応用力学論文集 Vol.11, pp.141-148 (2008年8月) 土木学会

三次元PDS-FEMを用いた平行亀裂の進展経路の評価

Estimate of growing crack path using PDS-FEM Monte-Carlo simulation

若井淳* ・沖中知雄**堀宗朗***・小国健二****

Jun Wakai, Tomoo Okinaka, Muneo Hori and Kenji Oguni

*学生会員 東京大学大学院工学系研究科社会基盤学専攻（〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1）
**正会員, Ph.D. 近畿大学講師 近畿大学理工学部社会環境工学科（〒577-8502 大阪府東大阪市小若江 3-4-1）
***正会員 Ph.D. 東京大学教授 東京大学地震研究所（〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1）
****正会員 Ph.D. 東京大学準教授 東京大学地震研究所（〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1）

In this paper, fracture analysis that uses PDS-FEM is extended to the three-dimensional setting. Monte-Carlo simulation is carried out for a plate with two parallel cracks which are located in an anti-symmetric mannter. The probability density function of the crack path is calculated in order to evaluate the statistical and spatial distribution of the crack path, and it is shown that the crack path of an idearly homogenous plate is unstable so that small local heterogeneity produces large variaibility in the crack path. The simulation results are compared with experimental data, and some discussions are made for the PDS-FEM fracture analysis.

Key Words : *particle discretization scheme, FEM analysis, growing crack, probability density function, fracture experiment*

1. はじめに

脆性破壊現象の数値シミュレーションは固体計算力学の重要課題である[1]．このシミュレーションは破壊実験に対応するため，破壊にいたる限界の荷重の他，亀裂進展経路のばらつきも評価することが望ましい．進展経路のばらつきは材料の局所的不均一性に起因する．したがって，多数の供試体を使う実験と同様，数値シミュレーションでも，局所的不均一性の分布が異なる多数のモデルを解析するモンテカルロシミュレーションを行うことが必要である．

亀裂進展の数値解析は勿論，モンテカルロシミュレーションは計算コストが高い[2),3),4),5),6]．一方，亀裂先端の特異性を持つ応力場を計算するには，計算精度が高くなければならない[7),8]．すなわち，二律背反するコストと精度のバランスを取った数値解析手法が脆性破壊現象の数値シミュレーションに必要である．また，局所的不均一性のモデル化も必要である．弾性係数を例にすると，モデル化には不均一性の度合いや空間分布が必要となるが，これを計測することは容易ではない．破壊パラメータである強度やエネルギー解放率の局所的不均一性の計測はさらに難しい．

一方，数理的には，理想的均一体の亀裂進展経路が不安定性であることに起因して，亀裂進展経路がばらつくと考えられる．理想的均一体の進展経路が安定であれば，少々の乱れがあっても経路は変らない．しかし不安定であれば若干の乱れによって経路が大きく変わることになる．したがって，厳密にモデル化をせずとも，進展経路の安定性が計算できる程度に局所的不均一性をモデル化すれば進展経路のばらつきの評価はできる．また，数値解析手法も，このようなモデルを解析できれば十分であり，時として滑らかでなくなる亀裂曲面の進展過程を精緻に計算する必要も無い．

上記を背景に，著者のグループは，粒子離散化手法 (Particle Discretization Scheme, PDS) を組み込んだ有限要素法，PDS-FEM，を開発している[9),10]．PDSはボロノイ分割とデラネー分割の特性関数を基底関数とする離散化手法であり，不連続性を持つ関数の離散化に適している．PDS-FEMは線形要素のFEMと同精度を持つ．局所的不均一性のモデルはボロノイ分割の境界となり，その境界が進展経路の候補である．したがってボロノイ分割のメッシュサイズのみがモデル化に必要なパラメータである．PDS-FEMのモデルは，理想的均一体に亀裂進展経路の候補という若干の乱れを組み入れたモデルと考えることができる．進展過程の精緻な解析はできないものの，効率的なモンテカルロシミュレーションが可能となる．

本論文は，PDS-FEMを3次元に拡張し，亀裂進展のモンテカルロシミュレーションを行い，ばらつきを含めた亀裂進展経路の評価を試みる．本論文の構成は以下の通りである．第2章において3次元PDS-FEMの定式化を示す．二つの平行亀裂を持つ板材に対し脆性破壊の数値シミュレーションを行い，第3章に進展経路のシミュレーションの結果を示す．第4章は，数値シミュレーションの結果と別途行われた実験結果を比較する．第5章に結論を整理する．

