応用力学論文集 Vol.11, pp.123-131　(2008年8月)　土木学会

三次元塑性加工問題におけるミクロ-マクロ非連成解析

Veryfication study of micro-macro decoupling analysis on three dimentional plastic forming problem

渡邊育夢*, 寺田賢二郎**
Ikumu WATANABE, Kenjiro TERADA

*正会員　博士(工学)　研究時　日本学術振興会特別研究員(PD)　東北大学大学院工学研究科土木工学専攻
現在　客員研究員　(株)豊田中央研究所　(〒480-1192 愛知郡長久手町大字長湫字横道41-1)
**正会員　Ph.D.　准教授　東北大学大学院工学研究科土木工学専攻　(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06)

The approximate accuracy of the micro-macro decoupling analysis method is studied with a view to its application to predicting detailed micro- and macroscopic responses of polycrystalline metals subjected to plastic forming. A simple example problem assuming three dimensional cold-forming is set up for examining the micro- and macroscopic analysis results in comparison with the micro-macro simultaneous coupling analysis method. The qualitative reproducibility in both the micro- and macroscopic deformation states as well as the corresponding stress states is confirmed. And even the quantitative accuracy is obtained for the plastic-deformation-dominant forming process to some extent. It is also pointed that the accuracy in the responses especially during unloading process after the forming tends to depend on the employed macroscopic homogenized constitutive equation in the decoupling method.

Key Words : *Micro-macro Analysis, Homogenization Method, Polycrystalline Metals, Plastic Forming*

1. はじめに

均質化法に基づくマルチスケールモデリング/解析[1]は，ミクロとマクロの変数が連成した2つのスケールにおける境界値問題を有限要素法により双方を同時に解く方法論であり，材料開発における計算力学的なアプローチとして注目されている．特に，金属成形加工の分野では，金属材料が加工に伴う塑性変形によって材料組織にも大きな変化が生じ，これが変形・強度特性の異方性や疲労特性などを支配していることが知られており[2),3)]，マルチスケール解析によるマクロ応答の予測とミクロスケールでのメカニズムを解明する試みが行われてきた[4),5),6)]．

しかし，実際の成形条件を陽に考慮したマルチスケール解析は非常に大規模になるので，既往の研究ではマクロ的に理想化された負荷条件下での解析がほとんどであり，複雑な成形加工プロセスを模擬した解析が行われた例はない．マルチスケール解析では，マクロ構造の有限要素モデルにおける全ての応力評価点において，対応するミクロ境界値問題を解く必要があるため，増分解析および収束計算が必要な塑性加工の問題では膨大な計算コストが必要となることから，実際問題への適用は避けられてきた．

均質化法に基づくマルチスケール解析をより実際的な問題に対して適用することを意図して，複数パターンの数値材料試験をあらかじめマクロ応力と変形の関係をデータベース化しておき，マクロ解析に際してはこれを参照する手法が提案されている[7),8),9)]．しかし，このアプローチは，履歴依存変数の扱いに限界があることに加え，材料構成則の関数形が与えられないので厳密な接線が計算できないなどの欠点が指摘されている．

これに対して渡邊・寺田[10)]は，マルチスケール解析手法が抱える計算コストの問題を解決するために，非線形均質化理論で設定された2変数境界値問題をスケール間の連成効果を保持しながら別々に解析するミクロ-マクロ非連成近似解法を提案した．この手法では，マクロ有限要素モデル中の注目する応力評価点のみでミクロ境界値問題を解くため，マルチスケール解析に要する計算時間をかなり軽減でき，さらに，汎用有限要素解析プログラムでも可能となるメリットがある．そして，この手法によれば，実際的な成形条件下でのマクロ塑性解析と，この変形履歴を反映したミクロ材料組織の変形状態の予測解析の双方が実用的な計算時間で可能となる．

渡邊・寺田[10)]の研究では，多結晶金属を対象とした検証結果は良好な結果を得ているものの，二次元問題でマクロ的に単純な変形パターンで数パーセント程度のひずみしか扱っておらず，実際の金属成形加工問題を想定した変形パターンや大きなひずみレベルでの検証はなされていない．そこで本研究では，実際の金属成形加工問題を想定して，大ひずみを伴う複数の加工プロセスを模擬して設定した三次元の2変数境界値問題について，ミクロ-マクロ非連成近似解法による解析を行い，ミクロ-マクロ連成解法による解析結果を定量的な比較対象として，マクロ応答とミクロ応答の再現

性について検証する．そして，解析結果の考察により，ミクロ-マクロ非連成近似解法の近似精度を左右する因子を調査するとともに，金属成形加工の問題に対して適用する際の留意点を整理する．

2. ミクロ-マクロ非連成近似解法

本節では，非線形均質化理論に基づく 2 変数境界値問題の支配方程式と，そのスケール間の連成効果を保持しながら近似的に解析するミクロ-マクロ非連成近似解法の概要を示す．

2.1 2 変数境界値問題

非線形均質化理論の適用により，ミクロおよびマクロスケールの現配置における境界値問題は，ミクロおよびマクロスケールの位置ベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y} \subset \mathcal{R}^{n_{\rm dim}}$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{R}^{n_{\rm dim}}$ を変数として次式で与えられる[11]．

- ミクロ境界値問題：

$$\int_{\mathcal{Y}} \boldsymbol{\tau}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1 \frac{dy}{J_{\mathcal{Y}}} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta}^1 \in \mathcal{V}^{\rm per}_{\mathcal{Y}} \tag{1}$$

$$\mathcal{V}^{\rm per}_{\mathcal{Y}} = \left\{ \boldsymbol{v} : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{R}^{n_{\rm dim}} \;\middle|\; v_i \in W^{1,p};\ \mathcal{Y}\text{–periodic} \right\}$$

$$\boldsymbol{\tau}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ \ \text{[determined by constitutive equations]} \tag{2}$$

