

剛塑性解析法による強度分布最適化を援用した 最適形状に関する一考察

A study on optimum shape of solids subjected to external loads
with the help of strength distribution optimization by rigid-plastic analysis

小林俊一*・柳本佳楠子**・田村 武***

Shun-ichi KOBAYASHI, Kanako YANAGIMOTO, Takeshi TAMURA

*正会員 博士(工学) 京都大学大学院助教 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

**非会員 京都大学大学院学生 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

***フェロー 工博 京都大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

Estimation of optimum shape of solids subjected to external loads in the context of rigid-plastic analysis is investigated in this paper. Instead of solving optimum shape directly, rigid-plastic strength distribution optimization method is used to obtain areas where their material strengths are zero. Since it is able to construct a statically admissible stress field without such zero-strength-areas, it can be interpreted that a certain optimum shape can be obtained by removing those zero-strength-areas. To ensure the validity of a proposed method, Bishop's complete stress solution of a punching problem and a numerical solution is compared.

Key Words : optimum shape, strength distribution optimization, rigid-plastic analysis, interior point method

1. はじめに

構造物や地盤にある所定の荷重が載荷する場合の構造物内部の応力状態を考えてみる。荷重レベルが小さいときは、構造物内部のいずれの場所でも弾性状態を示す。一方、荷重レベルが増加して弾性限界を超える荷重が作用するときは、構造物内の各位置における応力は材料の降伏関数に制約されることになるが、この制約に対する余裕度は位置によって異なる。すなわち、ほとんど応力が作用せずに遊んでいるような部分があれば、材料強度をフルに発揮している部分もあるだろう。では、いったいどのような形状にすれば、全ての部分が材料強度をフルに発揮するようになるのだろうか。

著者らは、これまで混合型剛塑性有限要素法の開発^{1),2)}を通して、剛塑性力学の数理構造を簡潔明瞭に整理するとともに、効率的な数値解析手法を提案してきた。この文脈に沿って、剛塑性力学の観点から形状最適化問題にアプローチできないかと考えた。これが本研究のそもそもの動機である。

弾性体の形状あるいは位相を最適化する問題については、さまざまな研究が行われており、応用分野も多岐に渡っている。(例えば日本応用数理学会研究部会³⁾, AMRのレビュー論文⁴⁾, Rozvanyのレビュー論文^{5),6)}などを参照のこと)。その中でも密度法あるいはSIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法と呼ばれる方法は、0/1条件(つまり物質があるか、穴が空いているか)を緩和し、中間値を許容した密度~コスト関係の関数を導入することによって、形状やトポロジーの最適化を行う手法として知られている。目的関数や制約条件の選択によって、いくつかのバリエーションが考えられるが、例えば解析領域に対して、体積制

約条件を課した下で平均コンプライアンスを最小化するなどの定式化がよく用いられる。

これに対して著者らは、密度法等のアナロジーを用いて、剛塑性境界値問題という枠組みで形状や位相の最適化問題に取り組みたく、本論文でその具体的な方法を議論したい。

著者らは剛塑性強度分布最適化問題について、混合型剛塑性有限要素法によって定量的に評価可能な数値解析手法をすでに提案している⁷⁾。この解析手法では、材料強度をコスト関数の変数とし、釣合式と降伏条件の制約の下で材料強度を上限と下限の中で変化させて、所定の荷重を支持できる強度分布の中で最小のコストとなる分布を解く剛塑性強度分布最適化問題を取り扱った。この手法は、もともと補強工法などを念頭にして、どこを効率的に補強すればよいのかを定量的に議論するために提案したものである。

一方で、少し見方を変えれば、この手法は剛塑性形状最適化あるいはトポロジー最適化としても応用できる可能性がある。例えば、材料強度の下限をゼロとして最適化問題を解けば、強度がゼロとなる部分は必ずゼロ応力状態となる。ゼロ応力状態の部分はいかなる外力も分担しないので、これらの部分を取り除いても系全体の力の釣合にはまったく影響を及ぼさない。したがって、材料強度の下限がゼロであるような強度分布最適化問題を解いて、材料強度がゼロとなる領域を抽出すれば、ここから最適な形状やトポロジーが近似的に評価できると考えた。しかしながら、このような視点、つまり、剛塑性強度分布最適化手法に基づき、材料強度を設計変数とする、密度法的な形状・トポロジー最適化の研究については、筆者の知る範囲では見当たらない。そこで、本論文では上記の手法について、具

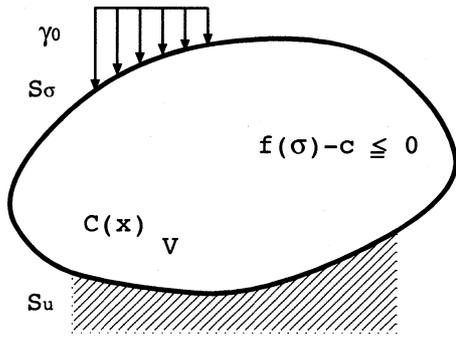


図-1 対象とする剛塑性境界値問題

体的な数値解析を通して議論を行うこととした。

2. 剛塑性強度分布最適化問題の概要

本研究では、形状最適化問題を直接解く代わりに、剛塑性強度分布最適化問題を解いて、得られた強度分布から最適形状を推定する。ここでは、対象とする剛塑性強度分布最適化問題の定式化と解法について、文献⁷⁾にならって導出しておく。

2.1 対象とする剛塑性境界値問題

境界条件として、応力境界 S_σ で一定の表面力 γ_0 が作用し、変位境界 S_u で変位速度がゼロとなる境界条件 $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ が課せられた、自重ゼロの剛完全塑性材料で構成される領域 V を考える。その概要を図-1 に示す。

