{ij}/T_{kk}$ とし、 $\hat{T}_{ij}^*$ は $\hat{T}_{ij}$ の偏差成分である。式 (1) において、材料関数 f_s , f_d は、 $p = -T_{kk}/3$ としてそれぞれ次式で与えられる。

$$f_s = \frac{h_s}{n h_i} \left(\frac{e_i}{e} \right)^\beta \frac{1 + e_i}{e_i} \left(\frac{3p}{h_s} \right)^{1-n} \quad (2)$$

$$f_d = \left(\frac{e - e_d}{e_c - e_d} \right)^\alpha \quad (3)$$

$$h_i = \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{e_{i0} - e_{d0}}{e_{c0} - e_{d0}} \right)^\alpha \frac{1}{c_1 \sqrt{3}} \quad (4)$$

$$e_i = e_{i0} \exp \left[- \left(\frac{3p}{h_s} \right)^n \right] \quad (5)$$

$$\frac{e_c}{e_i} = \frac{e_{c0}}{e_{i0}}, \quad \frac{e_d}{e_i} = \frac{e_{d0}}{e_{i0}}$$

ただし、 h_s は粒子硬度、 c_1 , α , β , n は材料定数である。 e_i , e_c , e_d は最大間隙比、限界状態間隙比、最小間隙比であり、 $p = 0$ における各々の値 e_{i0} , e_{c0} , e_{d0} は材料定数として与える。

また、材料関数 a_1 は次式で与えられる¹⁸⁾。

$$a_1 = \left\{ c_1 + c_2 \|\hat{T}^*\| [1 + \cos(3\theta)] \right\}^{-1} \quad (6)$$

$$\cos(3\theta) = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}(\hat{T}^{*3})}{[\text{tr}(\hat{T}^{*2})]^{3/2}} \quad (7)$$

ここで、 c_2 は材料定数である。

なお、間隙比 e の発展則は次式で与える。

$$\dot{e} = (1 + e) D_{kk} = (1 + e) \dot{\varepsilon}_{kk} \quad (8)$$

なお、本節では当該構成式を用いて繰り返し変形解析を行なう際に必要となる最低限の情報を示した。Hypoplastic モデルの概念や材料パラメータの設定方法等に関する詳細については、文献^{(17),(18)}を参照されたい。

3. 時間域均質化法の定式化

前節では、hypoplastic モデルに基づく繰り返し変形解析に必要な諸方程式を示した。本節では、文献^{(21),(22)}を参考に、各方程式の諸量に対して時間に関する多重スケール性を仮定し、漸近展開法を用いてマクロおよびミクロ時間スケールにおける構成方程式を導出する。

まず、時間変数に関して、ミクロ時間変数 τ とマクロ時間変数 t の2つの変数を定義し、時間に関するミクロ・マクロの2つのスケール間で次の関係を有するものとする。

$$\tau = \frac{t}{\zeta}, \quad \zeta \ll 1 \quad (9)$$

ここで、 ζ はスケール変換パラメータである。

今、対象とする変数（応答） ϕ が時間に関する多重スケール性を有するものとして、

$$\phi^\zeta(\mathbf{X}, t) := \phi(\mathbf{X}, t, \tau(t)) \quad (10)$$

のように表わすものとする。なお、 $\mathbf{X}$ は物質点の位置ベクトルであり、 ϕ^ζ の物質時間導関数 $\dot{\phi}^\zeta$ は、

$$\dot{\phi}^\zeta(\mathbf{X}, t) = \phi_{,t}(\mathbf{X}, t, \tau) + \frac{1}{\zeta} \phi_{,\tau}(\mathbf{X}, t, \tau) \quad (11)$$

のようになる。

ここで、 ϕ^ζ を $\zeta = 0$ のまわりで漸近展開し、次式で表わす。

$$\phi^\zeta = \sum_{m=0,1,\dots} \zeta^m \phi^{(m)}(\mathbf{X}, t, \tau) \quad (12)$$

このとき、物質時間導関数は次式で表わすことができる。

$$\dot{\phi}^\zeta := \sum_{m=0,1,\dots} \zeta^{m-1} \dot{\phi}^{(m-1)}(\mathbf{X}, t, \tau) \quad (13)$$

$$\dot{\phi}^{(-1)} := \phi_{,\tau}^{(0)}, \quad \dot{\phi}^{(n-1)} := \phi_{,t}^{(n-1)} + \phi_{,\tau}^{(n)}$$

なお、 $n = 1, 2, \dots$ とする。

式(12)、(13)より、hypoplastic モデルにおける変数である応力 T_{ij} 、微小ひずみ ε_{ij} 、間隙比 e とその物質時間導関数は、時間に関する多重スケール性を仮定して次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} T_{ij}^\zeta(\mathbf{X}, t) &:= T_{ij}(\mathbf{X}, t, \tau) \\ &= \sum_{m=0,1,\dots} \zeta^m T_{ij}^{(m)}(\mathbf{X}, t, \tau) \end{aligned}$$

$$\dot{T}_{ij}^\zeta(\mathbf{X}, t) := \sum_{m=0,1,\dots} \zeta^{m-1} \dot{T}_{ij}^{(m-1)}(\mathbf{X}, t, \tau) \quad (14)$$

$$\dot{T}_{ij}^{(-1)} = T_{ij,\tau}^{(0)}$$

$$\dot{T}_{ij}^{(n-1)} = T_{ij,t}^{(n-1)} + T_{ij,\tau}^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^\zeta(\mathbf{X}, t) &:= \varepsilon_{ij}(\mathbf{X}, t, \tau) \\ &= \sum_{m=0,1,\dots} \zeta^m \varepsilon_{ij}^{(m)}(\mathbf{X}, t, \tau) \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^\zeta(\mathbf{X}, t) &:= \sum_{m=0,1,\dots} \zeta^{m-1} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(m-1)}(\mathbf{X}, t, \tau) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(-1)} = \varepsilon_{ij,\tau}^{(0)}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)} = \varepsilon_{ij,t}^{(n-1)} + \varepsilon_{ij,\tau}^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} e^\zeta(\mathbf{X}, t) &:= e(\mathbf{X}, t, \tau) \\ &= \sum_{m=0,1,\dots} \zeta^m e^{(m)}(\mathbf{X}, t, \tau) \end{aligned}$$

$$\dot{e}^\zeta(\mathbf{X}, t) := \sum_{m=0,1,\dots} \zeta^{m-1} \dot{e}^{(m-1)}(\mathbf{X}, t, \tau) \quad (16)$$

$$\dot{e}^{(-1)} = e_{,\tau}^{(0)}$$

$$\dot{e}^{(n-1)} = e_{,t}^{(n-1)} + e_{,\tau}^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

なお、本研究では、時間スケールとしてマクロ時間スケール（時間変数 t ）とミクロ時間スケール（時間変数 τ ）とを考え、各々の時間スケールの応答を漸近展開の最低次の応答関数 $\mathbf{T}^{(0)}$ 、 $\varepsilon^{(0)}$ 、 $e^{(0)}$ を用いて記述する。以下にその定式化の詳細を示す。

