3次元時間域異方性動弾性問題における 高速多重極境界積分方程式法について

A Time Domain Fast Multipole Boundary Integral Equation Method for Anisotropic Elastodynamics in 3D

志戸岡 永*・大谷 佳広**・西村 直志*** Hisashi SHIDOOKA, Yoshihiro OTANI and Naoshi NISHIMURA

*非会員 工修 クレディスイス (〒 106-6024 東京都港区六本木 1 丁目 6 番 1 号) **正会員 博士 (情報学) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町) ***正会員 工博 京都大学情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

This paper discusses a fast multipole method for three dimensional anisotropic elastodynamics in time domain. A PWTD (plane wave time domain) approach is presented. The proposed approach is verified via a simple numerical example. The accuracy of the approach is shown to be satisfactory for engineering purposes, although its efficiency still needs to be improved.

Key Words: Fast Multipole Method, Elastodynamics, Anisotropy, Time Domain, PWTD

1. 緒言

境界積分方程式法 (Boundary Integral Equation Method, BIEM) は,基本解の特性を反映して,無限遠を含むような問題や,特異性のある問題,また,境界データのみを利用するような逆解析などに特に有効であるという長所がある.一方,多くの問題において離散化して得られる連立一次方程式の係数が密行列となるためその数値求解に計算時間がかかり,大容量の計算機が必要となるという欠点もある.そのため,工学的応用は限られたものに成らざるを得なかった.しかしながら,80年代半ばに計算量のオーダーを低減する画期的なアルゴリズムである高速多重極法 (Fast Multipole Method, FMM) が提案されたことによりこの問題は解決され,BIEM の高速化・大規模が可能となった.近年では電磁気学,弾性学,破壊力学など様々な分野への拡張がなされている.

本論文で扱う時間域波動問題の場合、空間と時間の自由度を N_s , N_t とすると、従来法ならば計算量は $O(N_s^2N_t^2)$ になり、大規模な問題を解くことは不可能である。そこで、Ergin らは 3 次元スカラー波動問題について、基本解の平面波展開と時空の階層化を利用した Plane Wave Time Domain(PWTD) アルゴリズムを提案し 1)、multi-level アルゴリズムを用いた場合の計算量が $O(N_tN_s\log^2N_s)$ であることを示している。この PWTD アルゴリズムを用いて著者らのグループでは、これまで、等方性弾性体を対象とした時間域の動的問題の高速アルゴリズムについて研究を行ってきた。高橋らは PWTD アルゴリズムを 2 次元、3 次元の弾性問題に拡張することに成功した 2)。その後、大谷らは高橋らの解法における時間方向のアルゴリズムを

改良し、並列化を行うことで、より大規模な問題を扱うことを可能にした³⁾. 近年では吉川ら⁴⁾によってレーザ超音波非破壊評価に適用されるなど、工学的な応用もなされている.

一方、異方性弾性体を対象とした時間域動的問題に ついては必ずしも研究が進んでいるとは言えないのが 現状である.実際,時間域動的問題は言うに及ばず,こ れまで異方性弾性体を対象とした BIEM による解析自 体, 基本解が陽に書き下せる2次元静弾性問題以外で は非常に限られており、2次元の時間域動的問題⁵⁾、3 次元の静的問題^{6),7),8)}, あるいは3次元周波数域の動 的問題⁹⁾などの例を挙げることができる程度である。3 次元時間域の動弾性解析は、従来型の定式化について は著者の知る限り Tan and Hirose¹⁰⁾の予備的な研究以 外に報告はなく、高速多重極法についても定式化が知 られているのみであって³⁾,数値結果の報告はなされて いない. このような状況を考慮し、本論文ではPWTD アルゴリズムの 3 次元異方性弾性体の時間域動的問題 への拡張を取り扱う。ただし、本論文はこの分野の最 初の研究である事を考慮して、計算効率の追求は行わ ず、算法が成立する事と、その精度の確認を主目的と する。

以下では、まず従来法を用いた異方性動弾性問題における層ポテンシャルの算法を示す。次に、PWTDアルゴリズムを用いて解析解が存在する問題を解き、アルゴリズム全体の精度の検証を行う。この結果、取り上げた問題では工学的に十分な精度で解析が可能である事が示される。

2. 定式化

本節では本論文で取り扱う境界積分方程式法の定式 化を記す.