- マクロ境界値問題：

$$\int_{\mathcal{B}} \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{x}) : \nabla_x \boldsymbol{\eta}^0 \frac{dx}{\tilde{J}} - g_{\rm ext}(\boldsymbol{\eta}^0) = 0, \ \ \forall \boldsymbol{\eta}^0 \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}} \tag{3}$$

$$\mathcal{V}_{\mathcal{B}} = \left\{ \boldsymbol{v} : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{R}^{n_{\rm dim}} \;\middle|\; v_i \in W^{1,p},\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \ \text{on} \ \Gamma_u \right\}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} \boldsymbol{\tau}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, dy \tag{4}$$

ここで，$J_{\mathcal{Y}}, \tilde{J}$ は $dy = J_{\mathcal{Y}} dY$, $dx = \tilde{J} dX$ で定義されるミクロおよびマクロスケールにおけるヤコビアンであり，$g_{\rm ext}$ は外力項，$W^{1,p}$ は 1 階の導関数が p 乗可積分な空間 L_p に属す関数の空間である．また，$\boldsymbol{\eta}^1$ と $\boldsymbol{\eta}^0$，$\boldsymbol{\tau}^0$ と $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ は，それぞれミクロおよびマクロスケールにおける変分と Kirchhoff 応力である．各変数の添え字 (0 or 1) は two-scale 収束論[12]の漸近展開法における非均質性の代表長さのオーダーに対応するものである．

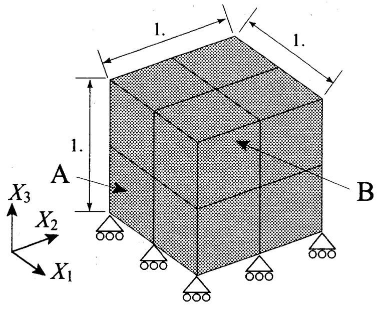
式 (4) はマクロ応力がミクロスケールの応力の体積平均として与えられることを示し，マクロ境界値問題を解くためには，各応力評価点に対応したミクロ境界値問題を解析する必要がある．

2.2 ミクロ-マクロ非連成近似解法

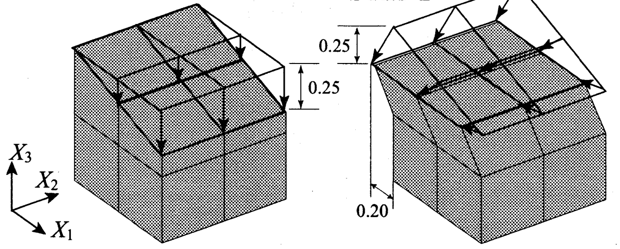
渡邊・寺田[10]の提示したミクロ-マクロ非連成近似解法では，次の手順でマルチスケール解析を実施する．

(1) ミクロ-マクロ連成解析による数値材料試験

単一のマクロ有限要素モデルに対して，マクロ的な一軸引張・均等二軸引張・純せん断などの理想的な載荷パターンのミクロ-マクロ連成解析を行い，ミクロ有限要素モデルの特性を反映したマクロ材料応答を計算する．このプロセスは対象とするミクロ材料組織に対する材料試験に相当する．



(a) マクロ有限要素モデルと注目する応力評価点



(b) 成形加工条件

図–1 マクロ境界値問題

(2) マクロ均質化構成モデルの設定と材料パラメータの同定

解析対象とする材料のマクロ応力-ひずみ関係を表現するために適切なマクロ構成モデルを仮定し，その材料定数を前項で得られたマクロ応答を再現するように同定する．したがって，前項の数値材料試験では，ここで仮定するマクロ構成モデルの材料パラメータを同定するために必要な数と種類の載荷パターンのミクロ-マクロ連成解析が実行される．ここで，ミクロ境界値問題を反映したマクロ応答を均質化して構成式として近似していることから，この構成モデルを便宜的にマクロ均質化構成モデルと呼ぶ．

(3) 非連成マクロ解析

マクロ均質化構成モデルを用いて，マクロ境界値問題を解析する．この際，マクロ有限要素モデル中でミクロ材料組織の変形状態を評価したい応力評価点を選択し，その点のマクロ変形履歴を抽出しておく．

(4) 非連成ミクロ解析

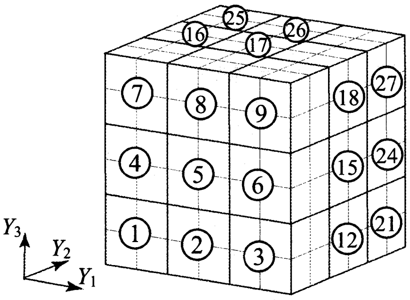
非連成マクロ解析で抽出したマクロ変形履歴を，周期境界条件の設定されたミクロ有限要素モデルに付与し，非連成ミクロ解析を行なう．これにより，マクロ境界値問題の解に対応したミクロ材料組織の変形状態を近似的に得ることになる．

3. 金属成形加工の 2 変数境界値問題

実際の多結晶金属の成形加工問題を想定して，大ひずみを伴う複数の加工プロセスを模擬した三次元の 2

表–1 結晶粒の材料パラメータ

弾性係数	E [GPa]	193
ポアソン比	ν	0.3
降伏応力	$\tau_{\mathrm{Y}}^{(\alpha)}$ [GPa]	0.115
自己硬化係数	$h_{\alpha\beta}$ $(\alpha = \beta)$ [GPa]	0.45
潜在硬化係数	$h_{\alpha\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$ [GPa]	0.47



図–2 ミクロ有限要素モデル (多結晶組織)