ここで剛完全塑性材料の強度 $c(\mathbf{x})$ は位置 \mathbf{x} によって異なるものとし、応力場はあらゆる位置で降伏関数 $f(\boldsymbol{\sigma}) - c \leq 0$ に従うものと仮定する。ここに $\boldsymbol{\sigma}$ は応力である。

この外力に対して塑性的に安定で、しかも経済的な形状を評価するため、材料強度 c の取りうる範囲を下限 c_{\min} から上限 c_{\max} までとし、釣合式、応力境界条件と降伏条件を満足させる静力学的な場の中で、材料強度 c の関数としてコスト関数を最小化する問題を「剛塑性強度分布最適化問題」と呼ぶことにする。

コスト関数としてはさまざまな関数を用いることが可能であるが、ここでは材料強度 c の線形関数としてコスト関数を

$$\int_V c(\mathbf{x}) dV \quad (1)$$

と定義する。材料強度と価格が線形関係であると仮定すれば、この線形コスト関数 (1) は領域全体の材料価格を反映していることになる。さらに、この線形コスト関数を用いると、剛塑性強度分布最適化問題は凸計画問題として定式化できる。

2.2 定式化

(1) 空間離散化

有限要素法を用いて速度場 $\dot{\mathbf{u}}$ を以下のように空間離散化する

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u \boldsymbol{\kappa} \quad (2)$$

ここに \mathbf{N}_u は速度場に関する形状関数、 $\boldsymbol{\kappa}$ は節点変位速度である。速度場 (2) を空間微分すると塑性ひずみ速度場 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ が

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \mathbf{B}_u \boldsymbol{\kappa} \quad (3)$$

と表せる。

一方、応力場については異なる形状関数 \mathbf{N}_σ によって

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_\sigma \boldsymbol{\sigma}_{el} \quad (4)$$

と近似表現をする。ここに $\boldsymbol{\sigma}_{el}$ は離散化した応力であり、用いる形状関数に応じて、節点ごとに離散化したり、要素ごとに離散化することが可能である。

ここでは、より一般的な形で定式化するため、具体的な形状関数を明示する前に、形式的な表現で必要な式を導出しておくことにする。

(2) 釣合式

釣合式の弱形式を離散化した形で表すと

$$\left[\int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{N}_\sigma dV \right] \boldsymbol{\sigma}_{el} = \left\{ \int_{S_\sigma} \mathbf{N}_u^T \gamma_0 dS \right\} + \left\{ \int_V \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV \right\} + \mathbf{D}_d^T \mathbf{p} \quad (5)$$

となる。ここに式 (5) の右辺第 1 項は表面力 γ_0 による外力項、第 2 項は物体力 $\rho \mathbf{b}$ による外力項、第 3 項は固定境界条件 S_u に対応する反力の項で、行列 \mathbf{D}_d は変位速度に関する全自由度からディリクレ (固定) 境界条件に対応した部分に対応付ける行列であり、ベクトル \mathbf{p} は固定境界に現れる反力ベクトルの項*である。以後は、簡単のために物体力を無視して解析を行うことにするので、釣合式 (5) を単に

$$\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{el} = \boldsymbol{\Gamma}_0 + \mathbf{D}_d^T \mathbf{p} \quad (6)$$

と表すことにする。ここに行列 \mathbf{B}^T とベクトル $\boldsymbol{\Gamma}_0$ はそれぞれ

$$\mathbf{B}^T = \left[\int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{N}_\sigma dV \right] \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_0 = \left\{ \int_{S_\sigma} \mathbf{N}_u^T \gamma_0 dS \right\} \quad (8)$$

である。

(3) 強度分布最適化問題の Lagrangian

材料強度 c を応力場と同様に空間離散化すれば、線形コスト関数 (1) は

$$\int_V c(\mathbf{x}) dV = \left[\int_V \mathbf{N}_\sigma dV \right] \mathbf{c}_{el} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{c}_{el} \quad (9)$$

と書ける。ここにベクトル \mathbf{v} は

$$\mathbf{v} = \int_V \mathbf{N}_\sigma dV \quad (10)$$

* 変位法に基づく有限要素法の場合は、ディリクレ境界条件を満足する試行関数を用いるために、このようなディリクレ境界反力を陽に書く必要はないが、今回の定式化は混合型の定式化であるためディリクレ境界反力も陽に出てくる。

である。特に形状関数が要素一定の関数である場合は、ベクトル \mathbf{v} の各成分はそれぞれの要素の体積となる。

コスト関数 (9) と静的許容な応力場に課される制約条件から、剛塑性強度分布最適化問題は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \text{Objective func.: } & \max(-\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}_{el}) \\ \text{Subject to: } & \begin{cases} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{el} = \boldsymbol{\Gamma}_0 + \mathbf{D}_d^T \mathbf{p} \\ \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{el}) - \mathbf{c}_{el} \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{\min} \leq \mathbf{c}_{el} \leq \mathbf{c}_{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

この最適化問題 (11) から直ちに Lagrangian が以下のように書ける。

$$L_{sp} = \begin{cases} -\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}_{el} + \boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{el} - \boldsymbol{\Gamma}_0 - \mathbf{D}_d^T \mathbf{p}) \\ -\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{el}) - \mathbf{c}_{el} + \mathbf{s}) + \mathbf{s} \cdot \mathbf{t} \\ + (\mathbf{c}_{el} - \mathbf{c}_{\min}) \cdot \mathbf{m} + (\mathbf{c}_{\max} - \mathbf{c}_{el}) \cdot \mathbf{n} \\ \quad \text{if } \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \mathbf{m} \geq \mathbf{0}, \mathbf{n} \geq \mathbf{0} \\ +\infty \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