3.1 応力速度・ひずみ速度関係式のツースケール分解

まず、応力速度・ひずみ速度（ストレッチング）関係式について考える。時間に関する多重スケール性を仮定すると、式(1)–(7)よりツースケール分解の対象となるのは次式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \dot{T}_{ij}^\zeta &= f_s \left[L_{ij}^\zeta + f_d^\zeta N_{ij}^\zeta \sqrt{\dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^\zeta \dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^\zeta} \right] \\ L_{ij}^\zeta &= a_1^{\zeta 2} \dot{\varepsilon}_{ij}^\zeta + \hat{T}_{ij}^\zeta \hat{T}_{kl}^\zeta \dot{\varepsilon}_{kl}^\zeta \\ N_{ij}^\zeta &= a_1^\zeta (\hat{T}_{ij}^\zeta + \hat{T}_{ij}^{\zeta*}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$f_s^\zeta = \frac{h_s}{n h_i} \left(\frac{e_i^\zeta}{e^\zeta} \right)^\beta \frac{1 + e_i^\zeta}{e_i^\zeta} \left(\frac{3p^\zeta}{h_s} \right)^{1-n} \quad (18)$$

$$f_d^\zeta = \left(\frac{e_c^\zeta - e_d^\zeta}{e_c^\zeta - e_d^\zeta} \right)^\alpha \quad (19)$$

$$e_i^\zeta = e_{i0} \exp \left[- \left(\frac{3p^\zeta}{h_s} \right)^n \right] \quad (20)$$

$$\frac{e_c^\zeta}{e_i^\zeta} = \frac{e_{c0}}{e_{i0}}, \quad \frac{e_d^\zeta}{e_i^\zeta} = \frac{e_{d0}}{e_{i0}}$$

$$a_1^\zeta = \left\{ c_1 + c_2 \|\hat{T}^{\zeta*}\| [1 + \cos(3\theta^\zeta)] \right\}^{-1} \quad (21)$$

$$\cos(3\theta^\zeta) = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}(\hat{T}^{\zeta*3})}{[\text{tr}(\hat{T}^{\zeta*2})]^{3/2}} \quad (22)$$

なお、式(18)に含まれる h_i はツースケール分解の対象とはならず、式(4)がそのまま適用されることとなる。

以下では、構成式を構成する諸量について式 (14)–(16) を適用し、主要項を評価していく。まず、 $\hat{T}_{ij}^\zeta$ について考えると、

$$\begin{aligned}\hat{T}_{ij}^\zeta &= \hat{T}_{ij}^{(0)} + \zeta \hat{T}_{ij}^{(1)} + O(\zeta^2) \\ \hat{T}_{ij}^{(0)} &:= \frac{T_{ij}^{(0)}}{T_{kk}^{(0)}}, \quad \hat{T}_{ij}^{(1)} := \frac{T_{ij}^{(1)}T_{kk}^{(0)} - T_{ij}^{(0)}T_{kk}^{(1)}}{(T_{kk}^{(0)})^2}\end{aligned}\quad (23)$$

を得る。 $\hat{T}_{ij}^\zeta$ の偏差成分 $\hat{T}_{ij}^{\zeta*}$ は、

$$\hat{T}_{ij}^{\zeta*} = \hat{T}_{ij}^{(0)*} + \zeta \hat{T}_{ij}^{(1)} + O(\zeta^2) \quad (24)$$

となる。ここで、 $\hat{T}_{ij}^{(0)*}$ は $\hat{T}_{ij}^{(0)}$ の偏差成分である。さらに、 $\|\hat{T}^{\zeta*}\| = \sqrt{\hat{T}_{\alpha\beta}^{\zeta*}\hat{T}_{\alpha\beta}^{\zeta*}}$, $\text{tr}(\hat{T}^{\zeta*3})$, $\text{tr}(\hat{T}^{\zeta*2})$ は、

$$\begin{aligned}\|\hat{T}^{\zeta*}\| &= \|\hat{T}^{(0)*}\| + \frac{\hat{T}_{\alpha\beta}^{(0)*}\hat{T}_{\alpha\beta}^{(1)}}{\|\hat{T}^{(0)*}\|}\zeta + O(\zeta^2) \\ \text{tr}(\hat{T}^{\zeta*3}) &= \text{tr}(\hat{T}^{(0)*3}) + 3\hat{T}_{\alpha\beta}^{(1)}\hat{T}_{\beta\gamma}^{(0)*}\hat{T}_{\gamma\alpha}^{(0)*} + O(\zeta^2) \\ \text{tr}(\hat{T}^{\zeta*2}) &= \text{tr}(\hat{T}^{(0)*2}) + 2\hat{T}_{\alpha\beta}^{(1)}\hat{T}_{\alpha\beta}^{(0)*}\zeta + O(\zeta^2)\end{aligned}\quad (25)$$

となるから、式 (22) の $\cos(3\theta^\zeta)$ は次式のように展開でき、

$$\begin{aligned}\cos(3\theta^\zeta) &= \cos(3\theta^{(0)}) - 3\sqrt{6}\zeta \left[\frac{\hat{T}_{\alpha\beta}^{(1)}\hat{T}_{\beta\gamma}^{(0)*}\hat{T}_{\gamma\alpha}^{(0)*}}{(\text{tr}(\hat{T}^{(0)*2}))^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\hat{T}_{\alpha\beta}^{(1)}\hat{T}_{\alpha\beta}^{(0)*}}{\text{tr}(\hat{T}^{(0)*2})} \cdot \frac{\text{tr}(\hat{T}^{(0)*3})}{(\text{tr}(\hat{T}^{(0)*2}))^{3/2}} \right] + O(\zeta^2) \\ \cos(3\theta^{(0)}) &:= -\sqrt{6} \frac{\text{tr}(\hat{T}^{(0)*3})}{(\text{tr}(\hat{T}^{(0)*2}))^{3/2}}\end{aligned}\quad (26)$$

式 (21) の a_1 については、

$$\begin{aligned}a_1^\zeta &= a_1^{(0)} + a_1^{(1)}\zeta + O(\zeta^2) \\ a_1^{(0)} &:= \left\{ c_1 + c_2 \|\hat{T}^{(0)*}\| [1 + \cos(3\theta^{(0)})] \right\}^{-1} \\ a_1^{(1)} &:= -c_2 \left\{ a_1^{(0)} \right\}^2 \left[\frac{\hat{T}_{\alpha\beta}^{(1)}\hat{T}_{\alpha\beta}^{(0)*}}{\|\hat{T}^{(0)*}\|} [1 + \cos(3\theta^{(0)})] \right. \\ &\quad \left. - 3\sqrt{6} \|\hat{T}^{(0)*}\| \left(\frac{\hat{T}_{\alpha\beta}^{(1)}\hat{T}_{\beta\gamma}^{(0)*}\hat{T}_{\gamma\alpha}^{(0)*}}{\{\text{tr}(\hat{T}^{(0)*})\}^{3/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\hat{T}_{\alpha\beta}^{(1)}\hat{T}_{\alpha\beta}^{(0)*}}{\text{tr}(\hat{T}^{(0)*})} \cdot \frac{\text{tr}(\hat{T}^{(0)*2})}{\{\text{tr}(\hat{T}^{(0)*2})\}^{3/2}} \right) \right]\end{aligned}\quad (27)$$

のように展開できる。式 (15), (23) より、式 (17) 第 2 式で定義されたテンソル L_{ij} の漸近展開は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}L_{ij}^\zeta &= a_1^{\zeta 2} \hat{\varepsilon}_{ij}^\zeta + \hat{T}_{ij}^\zeta \hat{T}_{kl}^\zeta \hat{\varepsilon}_{kl}^\zeta \\ &= \left[a_1^{(0)2} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(-1)} + \hat{T}_{ij}^{(0)} \hat{T}_{\alpha\beta}^{(0)} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(-1)} \right] \zeta^{-1} \\ &\quad + \left[a_1^{(0)2} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(0)} + 2a_1^{(0)} a_1^{(1)} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(-1)} + \hat{T}_{ij}^{(1)} \hat{T}_{\alpha\beta}^{(0)} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(-1)} \right. \\ &\quad \left. + \hat{T}_{ij}^{(0)} \left\{ \hat{T}_{\alpha\beta}^{(0)} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(0)} + \hat{T}_{\alpha\beta}^{(1)} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(-1)} \right\} \right] \zeta^0 + O(\zeta)\end{aligned}\quad (28)$$