変数境界値問題を設定する．また，この問題をミクロ-マクロ連成解法で解析し，次節で行う検証に備える．

3.1 2 変数境界値問題の設定

(1) マクロ境界値問題

マクロ有限要素モデルとして，図–1(a) に示す 8 つの六面体要素を設定する．各要素は六面体一次要素とし，応力評価点は各要素に関して 8 点存在する．図中の点 A，B は，ミクロ材料組織の変形状態に着目する応力評価点である．

マクロ境界値問題の境界条件は，金属成形加工における複雑な変形パターンを想定して，図–1(a) の下面部の X_3 軸方向変位を拘束しながら，上面部に対して変位制御により図–1(b) のように変形を与える．この数値解析は次の 3 段階のプロセスからなる．

STEP 1: X_1 方向に傾斜した形で，端部を鉛直ひずみ 25 %となるまで $-X_3$ 方向に圧縮する．

STEP 2: 上面部の傾斜部分を下面部と平行になるように，さらに圧縮する．この際，同時に X_1 方向へせん断変形を与える．

STEP 3: 上面部の拘束を外し，反力を取り除く．

(2) ミクロ境界値問題

ミクロ有限要素モデルとして，図–2 の多結晶組織モデルを設定する．このモデルは 27 個の同一形状・要素数からなる結晶粒で構成された多結晶体である．各結晶粒は 8 つの六面体一次要素からなり，結晶方位以外は同一の材料特性を有すると仮定する．また，図–2 の境界には周期境界条件を課し，対面の向かい合う節点同士は自由度を共有するような拘束を与える．

各結晶粒の材料特性は結晶塑性構成モデル[13)](付録 I) で表現し，結晶粒が面心立方 (FCC) 結晶構造からなると仮定する．このとき，すべり系の数 n_{slip} は 12 個になる．各結晶粒の材料定数は表–1 で与え，結晶方位に関しては乱数を発生させて与える．ここで，結晶体は一般に弾性異方性を有するが，本研究で扱うような塑性変形が支配的な塑性加工問題では弾性異方性の影響が小さいと仮定し，等方弾性モデルを採用することにする．

表–2 マクロ相当ひずみ・相当応力の履歴 (ミクロ-マクロ連成解析)

	相当ひずみ		相当応力 [GPa]	
	A 点	B 点	A 点	B 点
STEP1 終了時	0.179	0.477	0.762	1.397
STEP2 終了時	0.711	0.596	1.989	1.826
STEP3 終了時	0.696	0.593	0.242	0.290

3.2 ミクロ-マクロ連成解析

上で設定した 2 変数境界値問題をミクロ-マクロ連成解法で解析する．ここでは，マクロ有限要素モデル中に存在する 64 点の応力評価点において，それぞれのミクロ境界値問題が設定され，マクロ境界値問題と同時に解析することになる．

各解析ステップ終了時のマクロおよびミクロ有限要素モデルの相当応力分布[1]を図–3，図–4 に示す．また，ミクロ-マクロ非連成解法との比較のため，この時点の A 点，B 点におけるマクロ相当応力，相当ひずみとミクロ有限要素モデル中の相当応力の最大値，最小値をそれぞれ表–2，表–3 にまとめておく．ここで，相当ひずみは相当応力と対応する形式で変形勾配 $\boldsymbol{F}$ を用いて，次式で定義した．

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{1}{2}\ln\left[\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right] \tag{5}$$

$$\varepsilon^{*} := \sqrt{\frac{3}{2}\mathrm{dev}\,[\boldsymbol{\varepsilon}] : \mathrm{dev}\,[\boldsymbol{\varepsilon}]} \tag{6}$$

なお，ここでの数値解析には Intel Xeon 3.80 GHz の CPU を搭載したワークステーションで，CPU タイム およそ 200 時間を要した．

4. ミクロ-マクロ非連成近似解析の検証

前節で設定した 2 変数境界値問題をミクロ-マクロ非連成近似解法[10)]により解析し，その結果とミクロ-マクロ連成解析の結果を比較することで，比較的大きなひずみレベルで多段階に異なる負荷履歴を与えるマクロ境界値問題に対するマクロ応答とミクロ応答の再現性を検証する．

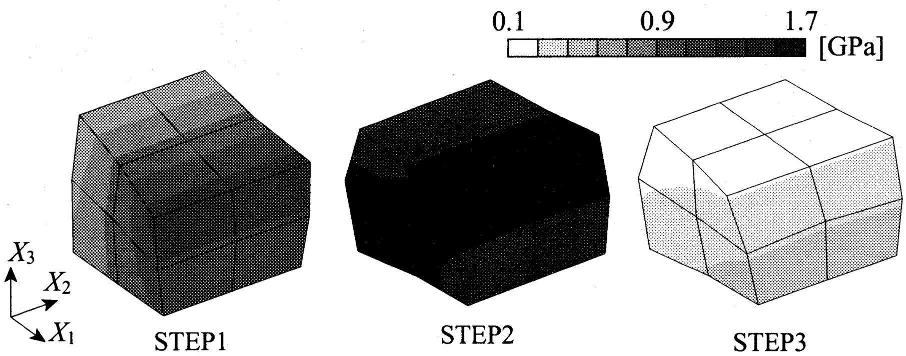
1 相当応力を Mises 応力として $\sigma^{*} := \sqrt{\frac{3}{2}\mathrm{dev}[\boldsymbol{\sigma}] : \mathrm{dev}[\boldsymbol{\sigma}]}$ と定義する．ここで，$\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力である．

表–3 ミクロ相当応力の最大値・最小値履歴 (ミクロ-マクロ連成解析)