ここに変数 $\boldsymbol{\kappa}$ は釣合条件に対する Lagrange 乗数で、速度場の自由度と同じ要素数を持つ。変数 $\boldsymbol{\lambda}$ は降伏条件に関する Lagrange 乗数、変数 \mathbf{s} はスラック変数で、降伏条件が離散化した応力 $\boldsymbol{\sigma}_{el}$ や材料強度 \mathbf{c}_{el} ごとに課せられるため、ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$, \mathbf{s} の要素数は、応力や材料強度の空間離散化と一致する。変数 \mathbf{t} , \mathbf{m} , \mathbf{n} は不等式制約条件に関する Lagrange 乗数である。一般に、不等式制約条件に関する Lagrange 乗数については、Lagrange 双対理論を介して双対問題を議論する都合上、これらが正の値を取る場合と負の値を取る場合で異なる Lagrangian を定義するのが都合が良いとされる⁸⁾ので、それに従った。

さらに後述するように、これらの Lagrange 乗数は双対問題を介して力学的に解釈することが可能であり、変数 $\boldsymbol{\kappa}$ は節点速度、変数 $\boldsymbol{\lambda}$ は塑性乗数に対応していることが分かる。

Lagrangian (12) を用いて、最適化問題 (11) の双対問題を導出しておく。最適化問題 (11) は Lagrangian の上限・下限操作

$$\sup_{\boldsymbol{\sigma}_{el}, \mathbf{p}, \mathbf{c}_{el}, \mathbf{s}} \left\{ \inf_{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \mathbf{n}} L_{sp} \right\} \quad (13)$$

となっている。一方、その双対問題は Lagrange 双対理論によれば、上限、下限の操作順序を入れ替えた

$$\inf_{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \mathbf{n}} \left\{ \sup_{\boldsymbol{\sigma}_{el}, \mathbf{p}, \mathbf{c}_{el}, \mathbf{s}} L_{sp} \right\} \quad (14)$$

から導出できる。これを具体的に行えば、以下の双対問題を得る。

$$\begin{aligned} \text{Objective func:} & \min \{ \mathcal{D}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_0 - \mathbf{m} \cdot \mathbf{c}_{\min} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}_{\max} \} \\ \text{Subject to: } & \begin{cases} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{v} + \mathbf{m} - \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_d \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

ここに関数 $\mathcal{D}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda})$ は応力 $\boldsymbol{\sigma}_{el}$ に関する上限操作を用いて表される関数で

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}_{el}} \{ \boldsymbol{\sigma}_{el} \cdot \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{el}) \} \quad (16)$$

である。実際に数値解析を行う上では、式 (16) と等価な条件を陽に書き下す必要がある。降伏関数 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{el})$ が十分に滑らかで応力 $\boldsymbol{\sigma}_{el}$ で微分可能であると仮定すれば**、式 (16) の 1 次の停留条件として

$$\mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{el}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (17)$$

が得られる。式 (17) は、その式の形から関連流れ則を意味することが分かる。ただし、行列 \mathbf{B} の定義式 (7) に注意すると、左辺の塑性ひずみ速度を領域積分した量が、右辺のポイントワイズに計算される降伏関数の勾配と塑性乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ の重み付き和で表現されていることに注意する。

(4) 双対ギャップと相補性条件

双対ギャップは主問題と双対問題の目的関数値の差である。主・双対の関係は相対的なものであるので、ここでは双対問題 (15) の目的関数と主問題 (11) の目的関数の差を双対ギャップ \mathcal{G} とする。

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{D}(\boldsymbol{\kappa}^U, \boldsymbol{\lambda}^U) - \boldsymbol{\kappa}^U \cdot \boldsymbol{\Gamma}_0 \\ &\quad - \mathbf{m}^U \cdot \mathbf{c}_{\min} + \mathbf{n}^U \cdot \mathbf{c}_{\max} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{c}_{el}^L \\ &\geq \boldsymbol{\sigma}_{el}^L \cdot \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}^U - \boldsymbol{\lambda}^U \cdot \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{el}^L) - \boldsymbol{\kappa}^U \cdot \boldsymbol{\Gamma}_0 \\ &\quad - \mathbf{m}^U \cdot \mathbf{c}_{\min} + \mathbf{n}^U \cdot \mathbf{c}_{\max} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{c}_{el}^L \quad (18) \\ &= \boldsymbol{\lambda}^U \cdot \mathbf{s}^L + \mathbf{m}^U \cdot (\mathbf{c}_{el}^L - \mathbf{c}_{\min}) \\ &\quad + \mathbf{n}^U \cdot (\mathbf{c}_{\max} - \mathbf{c}_{el}^L) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

ここに上添字 L は主問題 (下界) に関する変数、上添字 U は双対問題 (上界) に関する変数を表す。弱双対定理によれば、凸計画問題の双対ギャップは必ず非負であるが、確かに式 (18) で表される双対ギャップも非負となっている。