2.　三次元 PDS-FEM の定式化

3 次元領域 D の共役なボロノイ分割とデラネー分割を $\{\Phi^\alpha\}$ と $\{\Psi^\beta\}$ とする．関数 f とその微係数 $f_{,i}$ は，PDS によって次のように離散化される[9]．

$$
\begin{aligned}
f^{\mathrm{d}}(\mathbf{x}) &= \sum_\alpha f^\alpha \phi^\alpha(\mathbf{x}),\\
g_i^{\mathrm{d}}(\mathbf{x}) &= \sum_\beta g_i^\beta \psi^\beta(\mathbf{x}).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで ϕ^α と ψ^β は Φ^α と Ψ^β の特性関数であり，f^α と g_i^β は

$$
\begin{aligned}
f^\alpha &= \frac{1}{\Phi^\alpha}\int_{\Phi^\alpha} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}v,\\
g_i^\beta &= \frac{1}{\Psi^\beta}\int_{\Psi^\beta} \sum_\alpha f^\alpha \phi_{,i}^\alpha(\mathbf{x})\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここでカンマの後の下添え字は微係数である ($\phi_{,i}^\alpha = \partial\phi^\alpha/\partial x_i$)．式 (1) の f^{d} は至るところに不連続性を持つため，変位の不連続性である亀裂を簡単に表すことができる．一方，f^{d} の微係数は有界ではないが，$\{\psi^\beta\}$ を使った g_i^{d} は有界であり，f の微係数の離散化となっている．

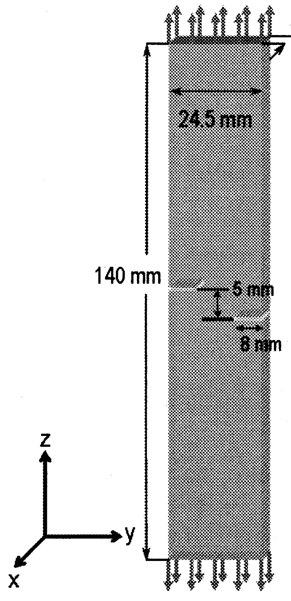
PDS の基本的なアイディアは単純である．不連続ガラーキン法のように暗にこのアイディアを使っている数値解析の方法もある．しかし，PDS では関数と微係数の離散化を厳密に区別しているため，従来の方法にはない大きなメリットが生じる．それは，領域分割の最適化ができることである．ボロノイ分割とデラネー分割が最適な領域分割の組であることが示される（正確にはデラネー多角形の重心を使って作られる準ボロノイ分割が最適である）．

PDS は関数の離散化の方法であるため，FEM に支障なく組み込むことができる．著者のグループはこれを FEM-β と称していたが，本論文では PDS-FEM と呼ぶ．また，PDS を使った新しい種類の FEM の要素が作られたと考えることもできる．なお，通常の FEM の要素分割は PDS-FEM ではデラネー分割に対応する．亀裂はボロノイ分割の境界を進展するため，通常の FEM の要素が亀裂によって切断されることになる．

変位境界条件が与えられた線形弾性体の 3 次元境界値問題に対し，PDS-FEM は次の汎関数を用いて離散化する[9]．

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{u},\epsilon,\sigma) = \int_B \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\mathbf{x})c_{ijkl}(\mathbf{x})\epsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \sigma_{ij}(\mathbf{x})(\epsilon_{ij}(\mathbf{x})\\
-u_{j,i}(\mathbf{x})) - b_i(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ここで u_i，ϵ_{ij}，σ_{ij} は変位，歪，応力であり，c_{ijkl} と b_i は弾性テンソルと物体力である．2 次元問題と同様，離散化から導かれる PDS-FEM のマトリクス方程式は同じ要素分割を使った線形要素の FEM のマトリクス方程式と一致する．



図–1　板材の解析モデル．

式 (3) の I を解く PDS-FEM において，亀裂進展は I の中の c_{ijkl} を変えることとして表現される．簡単な例としてデラネー四面体 Ψ^β が均一 ($c_{ijkl} = c_{ijkl}^{\mathrm{o}}$) である場合を考える．亀裂がボロノイ多面体の境界 $\partial\Phi^\alpha$ を進展すると，

$$
c_{ijkl}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{for } \mathbf{x} \text{ along } \partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta,\\ c_{ijkl}^{\mathrm{o}} & \text{otherwise.}\end{cases}
\tag{4}
$$

すなわち，Ψ^β から亀裂進展に対応する $\partial\Phi^\alpha$ が除かれ，厚さが無限に小さい空隙として亀裂がモデル化されたことを意味する．式 (4) の c_{ijkl} を式 (3) の I に代入するだけで，PDS-FEM は亀裂進展の数値計算を行うことができる．