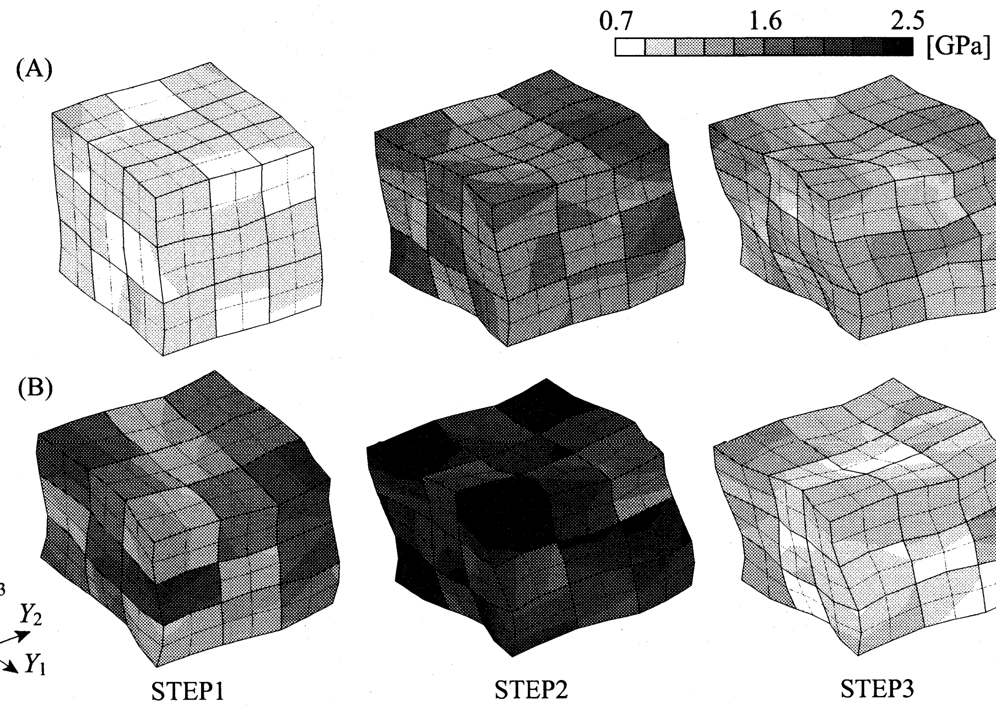
[GPa]	STEP1 終了時		STEP2 終了時		STEP3 終了時	
	Min	Max	Min	Max	Min	Max
A 点	0.635	1.363	1.658	3.608	0.735	1.952
B 点	1.149	2.487	1.412	3.606	0.489	1.841

表–4 マクロ構成モデルの材料パラメータ

弾性係数	E [GPa]	193
ポアソン比	ν	0.3
降伏応力	σ_Y [GPa]	0.26
硬化係数	H [GPa]	2.4
硬化パラメータ	σ_∞ [GPa]	0.31
硬化パラメータ	δ	400



図–3 ミクロ-マクロ連成解析結果: マクロ相当応力分布



図–4 ミクロ-マクロ連成解析結果: ミクロ相当応力分布

4.1 ミクロ-マクロ非連成近似解析

前節で設定した 2 変数境界値問題に対して 2 節で述べたミクロ-マクロ非連成解析を適用する．なお，本項では数値解析結果のみを示し，検証を含む種々の考察は次 4.2 項に委ねることにする．

(1) ミクロ-マクロ連成解析による数値材料試験

単一のマクロ有限要素モデルに対し，図–2 中の直交する Y_1, Y_2, Y_3 軸に相当する 3 方向へ単軸引張変形を与えるミクロ-マクロ連成解析を行う．得られたマクロ応力-ひずみ関係を図–5 に実線で示す．結晶塑性構成モデル (付録 I) では結晶体の異方塑性変形特性を表現するため，図–2 のミクロ有限要素モデルでは，初期状態でのマクロ応答に材料挙動の異方特性が確認できる[2]．

[2] 結晶粒数を多数考慮するとマクロ的には等方性を示すことが知られている[14)]．

表–5 マクロ相当ひずみ・相当応力の履歴 (ミクロ-マクロ非連成近似解析)

	非連成マクロ解析				非連成ミクロ解析	
	相当ひずみ		相当応力 [GPa]		相当応力 [GPa]	
	A 点	B 点	A 点	B 点	A 点	B 点
STEP1 終了時	0.163	0.471	0.734	1.537	0.744	1.401
STEP2 終了時	0.694	0.577	2.150	1.850	2.035	1.825
STEP3 終了時	0.678	0.568	0.222	0.354	0.450	0.215

表–6 ミクロ相当応力の最大値・最小値の履歴 (非連成ミクロ解析)

	STEP1 終了時		STEP2 終了時		STEP3 終了時	
[GPa]	Min	Max	Min	Max	Min	Max
A 点	0.627	1.244	1.720	3.353	0.931	1.886
B 点	1.111	2.442	1.341	2.993	0.512	1.499

(2) マクロ均質化構成モデルの設定と材料パラメータの同定

マクロ均質化構成モデルとしては，一般的な金属塑性問題で適用される Mises の降伏条件を採用する．そして，前項の数値材料試験で得られたマクロ応力-ひずみ関係を再現するように材料定数を設定する．また，塑性硬化特性に関しては Voce 型非線形塑性硬化モデル[15] を採用し，マクロ均質化構成モデルの降伏関数を次式で定義する．

$$\tilde{\phi} := \sqrt{\frac{3}{2}\mathrm{dev}[\tilde{\sigma}] : \mathrm{dev}[\tilde{\sigma}]} - \sigma_{\mathrm{Y}} - \tilde{q} \tag{7}$$

$$\tilde{q} := H\alpha + (\sigma_{\infty} - \sigma_{Y})\left(1 - \exp\left[-\delta\alpha\right]\right) \tag{8}$$