さらに双対定理によると双対ギャップ \mathcal{G} はゼロとなるのは、最適解のときに限られるので、最適解 (上添字*) では以下の相補性条件が成り立つ。

$$\boldsymbol{\Lambda}^* \mathbf{s}^* = \mathbf{S}^* \boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}^* \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}^* \geq \mathbf{0} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^* (\mathbf{c}_{el}^* - \mathbf{c}_{\min}) &= \mathbf{C}^* \mathbf{m}^* - \mathbf{M}^* \mathbf{c}_{\min} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}_{el}^* - \mathbf{c}_{\min} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{m}^* \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^* (\mathbf{c}_{\max} - \mathbf{c}_{el}^*) &= \mathbf{N}^* \mathbf{c}_{\max} - \mathbf{C}^* \mathbf{n}^* = \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}_{\max} - \mathbf{c}_{el}^* &\geq \mathbf{0}, \mathbf{n}^* \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (21)$$

ここに行列 $\boldsymbol{\Lambda}^*$, \mathbf{S}^* , \mathbf{M}^* , \mathbf{N}^* , \mathbf{C}^* はそれぞれ対角項のみに非ゼロ成分を持つ行列で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}^* &= \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}^*) & \mathbf{S}^* &= \text{diag}(\mathbf{s}^*) & \mathbf{M}^* &= \text{diag}(\mathbf{m}^*) \\ \mathbf{N}^* &= \text{diag}(\mathbf{n}^*) & \mathbf{C}^* &= \text{diag}(\mathbf{c}_{el}^*) \end{aligned}$$

と定義される。

** 実際に本研究で用いている降伏関数も、この微分可能性を満足する。

(5) 最適解が満たす方程式

以上の議論をまとめると、最適解が満たすべき方程式は以下のとおりである。

$$\text{釣合い式: } \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{el}^* = \boldsymbol{\Gamma}_0 + \mathbf{D}_d^T \mathbf{p}^* \quad (22)$$

$$\text{降伏条件: } \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{el}^*) - \mathbf{c}_{el}^* + \mathbf{s}^* = \mathbf{0} \quad (23)$$

$$\text{関連流れ則: } \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}^* - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{el}} \right)^{*T} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (24)$$

$$\text{ディリクレ条件: } \mathbf{D}_d \boldsymbol{\kappa}^* = \mathbf{0} \quad (25)$$

$$\text{塑性乗数: } \boldsymbol{\lambda}^* - \mathbf{v} + \mathbf{m}^* - \mathbf{n}^* = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$\text{応力の相補性条件: } \mathbf{S}^* \boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{0} \quad (27)$$

$$\text{強度の下限条件: } \mathbf{M}^*(\mathbf{c}_{el}^* - \mathbf{c}_{\min}) = \mathbf{0} \quad (28)$$

$$\text{強度の上限条件: } \mathbf{N}^*(\mathbf{c}_{\max} - \mathbf{c}_{el}^*) = \mathbf{0} \quad (29)$$

したがって、混合型の解法ではこれらの方程式全てを満足する変数の組を見出せばよいことになる。

2.3 主双対内点法による解法

式(22)~(29)は非線形であるため、通常、適当な反復解法で解を求める。ここでは凸計画問題の特徴を活かして、主双対内点法のアルゴリズムを用いた解法を利用する。主双対内点法では、相補性条件を厳密に満足させる代わりに、繰返し計算過程で正の側からゼロに収束する適当な単調減少列をバリエータパラメータとして用い、繰返し計算の進行に伴って相補性条件を徐々に満足させて最適解を求める方法である。

さらに主双対内点法では、実行領域の内点条件を満足しておれば、大域的な収束が保証されている。したがって、内点条件に基づいて最も効率的なステップ幅を求めて利用できる。このため、通常のニュートン法に比べて安定かつ高速な繰返し計算が可能である。

(1) バリアパラメータ

相補性条件(27)、(28)、(29)にバリアパラメータ $\varepsilon_c, \varepsilon_m, \varepsilon_n$ を導入すると、相補性条件は以下のように近似的に書き換えられる。

$$\mathbf{S}^* \boldsymbol{\lambda}^* = \varepsilon_c \mathbf{e}_c \searrow 0 \quad (30)$$

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{c}_{el}^* - \mathbf{c}_{\min}) = \varepsilon_m \mathbf{e}_m \searrow 0 \quad (31)$$

$$\mathbf{N}^*(\mathbf{c}_{\max} - \mathbf{c}_{el}^*) = \varepsilon_n \mathbf{e}_n \searrow 0 \quad (32)$$

ここにベクトル $\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n$ は全ての要素が1のベクトルである。

バリエータパラメータは、繰返し過程での近似解を用いて評価でき、しかも繰返し計算の進行とともに減少するものを選ぶ。ここでは、パラメータ $\beta \leq 1$ で線形に減少させ、さらにバリエータパラメータが1以下になればパラメータ ω の冪乗によって加速度的に減少させる以下のものを用いた。

$$\varepsilon_c = \beta_c \left(\frac{\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\lambda}}{\dim(\mathbf{e}_c)^2} \right)^{\omega_c} \quad (33)$$

$$\varepsilon_m = \beta_m \left(\frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{c}_{el} - \mathbf{c}_{\min})}{\dim(\mathbf{e}_m)^2} \right)^{\omega_m} \quad (34)$$

$$\varepsilon_n = \beta_n \left(\frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{c}_{\max} - \mathbf{c}_{el})}{\dim(\mathbf{e}_n)^2} \right)^{\omega_n} \quad (35)$$

ここに $\dim()$ はベクトルの次元を表す。パラメータ β, ω の値は、予備的な解析によって収束性の良い値を選ぶ必要がある。本研究の場合、 $\beta_c = 0.8, \beta_m = \beta_n = 0.4, \omega_c = \omega_m = \omega_n = 1.2$ を用いた。