2.1 3 次元時間域動弾性問題とその境界積分方程式 3 次元領域 $D \subset R^3$ において,以下の初期値境界値 問題を解き,変位 $u_i(\boldsymbol{x},t)$ を $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in D,t\in(0,\infty)$ で求めることを考える.

$$\left\{ C_{ijkl} \partial_j \partial_l - \rho \delta_{ik} \partial_t^2 \right\} u_k(\boldsymbol{x}, t) = 0$$
初期条件 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u_0}(\boldsymbol{x})$ in D

$$\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{v_0}(\boldsymbol{x}) \text{ in } D$$
境界条件 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t) \text{ on } S_1$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t) = \bar{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}, t) \text{ on } S_2$$

ここに、 は境界で与えられた関数、 ∂_i は x_i に関する空間微分、 ∂_t および は時間微分を表す。 u_0 、 v_0 はそれぞれ初期変位、初期速度ベクトルであり、 C_{ijkl} は弾性テンソル、 δ_{ik} はクロネッカーのデルタである。t は表面力であり、以下のように与えられる。

$$t_i(\boldsymbol{x},t) = C_{ijkl} n_j(\boldsymbol{x}) u_{k,l}(\boldsymbol{x},t)$$

ここに、n は境界 S における D の補領域を向く単位法線ベクトルである。

簡単のため、初期条件を零とすると、式 (1) に対応する境界積分方程式は、x が境界 S 上にある場合、次式で表される。

$$\frac{1}{2}u_{i}(\boldsymbol{x},t) + \text{v.p.} \int_{S} T_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * u_{j}(\boldsymbol{y},t) dS_{y} = \int_{S} \Gamma_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t) * t_{j}(\boldsymbol{y},t) dS_{y}$$
(2)

ここに、v.p. は Cauchy の主値積分を表し、* は時間に関するたたみ込みを表す。 Γ 、T はそれぞれ動弾性学の基本解及び二重層核であり、次式によって表される 11).

$$\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{H(t)}{8\pi^2} \int_{S_k} \sum_{p=1}^{3} \left[\frac{v_i^p(k)v_j^p(k)}{\rho c_p^3(k)} \partial_t \delta(t - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{k}/c_p(k)) \right] dS_k$$
(3)

$$T_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) = C_{jlmn} n_l(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma_{im}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t)$$
(4)

ここに、 $\delta()$, H() は各々デルタ関数、ヘビサイド関数を表し、 S_k は単位球面、k は S_k 上の外向き単位法線ベクトルであり、平面波の伝播方向を表す。 $v^p(k)$ は、

$$G_{ij} = \frac{C_{ikjl}k_kk_l}{a} \tag{5}$$

と定義した行列 G_{ij} の p 番目の固有ベクトルであり、物理的には平面波の振動方向を意味している。また、 c_p は G_{ij} の固有値 c_p^2 の平方根であり、物理的には平面波の速度を意味している。

2.2 従来法による境界積分方程式法の離散化

本節では、式 (2) を従来法 (多重極法ではない従来の解法) を用いて離散化して解くことを考える。境界 S を N_S 個の三角形 $S_I(I=1,2,\cdots,N_S)$ で分割し、各 S_I の重心に境界選点 x_I を設ける。時間については N_t 個の区間 $(t_{\alpha-1},t_{\alpha})$ で分割する。各区間の長さは Δt で一定とし、時間選点は区間終端に設ける。選点における境界密度、すなわち変位 $u(x_I,t_{\alpha})$ 及び表面力 $t(x_I,t_{\alpha})$ をそれぞれ u_i^{α} 及び t_i^{α} と記す。

境界密度の基底関数として区分一定のものを, 時間 基底として区分線形のものを用いる. 時間基底は次の ように表される.

$$\Psi_{\alpha}(t) = \begin{cases}
0 & t < t_{\alpha-1}, t_{\alpha+1} \le t \\
\frac{t - t_{\alpha-1}}{\Delta t} & t_{\alpha-1} \le t < t_{\alpha} \\
\frac{t_{\alpha+1} - t}{\Delta t} & t_{\alpha} \le t < t_{\alpha+1}
\end{cases}$$
(6)