ここで，$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ はマクロ Cauchy 応力，α は塑性履歴パラメータ，σ_{Y} は降伏応力，H, σ_{∞}, δ は塑性硬化に関する材料定数である．

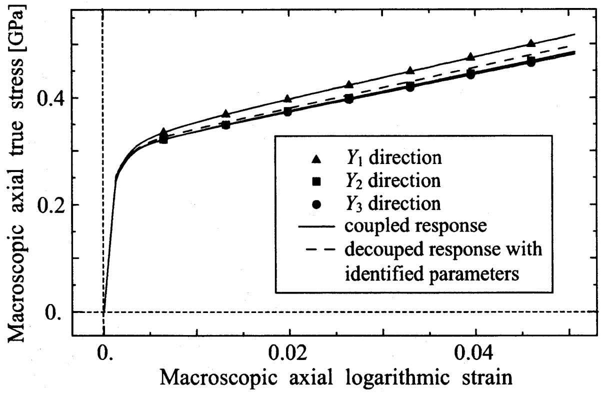
図–5 の 3 つのマクロ応力-ひずみ曲線の中間的な応答となるように (図–5 中の点線)，式 (8) の材料定数を試行錯誤的に同定した結果を表–4 に示す．なお，ここで採用した Mises 型塑性構成モデルは等方材料を対象とするものなので，数値材料試験で得られた図–5 の異方的なマクロ応答を完全には再現できない．

(3) 非連成マクロ解析

前項で設定したマクロ均質化構成モデルとその材料パラメータを用いて，図–1 のマクロ境界値問題を解析する．各ステップ終了時における相当応力分布を図–6 に示す．

(4) 非連成ミクロ解析

非連成マクロ解析で計算された図–1(a) に示す A，B 点のマクロ変形履歴をミクロ有限要素モデル (図–2) へ付与し，変形解析を実施する．この非連成ミクロ解析によって，図–1 の成形加工における多結晶組織の変形状態が解析される．



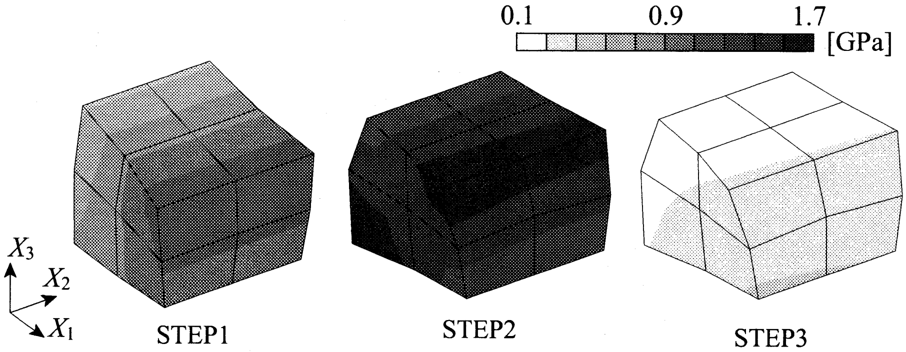
図–5 数値材料試験結果と同定したパラメータによるマクロ均質化構成モデルの応答

各ステップ終了時におけるミクロ相当応力分布を図–7 に示す．また，A，B 点における前項の非連成マクロ解析と非連成ミクロ解析のミクロ変数の体積平均から計算されるマクロ相当ひずみと相当応力を表–5 に示す．非連成ミクロ解析で与えたマクロ変形状態は非連成マクロ解析で評価したものであるので，マクロ相当ひずみは一致する．さらに，前節と同様に，各ステップ終了時におけるミクロ有限要素モデル中の相当応力の最大値・最小値を表–6 に示す．

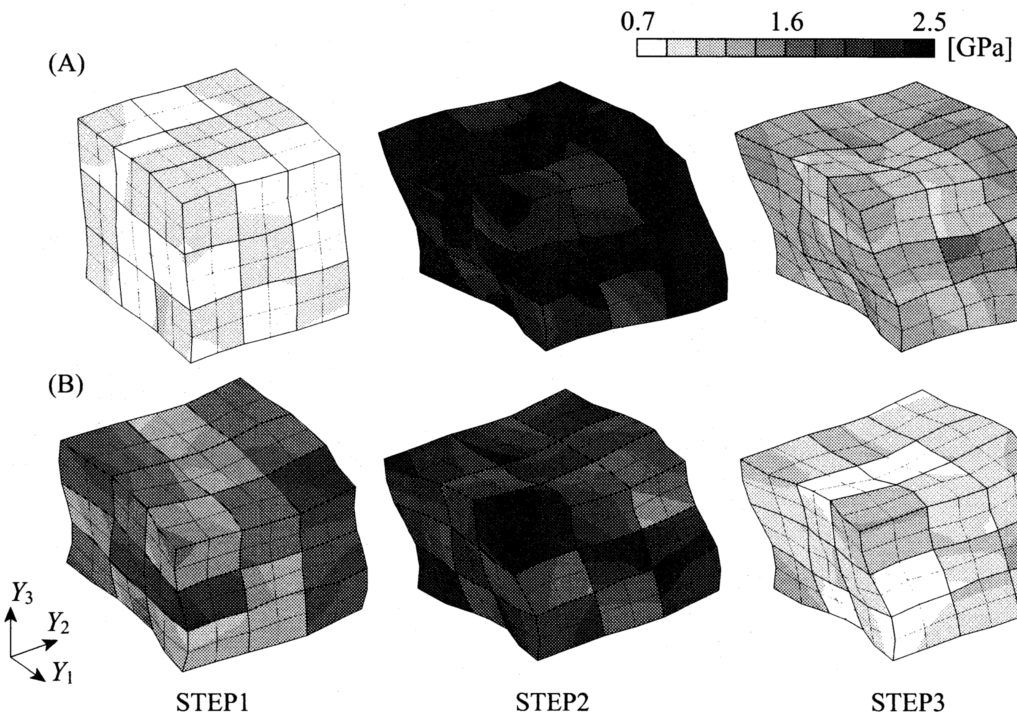
非連成ミクロ解析を実施するマクロ有限要素モデルの応力評価点の数によるが，連成解析と同一の計算機を用いて，本節の一連のミクロ-マクロ非連成近似解析は CPU タイム 10 時間程度で実施できた．