(2) 繰返し計算

繰返し計算によって解を更新するためには、満足すべき方程式を近似解のまわりでテーラー展開して得られる増分形の方程式を解いてまず解の更新方向を求め、つぎに不等式制約条件に関する内点条件から、解を更新する幅を評価し、これら得られた解の更新方向と更新幅を用いて新たな近似解を求める。計算の収束判定は、相補性条件によって評価する。

増分形の方程式 方程式(24)、(23)、(22)、(26)、(25)、(30)、(31)、(32)をそれぞれ近似解のまわりでテーラー展開すると、それぞれ以下に挙げる増分形の方程式を得る。

$$\left[\frac{\partial^2(\Delta \mathbf{f})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{el} \partial \boldsymbol{\sigma}_{el}} \right] \Delta \boldsymbol{\sigma}_{el} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{el}} \right)^T \Delta \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{B} \Delta \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{r}_\kappa \quad (36)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{el}} \right) \Delta \boldsymbol{\sigma}_{el} - \Delta \mathbf{c} + \Delta \mathbf{s} = \mathbf{r}_f \quad (37)$$

$$- \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{el} - \mathbf{D}_d^T \Delta \mathbf{p} = \mathbf{r}_\sigma \quad (38)$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda} - \Delta \mathbf{n} + \Delta \mathbf{m} = \mathbf{r}_s \quad (39)$$

$$\mathbf{D}_d \Delta \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{r}_d \quad (40)$$

$$\mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\Lambda} \Delta \mathbf{s} = \mathbf{r}_c \quad (41)$$

$$(\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\min}) \Delta \mathbf{m} + \mathbf{M} \Delta \mathbf{c} = \mathbf{r}_m \quad (42)$$

$$(\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\max}) \Delta \mathbf{n} + \mathbf{N} \Delta \mathbf{c} = \mathbf{r}_n \quad (43)$$

ここに右辺は残差ベクトルであり、当該ステップの近似解を用いてそれぞれ以下のように定義される。

$$\mathbf{r}_\kappa = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{el}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} \quad (44)$$

$$\mathbf{r}_f = - \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{el}) + \mathbf{c} - \mathbf{s} \quad (45)$$

$$\mathbf{r}_\sigma = \boldsymbol{\Gamma}_0 + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{el} + \mathbf{D}_d^T \mathbf{p} \quad (46)$$

$$\mathbf{r}_d = - \mathbf{D}_d \boldsymbol{\kappa} \quad (47)$$

$$\mathbf{r}_s = - \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{v} + \mathbf{n} - \mathbf{m} \quad (48)$$

$$\mathbf{r}_c = \varepsilon_c \mathbf{e}_c - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{s} \quad (49)$$

$$\mathbf{r}_m = \varepsilon_m \mathbf{e}_m - \mathbf{m} (\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\min}) \quad (50)$$

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{n} (\mathbf{C}_{\max} - \mathbf{C}) - \varepsilon_n \mathbf{e}_n \quad (51)$$

次に、行列 $\mathbf{S}, \mathbf{C}, \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\min}, \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\max}$ の逆行列が

$$\mathbf{S}^{-1} = \text{diag}(1/s_i)$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \text{diag}(1/c_i)$$

$$(\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\min})^{-1} = \text{diag}(1/(c_i - c_{i \min}))$$

$$(\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\max})^{-1} = \text{diag}(1/(c_i - c_{i \max}))$$

と容易に計算できることを利用すれば、増分 $\Delta \mathbf{s}, \Delta \boldsymbol{\lambda}, \Delta \mathbf{m}, \Delta \mathbf{n}$ は、残りの増分を用いて以下のように消去で

きる。

$$\Delta s = r_\sigma + \Delta c - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{el}} \right) \Delta \sigma_{el} \quad (52)$$

$$\Delta \lambda = S^{-1} (r_c - \Lambda \Delta s) \quad (53)$$

$$\Delta m = (C - C_{\min})^{-1} (r_m - M \Delta c) \quad (54)$$

$$\Delta n = (C - C_{\max})^{-1} (r_n - N \Delta c) \quad (55)$$

したがって、繰返し計算過程で解くべき増分形方程式は、最終的に以下の形にまとめられる。

$$\begin{bmatrix} E & -G & -B & 0 \\ -G^T & K & 0 & 0 \\ -B^T & 0 & 0 & D_d^T \\ 0 & 0 & D_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta c \\ \Delta \kappa \\ \Delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_\kappa \\ r'_s \\ r_\sigma \\ r_d \end{bmatrix} \quad (56)$$

ここに、行列 E, G, K はそれぞれ以下のとおりである。

$$E = \left[\frac{\partial^2 (\Lambda f)}{\partial \sigma_{el} \partial \sigma_{el}} \right] + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{el}} \right)^T S^{-1} \Lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{el}} \right) \quad (57)$$

$$G = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{el}} \right)^T S^{-1} \Lambda \quad (58)$$

$$K = \Lambda S^{-1} + M(C_{st} - C_{\min})^{-1} - N(C_{el} - C_{\max})^{-1} \quad (59)$$

さらに、残差ベクトル r'_κ, r'_s はそれぞれ以下のとおりである。

$$r'_\kappa = r_\kappa \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{el}} \right)^T S^{-1} (r_c - \Lambda r_f) \quad (60)$$

$$r'_s = -r_s + S^{-1} (r_c - \Lambda r_\sigma) - (C - C_{\min})^{-1} r_m + (C - C_{\max})^{-1} r_n \quad (61)$$