3.　亀裂進展の数値シミュレーション

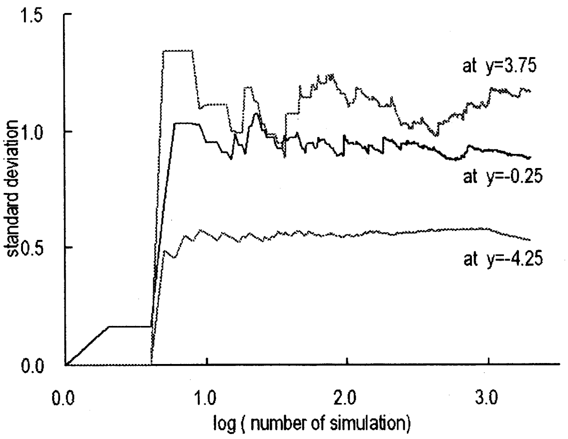
3.1　解析モデル及び問題設定

図 1 に示す板材を解析対象とする．板材の寸法は 24.5×140×5[mm] であり，亀裂長 8[mm] の二つの初期亀裂が，食い違い間隔 5[mm] で反対称の位置に置かれている．面外に x 軸を取り，面内の水平と鉛直方向に y 軸と z 軸をとる．材料は等方線形弾性体であり，破壊基準として引張強度を使う．材料特性を表 1 に整理する．引張強度は均一であるが，亀裂はボロノイ多面体の境界のみにそって進展するが，これは，他に比べてこの部分の引張強度が若干小さいというように解釈できる．一様引張実験を模擬した境界条件を与える．

材料強度に基づく破壊基準に従い，ボロノイ多面体の

Young's modulus [MPa]	3300
Poisson's ratio	0.38
strength [MPa]	40.0

表–1 材料特性.



図–2 試行回数と L の標準偏差の関係.

境界面上の直応力が材料強度を超えたときにこの境界面に亀裂が進展することとする．亀裂進展の結果，剛性マトリクスが変化するため，一様引張変位を 0.05[mm] づつ 10 ステップに分けた増分型の非線形解析を行う．

メッシュサイズは 2.00，1.25，0.75[mm] の 3 種類を使う．若干の修正は必要であるが，平均のメッシュサイズが設定された値となるよう適当な数のボロノイ母点をモデル内にランダムに発生させて，モンテカルロシミュレーションのモデルを作成する．モンテカルロシミュレーションの試行回数は亀裂進展経路の位置の標準偏差から計算する．亀裂進展経路の位置は次のように定義する．

$$L(x;t) = \langle y(x,t) \rangle. \tag{5}$$

ここで $y(x,t)$ は t 載荷ステップでの x での進展経路の y 座標であり，$\langle () \rangle$ は平均を表す．試行回数と L の標準偏差の関係を図 2 に示す．1000 回ほどのモンテカルロシミュレーションで標準偏差が収束することがわかる．

3.2 亀裂進展経路のばらつき

PDS-FEM で計算された亀裂進展経路の一例を図 3 に示す．初期亀裂が反対称の位置に置かれているため，理想的均一体モデルであれば二つの亀裂は反対称の進展経路をたどる．しかし図ではこの反対称性は崩れている．進展の詳細は次のようである．

1. 最初に左の亀裂が進展を開始する．右の亀裂は進展しない．
2. 厚さ方向の進展は一様でなく滑らかでもない．水平方向では，最初右の亀裂に向かうが，途中で水平に向きを変え停止する．
3. 次に右の亀裂が進展する．左の亀裂の先端を向き，急勾配で進展する．

他のモデルでも同様に非対称性は崩れている．どちらか一方のみが進展する場合の他，徐々に二つ亀裂が進展する場合もある．

亀裂進展経路のパターンは次の 3 つに分類できる．

1. 一つの亀裂が経路 P1 をたどって進展する．終了後，他の亀裂が経路 P2 をたどって進展する．
2. 一つの亀裂が最初は P1 をたどり，途中からほぼ水平に進展する．この経路を P1′ とする．進展終了後，他の亀裂が経路 P2 をたどって進展する．
3. ほぼ同時に二つの亀裂が進展する．一方は P1 ないし P1′，他方は P2 をたどる．

なお，経路 P1 は，2 次元平面歪状態の理想的均一体モデルで計算された経路である[11]（図 5 参照）.