4.2 ミクロ-マクロ連成解析と非連成近似解析の比較

ミクロ-マクロ非連成近似解析の結果について，マクロおよびミクロスケールの視点からミクロ-マクロ連成解析の結果との定量的な比較を行い，その再現性を検証する．



図–6 非連成マクロ解析結果: マクロ相当応力分布



図–7 非連成ミクロ解析結果: ミクロ相当応力分布

(1) マクロスケールの応答の比較

マクロスケールの応答として，図–**3** と図–**6** から，ミクロ-マクロ連成解析および非連成マクロ解析の結果は，各ステップで同様の変形状態および相当応力分布が得られていることを確認でき，定性的には両者の解はある程度一致しているといえる．以下では，図–**1**(a) の A，B 点のマクロ応答に着目して定量的な比較を行う．

ミクロ-マクロ連成解析および非連成マクロ解析，非連成ミクロ解析により得られた A，B 点におけるマクロ相当応力-相当ひずみ関係を図–**8** に示す．解析で設定した成形加工条件は 3 つのステップに分かれており，ミクロ有限要素モデルの数値解析からマクロ応答を評価しているミクロ-マクロ連成解析と非連成ミクロ解析では，STEP 1 から STEP 2 に移行する際のマクロ変形状態の変化に応じてマクロ応答が非線形に変化している．これは塑性変形による多結晶組織の結晶粒の異方硬化特性や結晶方位分布の偏向，結晶粒間に生じる残留応力など，多結晶組織の変化がミクロ組織の有限要素解析に反映されていることの現れである．

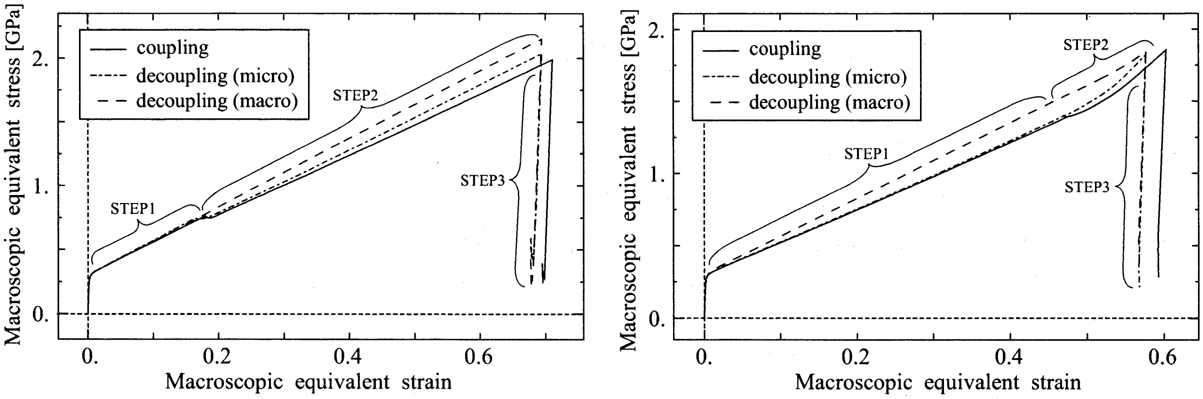
これに対して非連成マクロ解析の応答は，STEP 1 から STEP 2 へ変形状態が変化してもマクロ相当塑性ひずみに応じてマクロ相当応力が単調に変化している．これは，マクロ均質化構成モデルに採用した塑性構成式 (8) が等方硬化のみを考慮していて，異方的なマクロ塑性特性の発達が再現できないためである．このように，金属成形加工問題を想定した大ひずみで複数の変形パターンを伴うような問題に対して，古典的な弾塑性構成則で等方硬化のみを考慮した非連成マクロ解析を適用すると，ミクロ-マクロ連成解析とは大きく異なる解を評価してしまう可能性がある．実際，表–**2** と表–**5** から，非連成マクロ解析から得られるマクロ応答は，ミクロ有限要素モデルの数値解析からマクロ応答にくら

表–7 マクロ相当応力履歴の誤差

	非連成マクロ解析		非連成ミクロ解析	
	A 点	B 点	A 点	B 点
STEP1 終了時	0.038	0.100	0.027	0.003
STEP2 終了時	0.081	0.013	0.023	0.001
STEP3 終了時	0.083	0.221	0.859	0.259

表–8 ミクロ相当応力の最大値履歴の誤差

	A 点	B 点
STEP1 終了時	0.087	0.018
STEP2 終了時	(0.071)	0.170
STEP3 終了時	0.034	0.186



(a) A 点　(b) B 点

図–8 マクロ相当応力の履歴の比較

べて最終的なマクロ相当ひずみ量に A 点で 2.5 %，B 点で 4.2 % の差異が見られる．

また，マクロ相当応力に関して，表–2 と表–5 から各ステップ終了時の誤差を求めた結果を表–7 にまとめる．ここで，ミクロ-マクロ連成解析および非連成近似解析の相当応力を，それぞれ $\sigma^*_{\mathrm{coupling}}$，$\sigma^*_{\mathrm{decoupling}}$ で表し，誤差ノルムを次式で定義する．

$$\mathrm{err}_\sigma := \frac{\left|\sigma^*_{\mathrm{coupling}} - \sigma^*_{\mathrm{decoupling}}\right|}{\sigma^*_{\mathrm{coupling}}} \tag{9}$$