解の更新幅の評価 主双対内点法では、ステップ幅 γ で更新した近似解が不等式制約条件を満たす内点であることが必要である。したがって、以下の全ての不等式条件を満足するステップ幅 γ を用いる必要がある。

$$\tilde{s} + \gamma \Delta s \geq 0 \quad (62)$$

$$\tilde{\lambda} + \gamma \Delta \lambda \geq 0 \quad (63)$$

$$\tilde{m} + \gamma \Delta m \geq 0 \quad (64)$$

$$\tilde{n} + \gamma \Delta n \geq 0 \quad (65)$$

$$\tilde{c}_{el} + \gamma \Delta c_{el} - c_{\min} \geq 0 \quad (66)$$

$$c_{\max} - \tilde{c}_{el} - \gamma \Delta c \geq 0 \quad (67)$$

ここに変数 $\tilde{\cdot}$ は繰返し計算過程での近似解を表す。解の更新幅は広く取れるほど繰返し計算回数が減らせることになるので、実際に用いられる更新幅 γ^* は式 (62) ~ (67) を全て満たす最も大きなステップ幅 γ_{\max} に近い値を採用することが多い。本研究では $\gamma^* = 0.8\gamma_{\max}$ とした。

解の更新と計算の収束 前述のように求めたステップ幅 γ^* を用いて、以下のように近似解を更新する。

$$\sigma_{el} = \tilde{\sigma}_{el} + \gamma^* \Delta \sigma_{el} \quad (68)$$

$$p = \tilde{p} + \gamma^* \Delta p \quad (69)$$

$$\kappa = \tilde{\kappa} + \gamma^* \Delta \kappa \quad (70)$$

$$c_{el} = \tilde{c}_{el} + \gamma^* \Delta c_{el} \quad (71)$$

$$\lambda = \tilde{\lambda} + \gamma^* \Delta \lambda \quad (72)$$

$$s = \tilde{s} + \gamma^* \Delta s \quad (73)$$

$$m = \tilde{m} + \gamma^* \Delta m \quad (74)$$

$$n = \tilde{n} + \gamma^* \Delta n \quad (75)$$

更新された近似解について、各相補性条件の残差を計算し、すべての相補性条件において、残差が収束判定基準 1.0×10^{-5} 以下になれば、解が収束したものとして計算を終了する。

3. 自重のないトレスカ材料のパンチング問題

ここでは、自重のないトレスカ材料のパンチング問題を例題に取り上げ、提案する手法の妥当性について検討する。トレスカ材料のパンチング問題は、応力場の完全解、すなわち塑性域から剛体域に拡張した静的可容な応力場の解が特性曲線法によって得られている。したがって、完全解のゼロ応力領域の形状と数値解析結果のゼロ材料強度領域を比較することによって、最適形状やトポロジーについて定量的な議論が可能となる。

3.1 対象となる剛塑性境界値問題

自重を無視できるトレスカ材料 (強度 c_0) からなる 2次元半無限領域に一樣な鉛直荷重が作用するパンチング問題を取り上げる。解析に用いたメッシュを図-2に示す。ディリクレ境界条件は、現象の対称性を考慮して左側面をスライダーとし、下面については摩擦が作用しないと仮定してスライダー境界とした。残りの境界ではノイマン境界条件を課しており、荷重の载荷領域として上面 2要素分の領域に一定の鉛直方向表面力を作用させ、残りの部分は表面力をゼロとした。

このパンチング問題の極限荷重は支持力係数 $N_c = \pi + 2$ として知られている。さらに、この極限荷重は正解であることが知られている。

この数値計算は2次元問題として定式化し、速度場の離散化については1次アイソパラメトリック要素を、応力場の離散化については要素一定の形状関数を用いた。

この問題について、作用外力として極限荷重 Γ_0 (支持力係数 $N_c = \pi + 2$) の下で、材料強度の上限を c_0 とし、各要素の材料強度 c を $0 \leq c \leq c_0$ と変化させ、剛塑性強度分布最適化問題を解いた。

(1) 材料強度分布

求めた材料強度分布を図-3に示す。同図中、色の濃淡は材料強度の大小を256階調で表現したものであり、黒色は上限の強度 $c = c_0$ 、白色は下限の強度 $c = 0$ を表している。図-3を見れば、载荷領域の幅 (半幅) a に対して、中央から側方に $10a$ 以上離れた領域は全て