厚さ方向にも亀裂進展経路がばらつく．図 3 に示した例でも，厚さ方向の進展は滑らかではない．しかし，1,000 個の不均一体モデルではモデルを縦に割るような亀裂進展はなく，面内に比べて厚さ方向のばらつきは小さい．

3.3 亀裂進展経路の確率密度関数

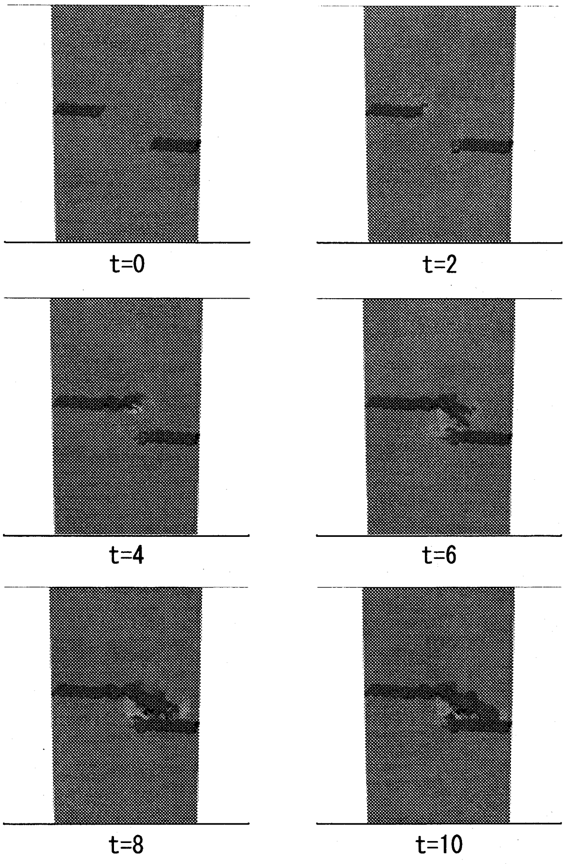
亀裂進展経路の確率密度関数を求める．長さ ds の正方形を断面とする厚さ 5mm の直方体を格子とし，格子 (n,m) を $\{(x,y) \mid n\mathrm{d}s < x < (n+1)\mathrm{d}s,\ m\mathrm{d}s < y < (m+1)\mathrm{d}s,\ 0 < z < 0.5\}$ として，この格子を通る亀裂進展経路の確率を次のように定義する．

$$P(n,m;t) = N(n,m,t)/1000. \tag{6}$$

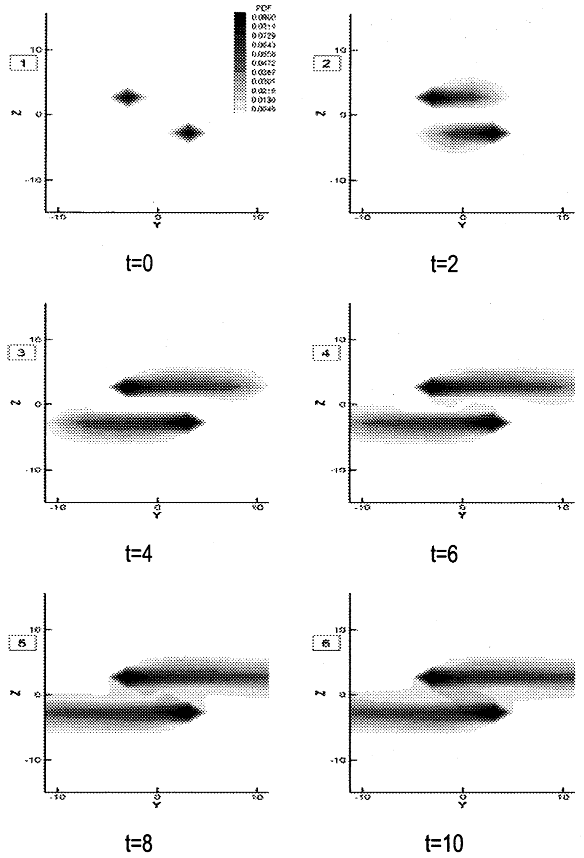
ここで $N(n,m,t)$ は t 載荷ステップでの格子 (n,m) 内にある進展経路のボロノイ母点の数である．計算された確率密度関数の例を図 4 に示す．最初に左と右の亀裂から微小な進展が起こるように見えるが $(t=2)$，これは亀裂進展が同時に起こることではなく，2 つの亀裂が同じ確率で進展することを意味している．互いに遠ざかるように亀裂は進展するが，そのばらつきは徐々に広がっていく $(t=4,6)$．そして一つの亀裂がある程度進展すると，残された亀裂進展が始まる．進展の方向は他方に向かう方向である $(t=8,10)$.