表–7 から確認できるように，非連成マクロ解析では 10 % 前後の誤差が発生しているのに対して，非連成ミクロ解析では STEP 1，STEP 2 の負荷中は数%程度の誤差で収まっている．

しかしながら，表–7 において除荷が終了した時点 (STEP3) の結果を見ると，非常に大きな誤差を示していることが分かる．これは，STEP 1，STEP 2 では主にマクロ変形を拘束して解析が行われるのに対して，STEP 3 は変形の拘束を外して応力を解放する解析になることが影響している．すなわち，STEP 1，STEP 2 では，付与される境界条件に応じてミクロ-マクロ連成解析と非連成マクロ解析でほぼ同一の変形状態となり，その履歴が非連成ミクロ解析へ与えられるが，STEP 3 の除荷プロセスでは直前のマクロ応力分布に依存して，最終的な変形状態が決定する．そのため，各応力評価点のマクロ変形履歴にミクロ-マクロ連成解析と非連成マクロ解析の応力分布における誤差が反映されることとなり，非連成マクロ解析で精度の悪いマクロ変形履歴が評価される．そして，そのマクロ変形履歴を入力データとする非連成ミクロ解析の結果は必然的に大きな誤差を含むことになる．

以上により，マクロ相当応力で評価した場合，ミクロ-マクロ非連成近似解析の精度は，非連成マクロ解析では比較的大きな誤差が発生してしまうものの，マクロ的な変形を拘束して制御する成形加工問題では，負荷状態において各応力評価点においてほぼ同一のマクロ変形履歴となるため，非連成ミクロ解析ではある程度保証できる．しかしながら，除荷プロセスでは，除荷開始時における非連成マクロ解析の近似精度に大きく影響する．換言すれば，塑性変形によりマクロ構造の形を規定する成型加工プロセスに際しては，非連成近似解析におけるマクロ均質化構成モデルの近似精度が，非連成ミクロ解析の結果に及ぼす影響は小さいといえる．

(2) ミクロスケールの応答の比較

次に，ミクロスケールの応答に注目して，ミクロ-マクロ連成解析と非連成ミクロ解析の結果を比較する．図–4 と図–7 から，ミクロスケールでも定性的には同様の変形状態と相当応力分布が得られている．以下では，材料の破壊や疲労予測の観点から，マルチスケール解析を行う際の工業的な関心は，特に，ミクロスケールで潜在的に生じている高い局所的な応力にあることから，ミクロ有限要素モデル中の相当応力の最大値に注目する．

表–3 と表–6 には，それぞれミクロ-マクロ連成解析とミクロ-マクロ非連成近似解析について，各ステップ終了時におけるミクロ有限要素モデル中のミクロ相当

応力の最大値が示されており，これより式(9)の誤差ノルムを求めた結果を表–**8**に示す．ここで，表–**3**と表–**6**において，A点のSTEP 2終了時ではミクロ-マクロ連成解析と非連成ミクロ解析で異なる結晶粒における応力評価点で最大値が評価されたため，参考値として括弧をつけて示した．この表から，誤差は表–**7**に示したマクロ応答の誤差と比べて大きい．これは完全に一致したマクロ変形状態を非連成マクロ解析で近似することができていないことが原因であることは明らかである．しかしながら，A点のSTEP 2終了時以外はミクロ-マクロ連成解析と同一か，または同一結晶粒内の隣接した応力評価点が最大値をとっており，応力分布としては両者の結果は整合していると見ても良い．つまり，本解析結果では成形加工におけるミクロ材料組織の評価として，近似精度としては十数パーセント程度の誤差を含むが，定性的には整合した変形状態を解析できている．誤差の要因となっている非連成マクロ解析の近似精度を，多結晶体のミクロ有限要素モデルやマクロ均質化構成モデルをより現実的なもので代用することで改善すれば，非連成ミクロ解析の高精度化も期待できる．

5. 結論

本研究では，著者らの提案しているミクロ-マクロ非連成近似解法[10]を金属成形加工に適用することを想定し，大ひずみで複数の変形パターンを伴うような問題に対する適用性を調査した．具体的には，金属加工における大ひずみを伴う複数の変形過程を模擬して2変数境界値問題を設定し，ミクロ-マクロ連成解法による解析結果を定量的な比較対象として，ミクロ-マクロ非連成近似解法によるマクロ応答とミクロ応答の再現性について検証した．

本研究で得られた知見を以下にまとめる．

- ミクロ-マクロ非連成近似解法では，ミクロ応答とマクロ応答の双方について，実用的な計算時間で定性的には連成解析と同等の解析結果を得ることができる．
- 非連成ミクロ解析から評価されるマクロ応答に関して，マクロ的な変形を規定して変形解析が実施される成型加工プロセスでは，定量的にも精度よく再現できる．
- 非連成ミクロ解析から評価されるマクロ応答に関して，成形加工後の境界条件が解放された状態を求める除荷プロセスでは，仮定したマクロ均質化構成モデルの精度に依存し，精度が悪化する可能性が示唆された．
- 非連成ミクロ解析から評価されるミクロ材料組織の変形状態に関して，本研究の数値解析例では十数パーセント程度の誤差が見られたが，定性的には一致しており，ミクロスケールでの応力最大値の発生箇所など，工業的に有用な情報はある程度正確に把握できる．