また、式 (17) 第 3 式のテンソル N_{ij} の漸近展開は、式 (23), (27) より、

$$\begin{aligned}N_{ij}^\zeta &= N_{ij}^{(0)} + N_{ij}^{(1)}\zeta + O(\zeta^2) \\ N_{ij}^{(0)} &:= a_1^{(0)} \left[\hat{T}_{ij}^{(0)} + \hat{T}_{ij}^{(0)*} \right] \\ N_{ij}^{(1)} &:= 2a_1^{(0)} \hat{T}_{ij}^{(1)} + a_1^{(1)} \left(\hat{T}_{ij}^{(0)} + \hat{T}_{ij}^{(0)*} \right)\end{aligned}\quad (29)$$

となる。

次に、式 (18) の材料関数 f_s について考える。 f_s を構成する関数 e_i の漸近展開は、式 (20) の定義および $p^{(0)} := -\text{tr}\mathbf{T}^{(0)}/3$, $p^{(1)} := -\text{tr}\mathbf{T}^{(1)}/3$ となることを考慮して、

$$\begin{aligned}e_i^\zeta &= e_i^{(0)} + \zeta e_i^{(1)} + O(\zeta^2) \\ e_i^{(0)} &:= e_{i0} \exp \left[- \left(\frac{3p^{(0)}}{h_s} \right)^n \right] \\ e_i^{(1)} &:= e_i^{(0)} \left(\frac{-3n}{h_s} \right) \left(\frac{3p^{(0)}}{h_s} \right)^{n-1} p^{(1)}\end{aligned}\quad (30)$$

で与えられる。よって、式 (18) を構成する各項の漸近展開は、

$$\begin{aligned}\left(\frac{e_i^\zeta}{e^\zeta} \right)^\beta &= \left(\frac{e_i^{(0)}}{e^{(0)}} \right)^\beta \\ &\quad + \beta \left(\frac{e_i^{(0)}}{e^{(0)}} \right)^{\beta-1} \frac{e_i^{(1)}e^{(0)} - e_i^{(0)}e^{(1)}}{\{e^{(0)}\}^2} \zeta + O(\zeta^2) \\ \frac{1+e_i^\zeta}{e_i^\zeta} &= \frac{1+e_i^{(0)}}{e_i^{(0)}} - \frac{e_i^{(1)}}{\{e_i^{(0)}\}^2} \zeta + O(\zeta^2) \\ \left(\frac{3p^\zeta}{h_s} \right)^{1-n} &= \left(\frac{3p^{(0)}}{h_s} \right)^{1-n} \\ &\quad + \frac{3(1-n)p^{(1)}}{h_s} \left(\frac{3p^{(0)}}{h_s} \right)^{1-n} \zeta + O(\zeta^2)\end{aligned}\quad (31)$$

となるから、 f_s の漸近展開は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}f_s^\zeta &= f_s^{(0)} + f_s^{(1)}\zeta + O(\zeta^2) \\ f_s^{(0)} &:= \frac{h_s}{nh_i} \left(\frac{e_i^{(0)}}{e^{(0)}} \right)^\beta \frac{1+e_i^{(0)}}{e_i^{(0)}} \left(\frac{3p^{(0)}}{h_s} \right)^{1-n} \\ f_s^{(1)} &:= \frac{h_s}{nh_i} \left[\beta \left(\frac{e_i^{(0)}}{e^{(0)}} \right)^{\beta-1} \frac{e_i^{(1)}e^{(0)} - e_i^{(0)}e^{(1)}}{\{e^{(0)}\}^2} \right. \\ &\quad \cdot \frac{1+e_i^{(0)}}{e_i^{(0)}} \left(\frac{3p^{(0)}}{h_s} \right)^{1-n} - \left(\frac{e_i^{(0)}}{e^{(0)}} \right)^\beta \frac{e_i^{(1)}}{\{e_i^{(0)}\}^2} \left(\frac{3p^{(0)}}{h_s} \right)^{1-n} \\ &\quad \left. + \left(\frac{e_i^{(0)}}{e^{(0)}} \right)^\beta \frac{1+e_i^{(0)}}{e_i^{(0)}} \frac{3(1-n)p^{(1)}}{h_s} \left(\frac{3p^{(0)}}{h_s} \right)^{-n} \right]\end{aligned}\quad (32)$$

式 (19) で定義された f_d は、式 (20) より e_c, e_d が e_i

と同様に展開可能であるから、

$$f_d^\zeta = f_d^{(0)} + f_d^{(1)}\zeta + O(\zeta^2), \quad f_d^{(0)} := \left(\frac{e^{(0)} - e_d^{(0)}}{e_c^{(0)} - e_d^{(0)}} \right)^\alpha$$

$$f_d^{(1)} := \frac{\alpha}{\left[\frac{e_c^{(0)} - e_d^{(0)}}{e_c^{(0)} - e_d^{(0)}} \right]^2} \left(\frac{e^{(0)} - e_d^{(0)}}{e_c^{(0)} - e_d^{(0)}} \right)^{\alpha-1} \left[\begin{aligned} & (e^{(1)} - e_d^{(1)})(e_c^{(0)} - e_d^{(0)}) - (e^{(0)} - e_d^{(0)})(e_c^{(1)} - e_d^{(1)}) \end{aligned} \right] \quad (33)$$

を得る。

さらに、 $\|D^\zeta\| = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^\zeta \dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^\zeta}$ の漸近展開は次式で与えられる。

$$\|D^\zeta\| = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^\zeta \dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^\zeta} = \zeta^{-1} \sqrt{\dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^{(-1)} \dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^{(-1)}} + \frac{\dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^{(-1)} \dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^{(0)}}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^{(-1)} \dot{\varepsilon}_{\gamma\delta}^{(-1)}}} + O(\zeta) \quad (34)$$

ここで、式(23)–(34)の結果を式(17)–(22)に代入し整理すると、 $O(\zeta^{-1})$ の構成式は次式で与えられる。

$$T_{ij,\tau}^{(0)} = f_s^{(0)} \left[L_{ij}^{(0)} + f_d^{(0)} N_{ij}^{(0)} \sqrt{\varepsilon_{\gamma\delta,\tau}^{(0)} \varepsilon_{\gamma\delta,\tau}^{(0)}} \right] \quad (35)$$

一方、 $O(\zeta^0)$ の構成式は、

$$\begin{aligned} T_{ij,t}^{(0)} + T_{ij,\tau}^{(1)} &= f_s^{(1)} L_{ij}^{(0)} \\ &+ f_s^{(0)} \left[a_1^{(0)2} \varepsilon_{ij,t}^{(0)} + \hat{T}_{ij}^{(0)} \hat{T}_{kl}^{(0)} \varepsilon_{kl,t}^{(0)} \right] \\ &+ f_s^{(0)} \left[a_1^{(0)2} \varepsilon_{ij,\tau}^{(1)} + \hat{T}_{ij}^{(0)} \hat{T}_{kl}^{(0)} \varepsilon_{kl,\tau}^{(1)} \right] \\ &+ f_s^{(0)} \left[2a_1^{(0)} a_1^{(1)} \varepsilon_{ij,\tau}^{(0)} + \hat{T}_{ij}^{(1)} \hat{T}_{kl}^{(0)} \varepsilon_{kl,\tau}^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + \hat{T}_{ij}^{(0)} \hat{T}_{kl}^{(1)} \varepsilon_{kl,\tau}^{(0)} \right] \\ &+ \sqrt{\varepsilon_{\gamma\delta,\tau}^{(0)} \varepsilon_{\gamma\delta,\tau}^{(0)}} \left(f_s^{(1)} f_d^{(0)} N_{ij}^{(0)} + f_s^{(0)} f_d^{(1)} N_{ij}^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + f_s^{(0)} f_d^{(0)} N_{ij}^{(1)} \right) \\ &+ f_s^{(0)} f_d^{(0)} N_{ij}^{(0)} \frac{(\varepsilon_{kl,t}^{(0)} + \varepsilon_{kl,\tau}^{(1)}) \varepsilon_{kl,\tau}^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon_{\gamma\delta,\tau}^{(0)} \varepsilon_{\gamma\delta,\tau}^{(0)}}} \end{aligned} \quad (36)$$