確率密度の値が他よりも大きい領域は，比較的高い確率で発生する進展経路である．前節の経路 P1，P1′，P2 は図 4 の次の領域に対応している．

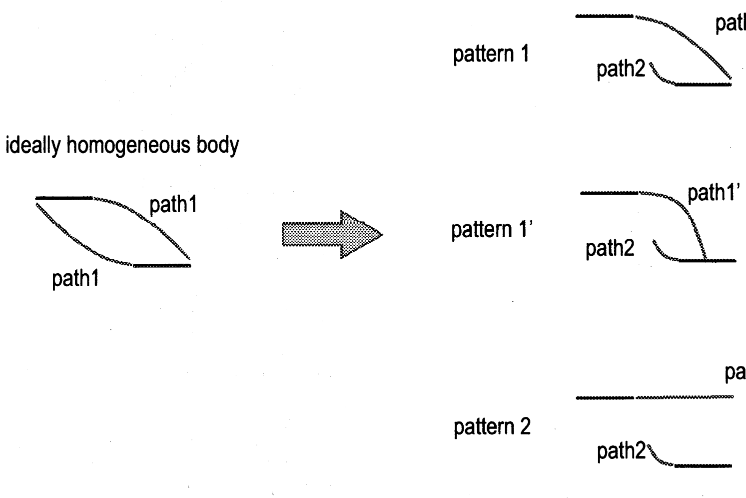
P1 緩勾配で右の亀裂先端後方に向かう領域
P1′ 上記の領域から枝分かれした水平の領域
P2 急勾配で右の亀裂先端に向かう領域



図–3 亀裂伸展経路の一例.



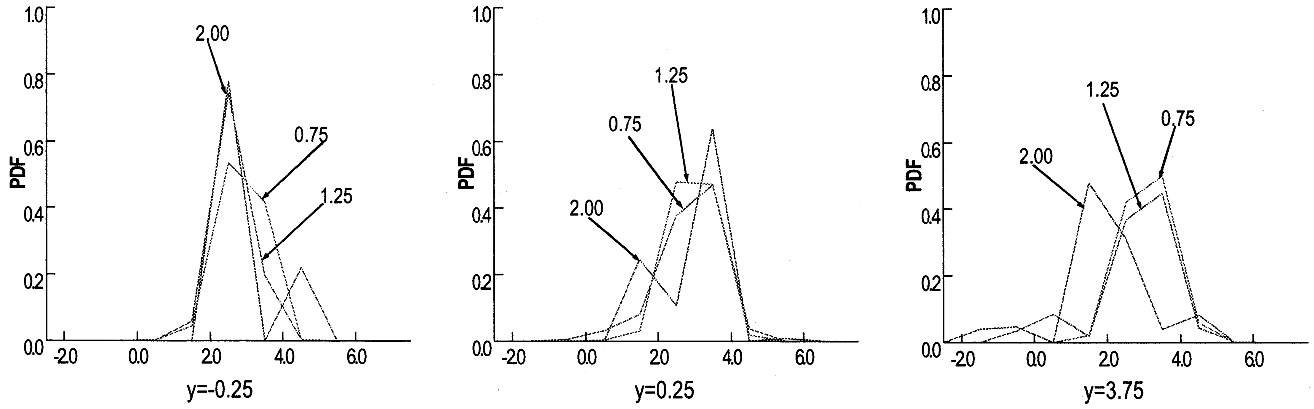
図–4 亀裂伸展経路の確率密度関数.



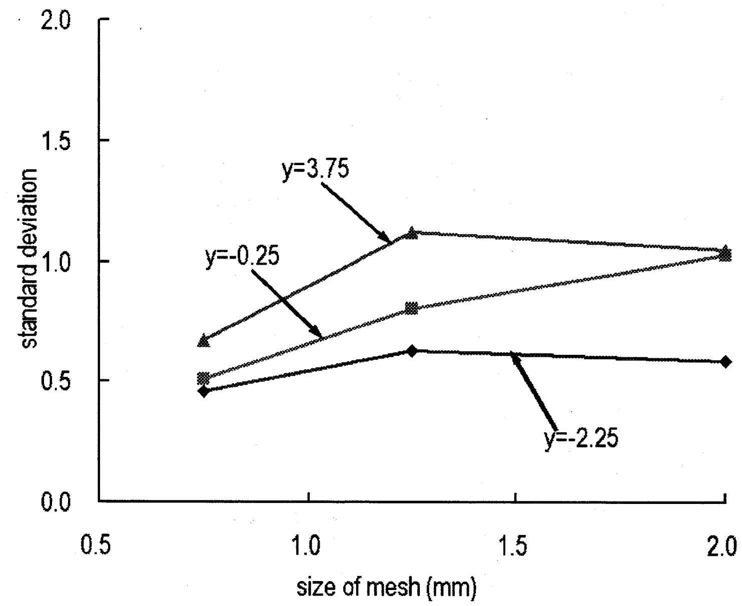
図–5 亀裂進展経路のパターン.