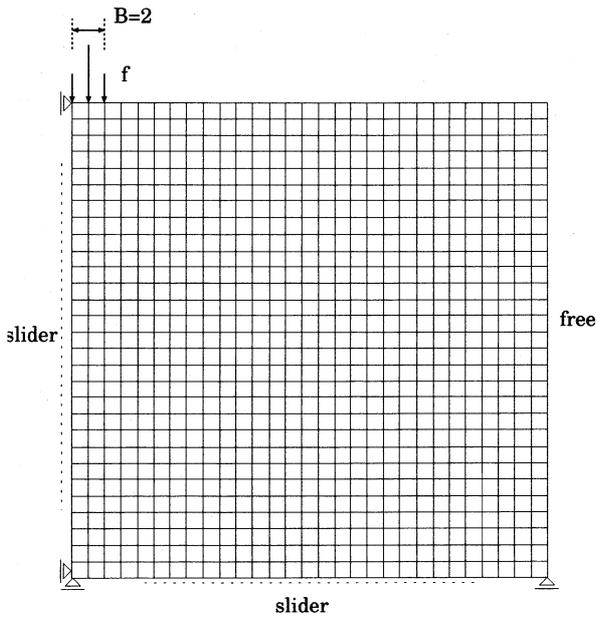


図-2 解析に使用したメッシュ

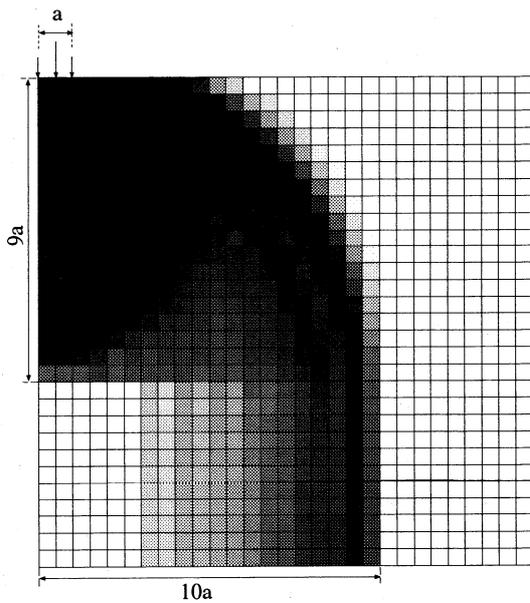


図-3 強度分布の最適解

材料強度がゼロとなる領域であることが分かる。また、載荷面から下方に $9a$ 離れた領域にもやはり材料強度がゼロとなる領域が出現していることが分かる。

さらに作用している応力状態を詳しく見るため、各要素で計算した主応力の大きさと方向を図-4に示す。同図中、線分の大きさは主応力の大きさを、線分の方角は主応力方向を表しており、圧縮応力状態と引張り応力状態を区別するために、圧縮では線分中央部に●、引張りでは線分両端部に●を付けている。

外力として鉛直下向きの力を作用させているため、載荷よりも十分下方の位置では鉛直方向の一軸圧縮状態となっている。一方、左側面の対称線に沿って応力

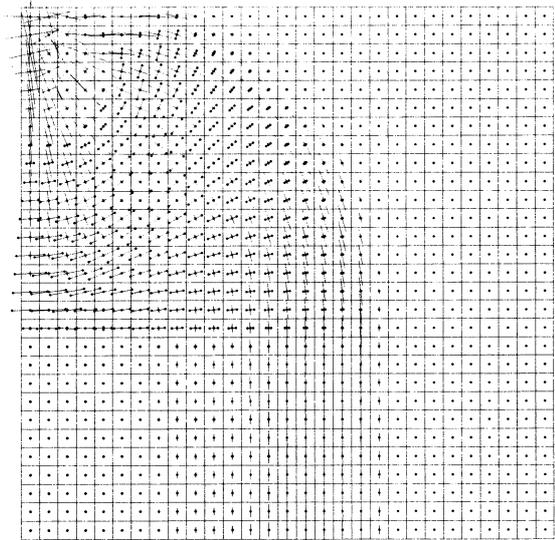


図-4 強度分布最適解に対応する応力状態

状態を見てみると、載荷位置に近い部分では水平方向に圧縮応力が生じているが、載荷位置から下方になるにつれて、水平方向の主応力は圧縮状態から引張り状態に変わることが分かる。さらに $10a$ よりも下方の部分は、あたかも横梁と柱で支えられたように応力がゼロの領域が広がっている。

(2) 最適形状の評価

図-3を基にすると、材料強度が下限の $c = 0$ となっている領域のうち、右側方に広がる領域についてはカットしても静的許容な応力場が構成できるため、この部分がなくても所与の荷重を支持できることになる。

一方、載荷領域下方に現れる材料強度がゼロの領域については、以下の理由から今後さらに検討が必要であると考えている。この領域は数値計算上は、側方および下方の境界で拘束されている。それに対して、最適形状として領域をカットすることは、単に材料強度がゼロとなる効果だけではなく、変形の拘束を外すことになる。そのため、強度分布最適解だけでは評価が不可能であり、適切な境界条件を与えた解析が別途必要になると考えられる。さらに、図-3の下方に現れる一軸圧縮領域の圧縮応力は一様ではなく、中央部のゼロ応力状態から外側に向かうほど応力が増加している。領域をカットすることと、このようにグラデーションで強度を滑らかに変化させることをどのように対応付けるのか、今後検討が必要であると考えている。

さて、最後に得られた解の妥当性についてコメントしておく。Bishop⁹⁾は、この極限荷重 $N_c = \pi + 2$ に対応する応力場の完全解、すなわち塑性域から剛体域に応力場を拡張して釣合い系かつ降伏条件を破らない応力場、が確かに存在することを特性曲線法を用いて示し、正解の応力場を求めている。このBishopの完全解では、塑性崩壊を示す領域：載荷領域直下の剛体くさび領域、扇状の遷移領域、それに連なる受働剛体くさび領域だけでなく、塑性崩壊を示す領域から外側に広がる剛体領域での応力場も解かれている。それによれば、応力の特性曲線は受働くさび領域端部から放物線