のようになる。

ここで、上記各式の漸近展開において、展開第1項のみを考え、高次項を無視する。その結果、上添字“(1)”が付された諸量は消滅し、次式を得る。

$$T_{ij,t}^{(0)} = f_s^{(0)} \left[a_1^{(0)2} \varepsilon_{ij,t}^{(0)} + \hat{T}_{ij}^{(0)} \hat{T}_{kl}^{(0)} \varepsilon_{kl,t}^{(0)} \right] + f_s^{(0)} f_d^{(0)} N_{ij}^{(0)} \frac{\varepsilon_{kl,t}^{(0)} \varepsilon_{kl,\tau}^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon_{\gamma\delta,\tau}^{(0)} \varepsilon_{\gamma\delta,\tau}^{(0)}}} \quad (37)$$

さらに、 $T_{ij}^{(0)}$ と $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ が次のように分解可能であるものとする。

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(0)}(\mathbf{X}, t, \tau) &= \bar{T}_{ij}(\mathbf{X}, t) + \tilde{T}_{ij}(\mathbf{X}, t, \tau) \\ \varepsilon_{ij}^{(0)}(\mathbf{X}, t, \tau) &= \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) + \tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t, \tau) \end{aligned} \quad (38)$$

式(38)を式(35)に代入すると、ミクロ時間スケールにおける構成式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij,\tau} &= f_s^{(0)} \left[a_1^{(0)2} \tilde{\varepsilon}_{ij,\tau} + \hat{T}_{ij}^{(0)} \hat{T}_{kl}^{(0)} \tilde{\varepsilon}_{kl,\tau} \right. \\ &\quad \left. + f_d^{(0)} a_1^{(0)} \left(\hat{T}_{ij}^{(0)} + \hat{T}_{ij}^{(0)*} \right) \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\gamma\delta,\tau} \tilde{\varepsilon}_{\gamma\delta,\tau}} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

マクロ時間スケールにおける構成式は、式(38)を(37)に代入し、 τ について次式の時間平均をとることで導出する。

$$\langle \phi \rangle := \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \phi(\mathbf{X}, t, \tau) d\tau \quad (40)$$

なお、 τ_0 はミクロ時間スケールの代表長さである。

その結果、

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij,t} + \langle \tilde{T}_{ij} \rangle_t &= \langle C_{ijkl} \rangle \bar{\varepsilon}_{kl,t} + \langle C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl,t} \rangle \\ C_{ijkl} &:= \frac{1}{2} f_s^{(0)} a_1^{(0)2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &+ f_s^{(0)} \hat{T}_{ij}^{(0)} \hat{T}_{kl}^{(0)} + f_s^{(0)} f_d^{(0)} N_{ij}^{(0)} \frac{\tilde{\varepsilon}_{kl,\tau}}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\gamma\delta,\tau} \tilde{\varepsilon}_{\gamma\delta,\tau}}} \end{aligned} \quad (41)$$

を得る。式(41)において、 $\langle (\tau - \tau_1) \tilde{\varepsilon}_{ij,t} \rangle = 0$ のように τ_1 を選ぶと、 $\tilde{\varepsilon}_{ij,t}$ を含む各項は平均値の定理を用いて次式で近似できる。

$$\langle C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl,t} \rangle \approx C_{ijkl}(\tau_1) \langle \tilde{\varepsilon}_{kl} \rangle_t \quad (42)$$

よって、式(42)を式(41)に代入すると、マクロ時間スケールにおける構成式が次式で与えられる。

$$\bar{T}_{ij,t} + \langle \tilde{T}_{ij} \rangle_t = \langle C_{ijkl} \rangle \bar{\varepsilon}_{kl,t} + C_{ijkl}(\tau_1) \langle \tilde{\varepsilon}_{kl} \rangle_t \quad (43)$$

3.2 間隙比の発展則のツースケール分解

応力速度-ひずみ速度関係の場合と同様に、間隙比の発展則についても漸近展開を用いて時間に関するツースケール分解を行なう。式(8)より、分解の対象となるのは次式である。

$$\dot{e}^\zeta = (1 + e^\zeta) \dot{\varepsilon}_{kk}^\zeta \quad (44)$$

式(44)の諸量に時間に関する多重スケール性を仮定し、式(15)、(16)を適用すると次式を得る。

$$\begin{aligned} O(\zeta^{-1}): \quad e_{,\tau}^{(0)} &= \left[1 + e^{(0)} \right] \varepsilon_{kk,\tau}^{(0)} \\ O(\zeta^0): \quad e_{,t}^{(0)} + e_{,\tau}^{(1)} &= e^{(1)} \varepsilon_{kk,\tau}^{(0)} \\ &+ \left[1 + e^{(0)} \right] \left[\varepsilon_{kk,t}^{(0)} + \varepsilon_{kk,\tau}^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

ここで、漸近展開の高次項(添字“(1)”の付された項)を無視し、 $e^{(0)}$ についても式(38)と同様に分解可能であるものとする。

$$e^{(0)}(\mathbf{X}, t, \tau) = \bar{e}(\mathbf{X}, t) + \tilde{e}(\mathbf{X}, t, \tau) \quad (46)$$

その結果、式(38)、(46)を式(45)第1式に代入すると、ミクロ時間スケールにおける発展則を規定する式が得られる。

$$\tilde{e}_{,\tau} = \left[1 + e^{(0)} \right] \tilde{\varepsilon}_{kk,\tau} \quad (47)$$

一方、式 (38), (46) を式 (45) 第 2 式に代入し、 τ に関する時間平均をとると、

$$\begin{aligned} \bar{e}_{,t} + \langle \bar{e} \rangle_{,t} &= [1 + \bar{e} + \langle \bar{e} \rangle] \bar{e}_{kk,t} \\ &+ (1 + \bar{e}) \langle \bar{e}_{kk} \rangle_{,t} + \langle \bar{e} \bar{e}_{kk,t} \rangle \end{aligned} \quad (48)$$

を得る。ここで、 $\langle (\tau - \tau_2) \bar{e}_{kk,t} \rangle = 0$ となるように τ_2 を定め、平均値の定理を適用すると、式 (48) は次式で近似できる。

$$\begin{aligned} \bar{e}_{,t} + \langle \bar{e} \rangle_{,t} &= [1 + \bar{e} + \langle \bar{e} \rangle] \bar{e}_{kk,t} \\ &+ [1 + \bar{e} + \bar{e}(\tau_2)] \langle \bar{e}_{kk} \rangle_{,t} \end{aligned} \quad (49)$$

式 (49) がマクロ時間スケールにおける発展則を規定する式となる。

4. 応力解析アルゴリズム

前節においては、hypoplastic モデルの構成方程式に時間域均質化法を適用し、ミクロ時間スケール・マクロ時間スケール双方の構成方程式を導出し、以下の結果を得た。