したがって確率密度関数の分布から,「2 つの亀裂が経路 P1 をたどって進展する」という理想的均一体の進展経路は数理的な意味で安定ではないことがわかる．局所的材料不均一性の結果，一つの亀裂は P1 ないし P1′ を通るものの，他方の亀裂が P2 を通ることになる場合が多いのである．

亀裂進展経路は亀裂先端の軌跡である．数理的には，時間とともに移動する亀裂先端の位置という空間の 3 次元ベクトル関数を 2 次に投影したものが亀裂進展経路となる．亀裂進展経路の安定・不安定に比べ，進展そのものはもっと複雑な安定・不安定を持つことになる．これは進展が時間とともに変化するからである．進展のばらつきを解析するにはモンテカルロシミュレーションによる進展の分析が必要である．



図–**6** メッシュサイズを変えた亀裂伸展経路の確率密度関数.



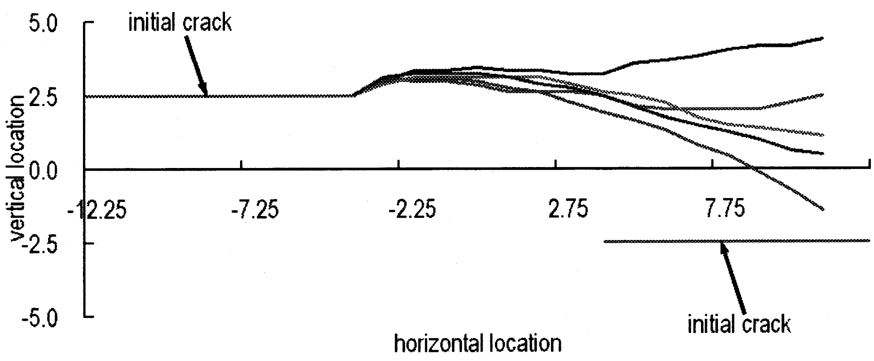
図–**7** メッシュサイズを変えた亀裂伸展経路の標準偏差.

3.4 メッシュサイズの影響

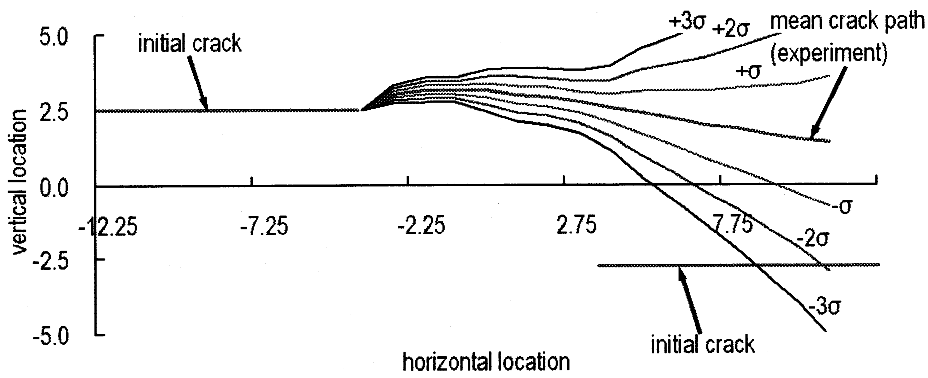
PDS-FEM ではボロノイ多面体の境界面が亀裂進展経路の候補となる．このため，メッシュサイズが大きいと一度の計算ステップで進展する亀裂の増分が大きくなる．すなわち，メッシュサイズが亀裂増分のサイズを決める．これは局所的材料不均一性の空間スケールに対応する．なお，メッシュサイズが 0 となる極限は不均一性がない理想的均一体モデルとなる．

メッシュサイズを変えたモデルを使って亀裂進展経路の確率密度関数を計算し，メッシュサイズが確率密度関数に与える影響を調べる．簡単のため $t=5$ での確率密度関数を図 6 に示す．$y=-3.25$, -0.25, 3.75 の 3 つの面での確率密度関数である．亀裂進展経路が数理的に安定である場合，メッシュサイズが 0 の極限で確率密度関数はデルタ関数に収束する．しかし，このような傾向は図 6 には見られない．前節で説明したように，理想的均一体モデルの亀裂進展経路が数理的な意味で不安定であることを示している．

メッシュサイズの影響をより定量的に調べるため，確率密度関数から亀裂進展経路の位置の標準偏差を計算し，メッシュサイズに対してプロットした．結果を図-7 に示す．確率密度関数と同様，メッシュサイズが小さくなるにつれて標準偏差は小さくなるものの，0 に収束することはない．すなわち，理想的均一体モデルの亀裂進展経路が不安定であることが確認される．また，亀裂先端に近い面 ($y=-3.25$) から離れるにつれて徐々に標準偏差が大きくなる傾向が見られる．これは，亀裂が進展するにつれて，亀裂進展経路のばらつきである標準偏差が大きくなることを意味している．これは直感的に納得できる当然の結果である．



図–8 画像解析によって得られた亀裂伸展経路.