最後に，ミクロ-マクロ非連成近似解法では，適切なマクロ均質化構成モデルを設定することで近似精度を向上させることができると考えられる．特に，マルチスケール解析に期待されている，ミクロ材料組織の定量的な予測精度の向上には，より精緻な構成モデルの利用が不可欠である．金属成形加工の分野では，材料異方性に対応した降伏関数 (Hill モデル[16]，Barlat モデル[17]など) や 異方塑性硬化モデル (Teodsiu-Hu モデル[18]など) が知られており，これらを採用すれば，さらに複雑な加工プロセスを伴う問題においても，ミクロ-マクロ連成解析の結果を精度良く近似しうるものと期待される．

付録I 結晶塑性構成モデル[13]

結晶塑性構成モデルは，単結晶の塑性変形がSchmid則に基づき，結晶格子に依存したすべりにより生じるものとして定式化される．$n_{\rm slip}$個のすべり系からなる結晶格子を想定すると，すべり系αの降伏関数はKirchhoff応力$\boldsymbol{\tau}$，すべり方向ベクトル$\boldsymbol{s}_t^{(\alpha)}$，すべり面の法線ベクトル$\boldsymbol{m}_t^{(\alpha)}$を用いて次式で定義できる．

$$\phi^{(\alpha)} := \left|\boldsymbol{s}_t^{(\alpha)} \cdot (\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{m}_t^{(\alpha)})\right| - \tau_{\rm Y}^{(\alpha)} + q^{(\alpha)} \leq 0 \qquad (10)$$

ここで，$\tau_{\rm Y}^{(\alpha)}$は降伏応力である．また，硬化則$q^{(\alpha)}$は各すべり系の塑性履歴パラメータ$\xi^{(\alpha)}$ $\left(\alpha \in \{1, \cdots, n_{\rm slip}\}\right)$を変数として次式で与える．

$$q^{(\alpha)} = -\sum_{\beta=1}^{n_{\rm slip}} h_{\alpha\beta}\xi^{(\beta)} \quad \left(\alpha \in 1, 2, \cdots, n_{\rm slip}\right) \qquad (11)$$

ここで，$h_{\alpha\beta}$は硬化定数で自己硬化 $(\alpha = \beta)$，潜在硬化 $(\alpha \neq \beta)$ の2種類を考える．この硬化則により，すべり系は互いに従属関係にある．なお，FCC結晶体において自己硬化と潜在硬化の比は1.0 ~ 1.4の範囲になるということが実験的に確認されている[19]．

参考文献

1) 寺田 賢二郎, 菊池 昇: 均質化法入門 (計算力学レクチャーシリーズ), 日本計算工学会, 丸善 2003.
2) C. R. Barrett, W. D. Nix and A. S. Tetelman: *The Principles of Engineering Materials*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1973.
3) 高橋 寛: 多結晶塑性論, コロナ社, 1999.
4) Terada, K., Matsui, K., Akiyama, M. and Kuboki T.: Numerical re-examination of the micro-scale mechanism of the Bauschinger effect in carbon steels, *Comput. Mater. Sci*, Vol.31, pp.67–83, 2004.

5) Watanabe, I., Terada, K. and Akiyama, M.: Two-scale analysis for deformation-induced anisotropy of polycrystalline metals, *Comput. Mater. Sci.*, Vol. 32, pp. 240–250, 2005.
6) Manchiraju, S., Asai, M. and Ghosh, S.: A dual-time-scale fite element model for simulating cyclic deformation of polycrystalline alloys, *J. Strain. Analysis*, Vol.42, pp. 183–200, 2007.
7) Terada, K. and Kikuchi, N.: *Nonlinear homogenization method for practical applications, in Computational Methods in Micromechanics*, edited by S. Ghosh, M. and Ostoja-Starzewski (AMSE AMD), Vol. 212, pp.1–16, 1995.
8) Takano, N., Ohnishi, Y., Zako, M. and Nishiyabu, K.: Microstructure-based deep-drawing simulation of knitted fabric reinforced thermoplastics by homogenization theory, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.38, pp. 6333–6356, 2001.
9) Temizer, İ., Wriggers, P., An adaptive method for homogenization in orthotropic nonliner elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, Vol.196, pp.3409–3423, 2007.
10) 渡邊育夢, 寺田賢二郎: 非線形均質化理論における 2 変数境界値問題のミクロ-マクロ非連成近似解法, 応用力学論文集, pp.277–285, Vol.8, 2005.
11) Terada, K., Saiki, I., Matsui, K. and Yamakawa, Y.: Two-scale kinematics and linearization for simultaneous two-scale analysis of periodic heterogeneous solids at finite strain, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.192, pp.3531–3563, 2003.
12) Allaire, G.: Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol.23, pp.1482–1518, 1992.
13) Asaro, R. J.: Crystal plasticity, *J. Appl. Mech*, Vol.50, pp.921–934, 1983.
14) 渡邊育夢, 寺田賢二郎, 松井和己, 秋山雅義, 根石豊: 多結晶金属のマルチスケール解析, 応用力学論文集, Vol.6, pp.239–246, 2003.
15) Voce, E.: A practical strain hardening function, *Metallurgia*, Vol.51, pp. 219-226, 1955.
16) Hill, R.: Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 38, pp. 405–417, 1990.
17) Barlat, F. and Lian, J.: Plastic behaviour and stretchability of sheet metals. I. A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions, *Int. J. Plast.*, Vol. 5, pp. 51–66, 1989.
18) Teodosiu, C. and Hu, Z.: Evolution of the intragranular microstructure at moderate and large strains: Modelling and computational significance, *Proc. 5th Int. Conf. NUMIFORM'95*, pp. 173–182, 1995.
19) Kocks, U. F.: The relation between polycrystal deformation and single crystal deformation, *Metall. Trans.*, Vol.1, pp.1121–1143, 1970.

(2008 年 4 月 14 日 受付)