- ミクロ時間スケールの構成方程式

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ij,\tau} &= f_s^{(0)} \left[a_1^{(0)2} \bar{e}_{ij,\tau} + \hat{T}_{ij}^{(0)} \hat{T}_{kl}^{(0)} \bar{e}_{kl,\tau} \right. \\ &\quad \left. + f_d^{(0)} a_1^{(0)} \left(\hat{T}_{ij}^{(0)} + \hat{T}_{ij}^{(0)*} \right) \sqrt{\bar{e}_{\gamma\delta,\tau} \bar{e}_{\gamma\delta,\tau}} \right] \quad (50) \\ \bar{e}_{,\tau} &= [1 + e^{(0)}] \bar{e}_{kk,\tau} \end{aligned}$$

- マクロ時間スケールの構成方程式

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij,t} + \langle \bar{T}_{ij} \rangle_{,t} &= \langle C_{ijkl} \rangle \bar{e}_{kl,t} + C_{ijkl}(\tau_1) \langle \bar{e}_{kl} \rangle_{,t} \\ \bar{e}_{,t} + \langle \bar{e} \rangle_{,t} &= [1 + \bar{e} + \langle \bar{e} \rangle] \bar{e}_{kk,t} \\ &+ [1 + \bar{e} + \bar{e}(\tau_2)] \langle \bar{e}_{kk} \rangle_{,t} \end{aligned} \quad (51)$$

そこで本節では、式 (50), (51) を満たす応力、ひずみ、間隙比のミクロ・マクロ双方の応答 $\hat{T}_{ij}, \bar{e}_{ij}, \bar{e}, \bar{T}_{ij}, \bar{e}_{ij}, \bar{e}$ を計算するアルゴリズムについて考える。

前節の定式化によって得られた構成式において、ミクロ時間応答 ($\hat{T}_{ij}, \bar{e}_{ij}, \bar{e}$) を $\hat{\phi}$ で、マクロ時間応答 ($\bar{e}_{ij}, \bar{T}_{ij}, \bar{e}$) を $\bar{\phi}$ で代表して表わすものとする。図-1 に示すように、時間域均質化法を適用しない場合には、応答 ϕ (図中点線) を時間方向に積分して計算する。一方、本論文で示したように時間に関してスケール分離を行うと、応答 ϕ はミクロ時間変数 τ に依存する成分 $\hat{\phi}$ と依存しない成分 $\bar{\phi}$ とに分離され、ミクロ時間における解析では、載荷・除荷の繰り返し各サイクルにおける応答 ϕ の変動成分 $\hat{\phi}$ のみを抽出して評価する (図-1 一点鎖線、および暗い灰色の部分の応答)。一方、マクロ時間における解析では、各サイクル内で一定であるが、サイクルの繰り返しによってその値が変化する応答成分 $\bar{\phi}$ のみを抽出して計算することとなる (図-1 太い実線、および明るい灰色の部分の応答)。繰り返し変形解析において考えた場合、各載荷・除荷サイクル

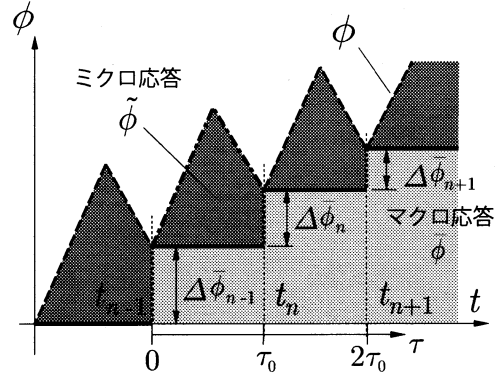


図-1 ミクロ時間応答・マクロ時間応答とミクロ・マクロ双方の時間スケールにおける解析の流れ。

での残留ひずみは微小ひずみ ε_{ij} のマクロ時間応答 $\bar{e}_{ij}$ を求めることで評価することができる。

ただし、式 (50), (51) に示したように、マクロ時間応答 ($\bar{e}_{ij}, \bar{T}_{ij}, \bar{e}$) とミクロ時間応答 ($\bar{e}_{ij}, \hat{T}_{ij}, \bar{e}$) とは完全に独立ではない。そこで本研究では、文献^{(21),(22)}と同様に、以下の弱連成解析アルゴリズムを考える。

- マクロ時間変数 t 軸上の離散時間 $t = t_n$ (載荷・除荷繰り返し第 n ステップ) において、
 - ミクロ時間スケールにおける構成式 (50) を解き、得られた増分量 $\Delta \bar{e}_{ij}, \Delta \bar{T}_{ij}, \Delta \bar{e}$ を積分してミクロ時間の諸量 $\bar{e}_{ij}, \hat{T}_{ij}, \bar{e}$ を求める。
 - (必要に応じて) τ_1, τ_2 を求める。
 - τ 軸上での時間平均 $\langle \hat{T}_{ij} \rangle, \langle \bar{e}_{ij} \rangle, \langle \bar{e} \rangle, \langle C_{ijkl} \rangle$, および $C_{ijkl}(\tau_1), \bar{e}(\tau_2)$ を計算する。
- マクロ時間スケールにおける構成式 (51) を解く。マクロ応答に関する各種増分量 $\Delta \bar{e}_{ij}, \Delta \bar{T}_{ij}, \Delta \bar{e}$ が得られる。
- マクロ時間の諸量 $\bar{e}_{ij}, \bar{T}_{ij}, \bar{e}$ を更新する。マクロ時間ステップを進め、(a) に戻る。

上述の解析アルゴリズムにおいて、 τ_1, τ_2 は、

$$\langle (\tau - \tau_1) \bar{e}_{ij,t} \rangle = 0, \quad \langle (\tau - \tau_2) \bar{e}_{kk,t} \rangle = 0 \quad (52)$$

定義される。しかし、本研究では簡単のために τ_1, τ_2 がマクロ時間変数 t に依存せず、 τ_1 については $\bar{e}_{ij}$ のすべての成分で同一の値をとるものと仮定する。その結果、 τ_1, τ_2 は式 (52) の代わりに次式で与える。

$$\tau_1 = \frac{\langle \tau \cdot \bar{e}_{ij} \rangle}{\langle \bar{e}_{ij} \rangle}, \quad \tau_2 = \frac{\langle \tau \cdot \bar{e}_{kk} \rangle}{\langle \bar{e}_{kk} \rangle} \quad (53)$$

また、式 (51) よりマクロ時間応答を計算する際には、 $t = t_n$ において $C_{ijkl}(\tau_1), \bar{e}(\tau_2)$ の評価が必要となる。この値は、当該のマクロ解析ステップ $t = t_n$ で τ_1, τ_2 の値が既知である場合、ミクロスケール解析の実行途中で求めておくことができる。一方、 τ_1, τ_2 の値が既知でない場合には、マクロ時間変数について時間積分するなどして近似評価せざるを得ない。なお、本論文では、本手法の定式化の妥当性を確認することに主眼を

置き、すべてのマクロ時間ステップでマイクロ時間応答の解析を行なうこととする。そのため、 $C_{ijkl}(\tau_1)$, $\bar{e}(\tau_2)$ の評価は前者の方法で行なうこととする。時間積分で評価する方法については、これら2つの4階テンソル値に関して1サイクルでの変化量を近似評価する必要があるため、その具体的な算法と解析精度について今後検討することとしたい。

なお、式(51)よりマクロ時間応答を計算する際には、 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ と $\bar{e}$ の時間平均について、 t に関する変化率 $\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle_t$, $\langle \bar{e} \rangle_t$ の評価が必要になる。本研究では、 t に関する差分近似を用いて次に示す2通りのアルゴリズムのいずれかで与える。

● アルゴリズム 1

時間平均をとる物理量を $\bar{\phi}$ とし、現時刻 $t = t_n$ と、1ステップ前の時刻 $t = t_{n-1}$ における時間平均値の差分近似で時間変化率を評価する。

$$\langle \bar{\phi} \rangle_t|_{t=t_n} = \frac{\langle \bar{\phi} \rangle|_{t=t_n} - \langle \bar{\phi} \rangle|_{t=t_{n-1}}}{t_n - t_{n-1}} \quad (54)$$