図–9 伸展経路の平均と標準偏差.

Young's modulus [MPa]	3300
Poisson's ratio	0.38
density [kg/m³]	1.15

表–2 供試体の材料物性値.

4. 実験と数値シミュレーションの比較

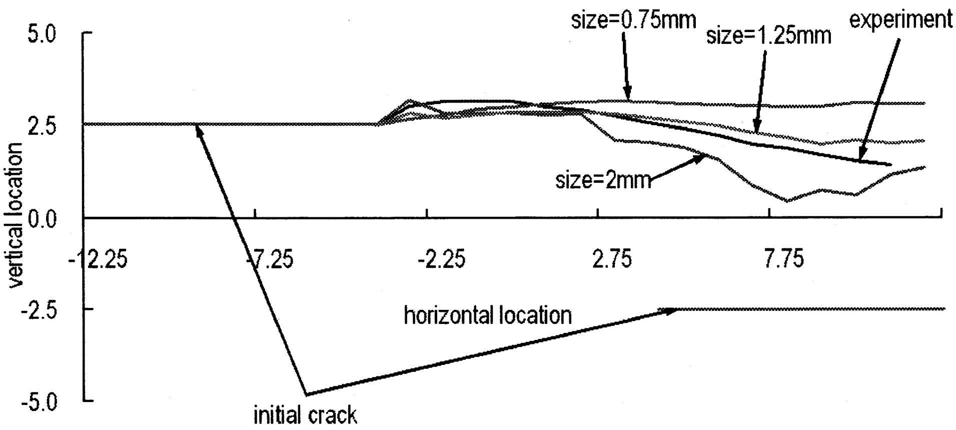
4.1 実験の概要と結果

本章では，別途行われた板材の破壊実験の結果を基準として，前章のPDS-FEMを使ったシミュレーションの妥当性や有効性を議論する．破壊実験は江藤等[12]によって開発された超高速ビデオカメラと沖中ら[13]が開発した画像トリガーを使い，亀裂の進展開始から停止までを撮影する．実験供試体はエポキシ樹脂で作成し，光弾性による干渉縞を撮影し，亀裂進展に伴う応力分布の変化を調べる．供試体の寸法と初期亀裂は前章の解析モデルと同一である．供試体の材料物性値は表2に整理する．

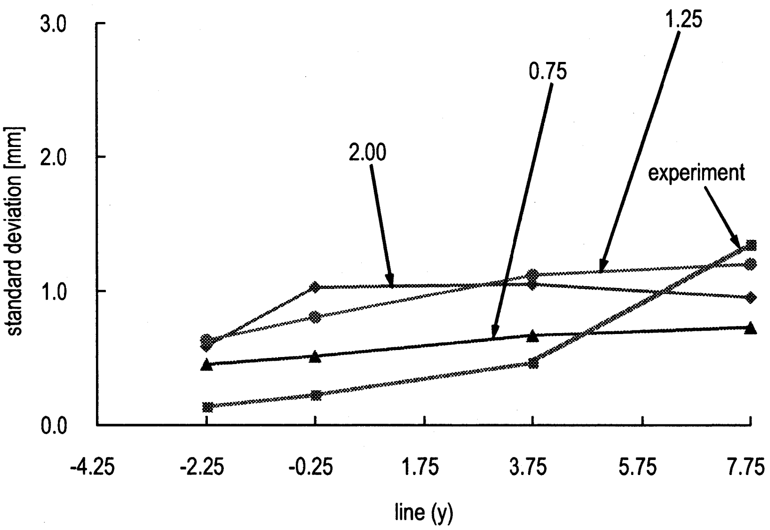
撮影された画像をデジタイザーで解析し，主経路となる亀裂の進展経路を決定した．5つの供試体の亀裂進展経路を図8に示す．また計測された亀裂進展経路の平均値と，平均値に標準偏差を足した経路の図9に示す．亀裂進展経路は，初期亀裂の先端付近では比較的ばらつきが小さいが，先端から離れるとばらつきが増加する．また，図9から，ばらつきの増加の仕方も一定ではなく，進展するにつれて大きくなることがわかる．実験に使われた供試体の数が5個と少ないため，定量的な分析には限界があるが，進展につれて経路のばらつきが増加する傾向は確認できる．

4.2 数値シミュレーションとの比較

実験と数値シミュレーションによって得られた亀裂進展経路の位置の平均を図10に示す．数値シミュレーションの進展経路は，計算に使われた4つのメッシュサイズでの進展経路である．どのメッシュサイズで計算された進展経路の平均も，実験で得られた進展経路の平均とは一致はしない．亀裂が進展するにつれて，数値シミュレーションで得られた平均の進展経路は実験の平均の進展経路から離れてしまう．この原因として，供試体の数が5つであり実験の平均に誤差があることは考えられるが，PDS-FEMで仮定された材料強度に



図–10 亀裂伸展経路の平均値の比較.