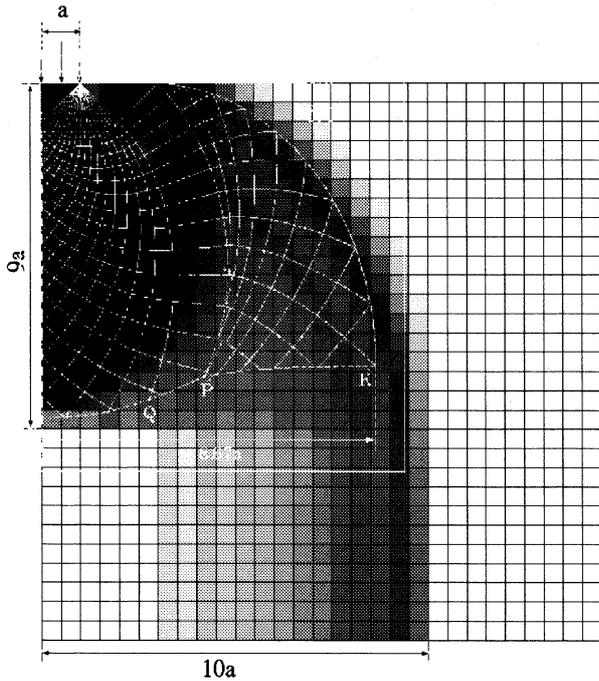


図-5 強度分布最適解と Bishop の応力場 (完全解) との比較

状に下方に延びており、十分下方で一軸応力場に接続されている。

さらに Bishop の解によれば、可容応力場を構成するためには半無限領域が必要な訳ではなく、有限寸法の領域であっても構成できることになる。例えば、領域が直方体であるとすれば、载荷領域の幅 (半幅) a に対して、鉛直方向に $8.74a$ の厚さ、水平方向に $8.67a$ の幅 (半幅) を持つ直方体であれば可容応力場が構成できることを示している (例えば¹⁰⁾。

数値解析による強度分布解と Bishop による応力場の完全解を重ね合わせて比較したものを図-5 に示す。この図によれば、Bishop 解による主働くさび領域よりも側方のゼロ応力領域と強度分布最適解のゼロ材料強度となる領域が良く対応していることが分かる。また、Bishop 解による可容応力場を構成するための最小寸法、厚さ $8.74a$ 、幅 $8.67a$ に対して、強度分布最適解で見られる上限強度に近い強度を示す領域、厚さ $9a$ 、幅 $10a$ が良い対応を示している。このように強度分布最適化による数値解析結果と Bishop 解は概ね良い一致を示している。

4. 結論

本論文では、剛塑性体の形状あるいはトポロジー最適化を対象に、それを剛塑性強度分布最適化問題によって近似的に評価する手法について取り上げた。解析手法自体は著者らがすでに提案した方法であるが、その数理的な構造は、弾性体の形状最適化やトポロジー最適化に広く用いられている密度法や SIMP 法とのアナロジーとして理解できる部分も多い。一方で、設計変数として要素ごとの材料強度を取り上げ、静的可容な

制約条件のもとで最適化問題を解く点が、弾性体に対する形状・トポロジー最適化と大きな相違点である。

提案する手法の妥当性を検証するために、自重を無視したトレスカ材料のパンチング問題を取り上げた。線形コスト関数 (1) を用いた剛塑性強度分布最適化問題の数値解析結果と、同問題に対して Bishop が求めた応力場の完全解を用いて、それらを比較することによって妥当性を検証した。その結果、ゼロ材料強度領域とゼロ応力領域の形状がよく一致することや、载荷域から十分下方になると一軸圧縮応力場となっていることなど、両者は良い一致を示した。

したがって、剛塑性強度分布最適化を援用して、最適形状の推定することも可能であると考えられる。強度分布最適化問題は、形状そのものを未知量として解くよりも、定式化が簡単でしかも性質の比較的良好な最適化問題として定式化可能であるので、本論文で提案した近似評価法をうまく活用すれば工学的にも有用ではないかと考える。

一方で、このような最適形状を推定する間接的な方法の適用性を考えるに当たっては、今後以下に挙げる検討が必要であると考えており、研究を進めていきたいと考えている。

- 強度分布最適化問題は強度が滑らかに変化することを前提に定式化しているが、形状の問題は本質的に 0/1 の問題であること。
- 剛塑性強度分布最適化問題の数値計算では、その定式化から、いくら強度が減少しても速度場に関する制約条件 (関連流れ則) が常に課されていること。したがって、穴空きなどトポロジーの問題を含む問題や、ディリクレ境界条件で囲まれた領域などの取扱いには注意が必要であること。
- 剛塑性有限要素法と同様、変数の空間離散化に当たって適切な要素を選択する必要があること。現在のところ、アワグラスモードを完全に除去できるオールマイティな方法は見当たらないので、問題ごとに適切な対処が必要となること。

参考文献

- 1) 小林俊一: 主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法の開発, 応用力学論文集, Vol. 6, pp. 96-106, 土木学会, 2003.
- 2) Kobayashi, S.: Hybrid type rigid plastic finite element analysis for bearing capacity characteristics of surface uniform loading, Soils and Foundations, Vol. 45, No. 2, pp. 17-27, 2005.
- 3) 日本応用数理学会: 研究部会 数理設計, <http://www.az.cs.is.nagoya-u.ac.jp/jsiam>
- 4) Eschenauer, H.A. & Olhoff, N.: Topology optimization of continuum structures: A review, Applied Mechanics Review, Vol. 54, No. 4, pp. 331-390, 2001.
- 5) Rozvany, G.I.N.: Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics, Structural and Multidisciplinary optimization, Vol. 21, pp. 90-108, 2001.

- 6) Rozvany, G.I.N.: Stress ratio and compliance based methods in topology optimization — a critical review, Structural and Multidisciplinary optimization, Vol. 21, pp. 109–119, 2001.
- 7) 西藤 潤・田村 武・小林俊一: 剛塑性体における最適な強度分布の探索, 土木学会論文集 A, Vol. 62, No. 3, pp. 520-530, 2006.
- 8) 福島雅夫: 非線形最適化の基礎, 3.2 Karush-Kuhn-Tucker 条件, 朝倉書店, 2001.
- 9) Bishop, J.F.W.: On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 2, pp. 43-53, 1953.
- 10) 平 修二 (監修): 現代 塑性力学, 第 6 章, オーム社, 1976.

(2008 年 4 月 14 日 受付)