ただし、 $t = t_1$ におけるマクロ解析では、一つ手前の時間格子点 $t = t_0$ での値 $\langle \bar{\phi} \rangle|_{t=t_0}$ が存在しない。この場合には、マイクロ・マクロ弱連成解析に先立って通常の繰返し変形解析を2サイクル実行し、各サイクルで算出した時間平均値の差分で $\langle \bar{\phi} \rangle_t$ の値を近似する。

● アルゴリズム 2

マクロ時間 t によらず、マイクロ時間 τ における解析は常に連続する2サイクル分実行し、 $\langle \bar{\phi} \rangle_t$ は次式で評価する。

$$\langle \bar{\phi} \rangle_t|_{t=t_n} = \frac{\langle \bar{\phi}^* \rangle|_{t=t_n} - \langle \bar{\phi} \rangle|_{t=t_n}}{t_n - t_{n-1}} \quad (55)$$

ここで、 $\langle \bar{\phi} \rangle|_{t=t_n}$, $\langle \bar{\phi}^* \rangle|_{t=t_n}$ は次式で与える。

$$\begin{aligned} \langle \bar{\phi} \rangle|_{t=t_n} &:= \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \bar{\phi}(t_n, \tau) d\tau \\ \langle \bar{\phi}^* \rangle|_{t=t_n} &:= \frac{1}{\tau_0} \int_0^{2\tau_0} \left[\bar{\phi}(t_n, \tau) - \bar{\phi}(t_n, \tau_0) \right] d\tau \end{aligned} \quad (56)$$

これら2種類のアルゴリズムの解析精度と有効性については、解析結果を通し次節で検討する。

5. 解析手法の妥当性の検討

5.1 解析条件

本論文で示した定式化とその応力解析アルゴリズムの妥当性を検討する目的で、バラスト材の大型繰返し三軸試験⁴⁾のシミュレーションに本手法を適用した。試験では直径30cm、高さ60cmの円柱供試体を使用し、供試体を19.6kPaまで等方圧縮した後、軸荷重が $T_{11} = -98\text{kPa}$ に達するまで載荷し、その後等方応力状

表-1 解析に用いた材料パラメータ

$c_1 = 1.65$, $c_2 = 1.874$
$h_s = 1.874\text{MPa}$, $n = 1.7$, $\alpha = 0.15$, $\beta = 1.25$
$e_{i0} = 0.600588$, $e_{c0} = 0.60058$, $e_{d0} = 0.600575$

態まで除荷している。拘束圧は $T_{22} = T_{33} = -19.6\text{kPa}$ で一定としている。

解析においては、hypoplastic モデルの材料パラメータは、文献¹⁵⁾と同様に表-1に示す値を用いた。また、初期条件は $\varepsilon_{ij}|_{t=0} = 0$, $e|_{t=0} = 0.6$ に定め、比較のために通常の応力解析と本手法による時間域マイクロ・マクロ連成解析を各行なつた。

本手法を適用した場合、対象とする繰返し三軸試験が一定の拘束圧(19.6kPa)のもとで実施されていることから、応力のマイクロ時間応答 $\bar{T}_{ij}$ とマクロ時間応答 $\bar{T}_{ij}$ は次式で与える。

$$\bar{T}_{ij} = -19.6\delta_{ij}(\text{kPa}), \quad \bar{T}_{ij} = T_{ij} - \bar{T}_{ij} \quad (57)$$

さらに、試験時の軸差応力振幅が各載荷・除荷サイクルで同一で、サイクルの開始時と終了時はともに拘束圧19.6(kPa)の状態となっている。応力に関する完全な時間周期性を考慮すると、

$$\bar{T}_{ij,t} = 0, \quad \langle \bar{T}_{ij} \rangle_t = 0 \quad (58)$$

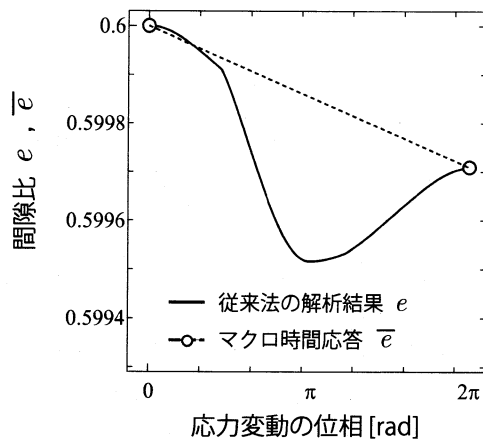
となる。 $\bar{T}_{ij}$ については、時間周期 τ_0 で正弦波状に変化するように与える。

また、アルゴリズム1においては、マクロ時間応答の初期条件は $\bar{\varepsilon}_{ij} = 0$, $\bar{e} = 0.6$ で与え、マイクロ時間応答についてはマイクロ時間解析開始時に初期条件として $\bar{\varepsilon}_{ij} = 0$, $\bar{e} = 0$ で与える。また、アルゴリズム2では、 $\bar{\varepsilon}_{ij}$, $\bar{e}$ の初期条件として通常の繰返し解析2サイクル終了時のひずみ ε_{ij} , e の値でそれぞれ与え、マイクロ時間応答についてはアルゴリズム1の場合と同様に、 $\bar{\varepsilon}_{ij} = 0$, $\bar{e} = 0$ で与える。

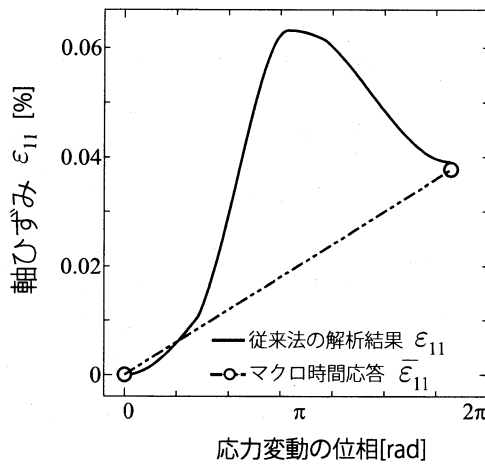
なお、先にも述べたように、本論文では本手法の定式化の妥当性を検証する目的で、マイクロ時間スケールの解析はすべてのマクロ時間ステップで行なうこととする。マイクロ時間応答の解析の実行回数の削減の可能性などの計算効率の検討については、今後検討することとしたい。

5.2 解析結果

まず、載荷・除荷繰返し1回目における軸ひずみ ε_{11} と間隙比 e について、通常の応力解析結果と本手法により得られたマクロ時間応答 $\bar{\varepsilon}_{11}$, $\bar{e}$ を図-2に示す。なお、繰返し1回目では、時間平均の t に関する時間変化率の評価アルゴリズムは上記2種類のアルゴリズムとも同一となる。解析結果より、本手法によって得られた軸ひずみ・間隙比のマクロ時間応答 $\bar{\varepsilon}_{11}$, 間隙



(a) 間隙比.

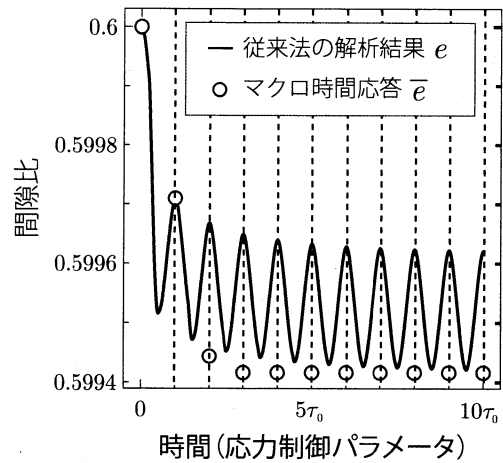


(b) 軸ひずみ ε_{11} .