図–11 亀裂伸展経路の標準偏差の比較.

基づく破壊基準が適当でないことも大きな原因であると考えられる.

次に亀裂進展経路の標準偏差を比較した. 結果を図11に示す. この図から, 完全な一致では勿論ないものの, メッシュサイズが0.75[mm]の数値シミュレーション結果が実験に最も近いことが分かる. 初期亀裂の先端から離れたところでは0.75[mm]の標準偏差も実験の標準偏差から大きく離れており, 繰り返しであるが, 完全な一致ではない. 直感的な議論であるが, エポキシ材料の材料不均一性の空間スケールとして1[mm]以下の値が得られることは納得がいく.

亀裂進展経路の平均では見出せなかったものの, 標準偏差では相応に実験結果と一致するメッシュサイズを見つけることができた. この一致は限定的であり, 直ちにPDS-FEMの数値シミュレーションの妥当性を裏付けるものでは決してない. しかし, 精度は高くないものの, 亀裂進展経路のばらつきをPDS-FEMの数値シミュレーションによって評価できることは十分示唆している. また, PDS-FEMでは局所的材料不均一性の唯一のパラメータであるメッシュサイズを実験との比較から同定できることも示唆された.

5. おわりに

PDS-FEMを3次元に拡張し, 平行亀裂を持つ板材に対し, 引張破壊のモンテカルロシミュレーションを行った. 亀裂伸展経路の確率密度関数が計算されるため, 進展経路のばらつきを定量的に評価することができる. 実験との比較では, PDS-FEMの数値シミュレーションの妥当性は確認できなかった. しかし, 精度に

限界があるものの，PDS-FEM を使った亀裂伸展経路の評価が可能であることは示唆された．

参考文献

1) 若井淳: 粒子離散化を用いた数値解析手法の開発と固体の破壊現象の数値シミュレーション，東京大学工学系研究科社会基盤学専攻博士論文，2008.
2) F. Zhou F. and J. F. Molinari: Dynamic crack propagation with cohesive elements: a methodology to address mesh dependency, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **59**, 1-24, 2004.
3) Y. Mi, M. H. Aliabadi: Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **10**, 161-171, 1992.
4) Y. Sumi, Z. N. Wang: A finite-element simulation method for a system of growing cracks in a heterogeneous material, *Mechanics of Materials*, **28**, 197-206, 1998.
5) R. K. L. Su amd H. Y. Sun: Numerical solutions of two-dimensional anisotropic crack problems, *international Journal of Solids and Structures*, **40**, 18, 4615-35, 2003.
6) L. Chen, R. Ballarini and M. Grigoriu: Crack propagation in a material with random toughness, *International Journal of Fracture*, **125**, 353-369, 2004.
7) M. Kamaya and N. Totsuka: Influence of interaction between multiple cracks on sterss corrosion crack propagation, *Corrosion Science*, pp.2333-2352, 2002.
8) M. Kamaya: A crack growth evaluation method for interacting multiple cracks, *JSME International Journal*, Series A, **46**, 1, 15-23, 2003.
9) M. Hori, K.. Oguni and H. Sakaguchi: Proposal of FEM implemented with particle discretization for analysis of failure phenomena, *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, **53**, 681-703, 2005.
10) 小国健二，堀宗朗，阪口秀：破壊現象の解析に適した有限要素法の提案，土木学会論文集，**766**, I-68, pp. 203-217, 2004.
11) 佐藤晃，鈴木康正，深堀大介，菅原勝彦：多亀裂問題の亀裂進展解析への応力補償変位不連続法の適用，資源と素材, Vol. 120, pp. 493-499, 2004.
12) T. G. Etoh, D. Poggemenn, G. Kreider, H. Mutoh, A. Theuwissen, A. Ruckelshausen, Y. Kondo, H. Maruno, K. Takubo, H, Soya, K. Takehara, T. Okinaka and Y. Takano: An image sensor which captures 100 consecutive frames at 1000000 frames/s, *IEEE Transactions on Electron Devices*, **50**(1), 144-151, 2003.
13) 沖中知雄，パベル・カリモフ，江藤剛治: 静的載荷下で進展を開始する亀裂先端部近傍の応力場の超高速ビデオカメラを用いた可視化，応用力学論文集，**10**, 301-309, 2007.

(2008 年 4 月 14 日 受付)