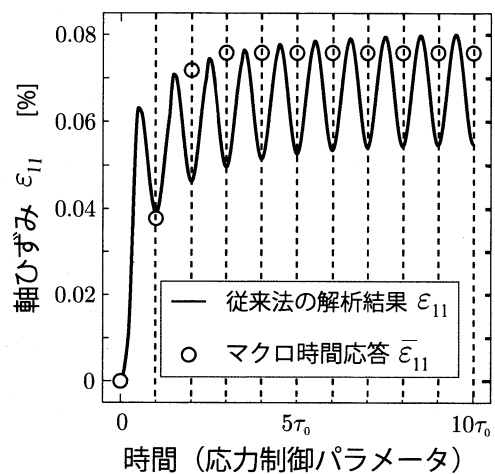
図-2 載荷・除荷繰り返し1回目におけるマクロ時間応答 $\bar{e}$, $\bar{\varepsilon}_{11}$ と通常の応力解析結果.

比 $\bar{e}$ は、従来法における繰り返し載荷1回目終了時の軸ひずみ ε_{11} 、間隙比 e に極めて近い値を示し、その相対誤差はともに1%以下であった。そのため、本手法により時間スケール分解を適用しても、大きな残留ひずみを生じる繰り返し載荷1回目の挙動を良好な精度で評価可能であることがわかる。

次に、繰り返し回数10回目までの残留軸ひずみと間隙比の評価精度について検討する。図-3は、各サイクルでのひずみと間隙比の変動を示したものである。先にも述べたように、本手法によれば載荷・除荷1サイクル終了時の残留ひずみと間隙比は、マクロ時間応答 $\bar{\varepsilon}_{11}$, $\bar{e}$ で評価することができる。そのため、図中点線と実線の交点での値が従来法により評価された各サイクルでの残留量であり、それと対応する均質化法解析結果（本手法で評価された残留量）が丸印で示された値となる。図-3より、時間平均の時間変化率をアルゴリズム1で評価した場合、繰り返し1回目こそ従来法による解析結果とほぼ一致しているが、繰り返し2回目において間隙比のマクロ時間における変化量 $\Delta\bar{e}$ と



(a) 間隙比.



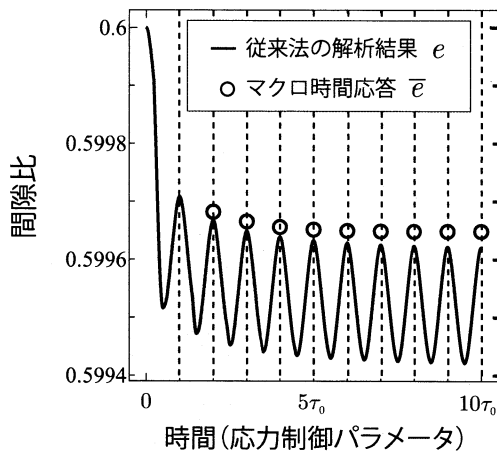
(b) 軸ひずみ ε_{11} .

図-3 繰り返し10回目までのマクロ時間応答 $\bar{e}$, $\bar{\varepsilon}_{11}$ の評価精度(アルゴリズム1).

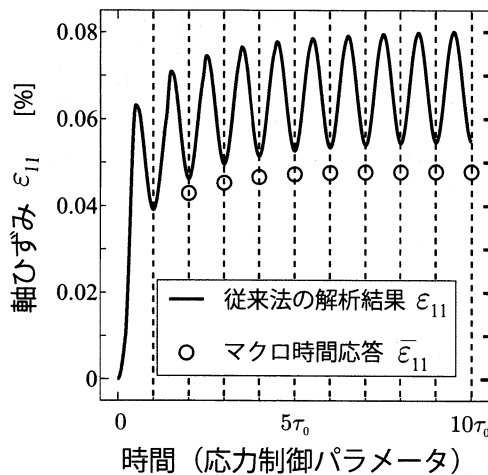
軸ひずみ増分 $\Delta\bar{\varepsilon}_{11}$ が過大評価されている。

ここで、前節で示したアルゴリズム1を採用するが、通常の繰り返し応力解析を2サイクル分実行した後、その結果を時間に関するマクロ・ミクロ連成解析の初期条件として本手法を適用した結果を図-4に示す。なお、図中の数値の比較方法は、図-3と同様である。通常の応力解析を2ステップ実行することで、載荷・除荷第2サイクル終了時の軸ひずみと間隙比はマクロ時間応答 $\bar{\varepsilon}_{ij}$, $\bar{e}$ の評価精度は改善されている。次の繰り返しサイクル以降のマクロ時間応答は、通常の応力解析結果と概ね同程度となっており、本手法で得られたマクロ時間応答で残留ひずみを評価する場合には、本手法の適用に先立って通常の応力解析を（問題に応じて）数サイクル実行し、その解析結果を初期条件として本手法を適用することで、上述の精度低下の問題点は回避できるものと思われる。

また、マクロ時間応答の構成式を解く際には、時間平均の時間変化率 $\langle\bar{\varepsilon}_{ij}\rangle_t$, $\langle\bar{e}\rangle_t$ の値が既知量となることから、マクロ時間応答の評価精度の低下はこの時間

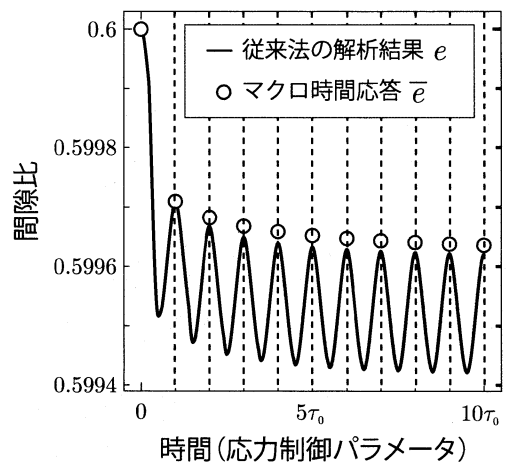


(a) 間隙比.

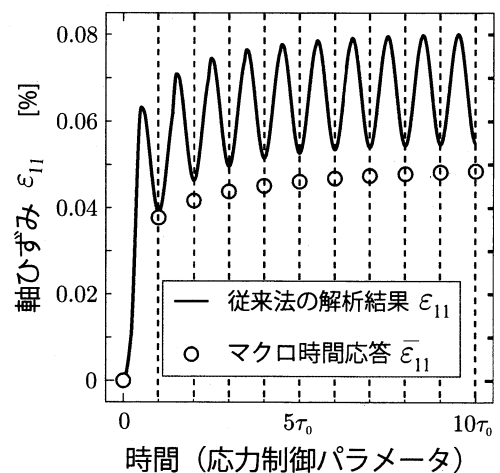


(b) 軸ひずみ ε_{11} .

図-4 繰り返し 10 回目までのマクロ時間応答 $\bar{e}$, $\bar{\varepsilon}_{11}$ の評価精度 (アルゴリズム 1, 通常の繰り返し応力解析を最初の 2 サイクル分実行した後、本手法を適用した場合).



(a) 間隙比.



(b) 軸ひずみ ε_{11} .

図-5 繰り返し 10 回目までのマクロ時間応答 $\bar{e}$, $\bar{\varepsilon}_{11}$ の評価精度 (アルゴリズム 2).

6. おわりに

本研究では、鉄道用バラスト材の繰り返し変形解析を hypoplastic モデルに基づく連続体モデルを用いて実行する場合において、構成方程式に時間域均質化法を適用し、その定式化と応力解析を対象とした解析アルゴリズムの妥当性について、解析結果を通して検討した。均質化法概念を用い、時間スケールとしてマイクロ・マクロの 2 つの時間スケールを考え、漸近展開と時間平均を適用することでマイクロ・マクロ双方の時間スケールにおける構成方程式を導出した。また、载荷・除荷の繰り返し応力解析を対象に、マイクロ時間応答とマクロ時間応答の弱連成解析アルゴリズムを構成した。バラスト材の繰り返し変形解析では、バラスト材の (巨視的) 残留ひずみがマクロ時間応答 $\bar{\varepsilon}$ によって評価可能であることを示した。

なお、積分量として定義されている残留ひずみの評価精度を考えた場合、ひずみの累積量が大きい繰り返し初期段階での残留ひずみを適切に評価することが肝

変化率の評価精度にも原因があると考えられる。そこで、マクロ時間ステップで必要となるマイクロ時間応答の解析を繰り返し 2 サイクル分実行するアルゴリズム 2 を考え、適用した際の結果を図-5 に示す。なお、図中の数値の比較方法は、図-3 と同様である。アルゴリズム 2 を適用した場合、マイクロ時間応答の解析を载荷・除荷 2 サイクル分を行なうため、マイクロ時間応答解析時の計算負荷がアルゴリズム 1 の 2 倍となるものの、時間平均の時間変化率を t 軸上の前進差分で評価するために評価精度がアルゴリズム 1 より高く、図-5 に示すように繰り返し初期における解析精度の改善効果が認められる。また、 $\bar{\varepsilon}_{11}$, $\bar{e}$ の各繰り返し回での増分は、繰り返し回数が増加しても通常の応力解析結果と概ね同程度となっていることがわかる。ただし、今回の解析条件では積分量として定義されている残留軸ひずみで 10% 程度の誤差が生じている。この原因は不明であり、評価精度の改善は今後の検討課題としたい。

要となる。この点については、繰り返し初期段階の数サイクル分の応答を通常の応力解析で評価し、その結果を初期条件として本手法を適用することで解決することができると思われる。また、解析精度は時間平均量の時間変化率の評価方法にも依存する。本論文では、マイクロ時間応答の解析を繰り返し2サイクル分実行することで、解析精度の低下を抑えることができた。ただし、この方法はマイクロ解析の計算負荷を2倍に増大させるものであり、多数回の載荷・除荷繰り返しによる残留ひずみの評価の際には、マイクロ解析が省略可能とならない限り、工学上のメリットが見いだせないことになる。そのため、今後は多数回の繰り返し時における応力解析の計算効率の改善効果について検討したい。また、解析精度の向上とあわせて、つり合い問題(境界値問題)に対する解析アルゴリズムを構成し、その有効性について検討する予定である。

謝辞

本研究を実施するにあたり、平成19-20年度文部科学省科学研究費補助金(若手研究(B), 課題番号19760352)の助成を得た。よって、ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) Dahlberg, T.: Some railroad settlement models — a critical review. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol.215, Part F, pp.289-300, 2001.
- 2) Sato, Y.: Japanese studies on deterioration of ballasted track. *Vehicle System Dynamics*, Supplement 24, pp.197-208, 1995.
- 3) 石川達也, 名村 明: 実物大試験による道床バラスト部繰返し変形特性の検討, 土木学会論文集, No.512 / -27, pp.47-59, 1995.
- 4) 石川達也, 須長 誠, 董 軍, 名村 明: 大型繰返し三軸試験による道床バラストの変形特性の検討, 土木学会論文集, No.575 / -40, pp.169-178, 1997.
- 5) 名村 明, 木幡行宏, 三浦清一: 道床バラストの繰返し変形特性と推定法, 土木学会応用力学論文集, Vol.5, pp.793-800, 2002.
- 6) 名村 明, 木幡行宏, 三浦清一: 有道床軌道の繰返し変形特性に及ぼす荷重とまくらぎ形状の影響に関する実験的研究, 土木学会論文集, No.779 / -66, pp.53-68, 2005.
- 7) 石川達也, 大西有三: 道床バラストの繰返し変形挙動に対する不連続変形法(DDA)の適用, 土木学会論文集, No.589 / -42, pp.205-217, 1998.
- 8) 石川達也, 大西有三, 堀池高広: 不連続変形法(DDA)による道床バラスト部繰返し塑性変形機構の検討, 土木学会論文集, No.645 / -50, pp.15-28, 2000.
- 9) 相川 明: 正弦波鉛直荷重に対する有道床軌道横断面の動的挙動特性に関する不連続変形法解析, 土木学会鉄道力学論文集, Vol.7, pp.19-24, 2003.
- 10) 相川 明: 不連続変形法解析を用いた砕石道床の地震時における内部破壊特性, 土木学会応用力学論文集, Vol.6, pp.593-602, 2003.
- 11) 相川 明, 河野正寿: 正弦波地震載荷時の道床砕石粒子の局所的な運動エネルギー特性, 土木学会鉄道力学論文集, Vol.8, pp.25-30, 2004.
- 12) 阿部和久, Syakir, M., 紅露一寛: 二次元粒状体モデルによるバラスト道床の沈下解析, 土木学会鉄道力学論文集, Vol.10, 2006.
- 13) Saussine, G., Cholet, C., Gautier, P.E., Dubois, F., Bohatier & Moreau, J.J.: Modelling ballast behaviour under dynamic loading. Part 1: A 2D polygonal discrete element method approach. *Comput. Methods Appl. Meth. Engrg.*, Vol.195, pp.2841-2859, 2006.
- 14) Indraratna, B., Salim, W.: *Mechanics of ballasted rail tracks*. Taylor & Francis, 2005.
- 15) 紅露一寛, 嘉数東陽, 梶原宗光, 阿部和久: 鉄道におけるバラスト道床材の繰返し変形解析に用いる構成モデルの検討. 計算数理工学論文集, Vol.7, No.1, pp.31-36, 2007.
- 16) Augustin, S., Gudehus, G., Huber, G., Schünemann, A.: Numerical Model and Laboratory tests on settlement of ballast track. *System dynamics and long-term behaviour of railway vehicles, track and subgrade*, Popp, K., Schiehlen, W. (eds.), pp. 317-336, Springer, 2003.
- 17) Gudehus, G.: A comprehensive constitutive equation for granular materials. *Soils & Foundations*, Vol.36, No.1, pp.1-12, 1996.
- 18) Bauer, E.: Caribration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials. *Soils & Foundations*, Vol.36, No.1, pp.13-26, 1996.
- 19) Suiker, A.S.J. & de Borst, R.: A numerical model for the cyclic deterioration of railway tracks. *Int. J. Numer. Meth. Engrng.*, Vol.57, pp.441-470, 2003.
- 20) 石川達也, 関根悦夫, 三浦清一: 累積損傷度理論を用いたバラスト軌道の変形挙動解析, 第56回理論応用力学講演会講演論文集, 2007.
- 21) Yu, Q., Fish, J.: Temporal homogenization of viscoelastic and viscoplastic solids subjected to locally periodic loading. *Comp. Mech.*, Vol.29, pp.199-211, 2002.
- 22) Oskay, C., Fish, J.: Fatigue life prediction using 2-scale temporal asymptotic homogenization. *Int. J. Numer. Meth. Engrng.*, Vol.61, pp.329-359, 2004.
- 23) Manchiraju, S., Asai, M. & Ghosh, S.: A dual-time-scale finite element model for simulating cyclic deformation of polycrystalline alloys. *J. Strain Analysis*, Vol.42, pp.183-200, 2007.
- 24) Fish, J. & Yu, Q.: Computational mechanics of fatigue and life predictions for composite materials and structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.191, pp.4827-4849, 2002.

(2008年4月14日 受付)