これより、u(x,t), t(x,t) は以下のように内挿される.

$$egin{aligned} oldsymbol{u}(oldsymbol{x},t) &= \sum_{lpha=1}^{N_t} \Psi_lpha(t) oldsymbol{u}(oldsymbol{x},t_lpha) \ oldsymbol{t}(oldsymbol{x},t) &= \sum_{lpha=1}^{N_t} \Psi_lpha(t) oldsymbol{t}(oldsymbol{x},t_lpha) \end{aligned}$$

ここで,

$$U_{IJ}^{\alpha-\beta+1} = \int_{t_{\beta-1}}^{\min(t_{\beta+1},t_{\alpha})} \int_{S_J} \mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{y}, t_{\alpha} - \tau) \Psi_{\beta}(\tau) dS_y d\tau \quad (7)$$

$$W_{IJ}^{\alpha-\beta+1} = \frac{1}{2} \delta_{IJ} \delta_{\alpha\beta} \boldsymbol{I} + \int_{t_{\beta-1}}^{\min(t_{\beta+1},t_{\alpha})} \text{v.p.} \int_{S_J} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{y}, t_{\alpha} - \tau) \Psi_{\beta}(\tau) dS_y d\tau \quad (8)$$

として影響係数を定義する. すると, 式(2) は次のように離散化される.

$$\sum_{J=1}^{N_S} A_{IJ}^{(1)} \boldsymbol{p}_J^{\alpha} = \sum_{J=1}^{N_s} B_{IJ}^{(1)} \boldsymbol{q}_j^{\alpha} - \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \sum_{J=1}^{N_s} \left(\boldsymbol{W}_{IJ}^{(\alpha-\beta+1)} \boldsymbol{u}_J^{\beta} - \boldsymbol{U}_{IJ}^{(\alpha-\beta+1)} \boldsymbol{t}_J^{\beta} \right)$$
(9)

ここに、現在時刻 t_{α} の境界要素 S_{I} における境界密度の未知成分を p_{J}^{α} , 境界条件によって与えられる成分を q_{J}^{α} と表し、その係数 $(W_{IJ}^{(1)}, U_{IJ}^{(1)}$ のいずれか) をそれぞれ $A_{IJ}^{(1)}$, $B_{IJ}^{(1)}$ と書いた。以上のように、式 (2) は、離散化を経て式 (9) のような $3N_{S}$ 元の連立一次方程式に帰着する。現時刻未知ベクトル p_{J}^{α} を求めるためには、現時刻で既知なベクトル u_{J}^{β} 及び t_{J}^{β} $(\beta=1,\dots,\alpha-1)$ をすべて用いて右辺の行列とベクトルの積を計算し、左辺の行列 $A_{IJ}^{(1)}$ の逆行列を計算すればよい。これを $\alpha=1$ から N_{t} まで繰り返すことによってすべての未知量が求められる。

2.3 基本解の平面波展開

本節では,基本解の平面波展開を用いた式(2)の解法について記す.基本解(3)の平面波展開は次式で与えられる³⁾.

$$\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x},t) - \Gamma'_{ij}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\partial_t}{8\pi^2} \int_{S_k} \sum_{p=1}^3 \left[\frac{v_i^p(k)v_j^p(k)}{\rho c_p^3(k)} \delta(t - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{k}/c_p(k)) \right] dS_k$$
(10)

ここに, $\Gamma'(x,t) = \Gamma(x,-t)$ は反因果律を満たす基本解である.式 (10) を用いて式 (2) の層ポテンシャルの算法を構成する.

いま,ともに半径がRである二つの球形領域 S_s , S_o を考え,各々の中心をs,oとする.中心間距離|o-s|を R_c とし $R_c>2R$ を満たすものとする(図 2.1 参照)。また, S_s に含まれる領域Sの部分を \bar{S} とする.そこで,式(10)を用いて選点 $(x,t)(x\in S_o,t\in(0,\infty))$ において $\bar{S}\times(0,t]$ に分布した密度t,uによる層ポテンシャルを評価することを目標とする.

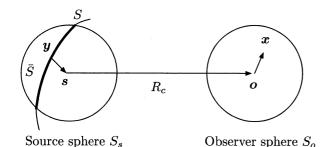


図-1 ソースを含む球と評価点を含む球

密度 u 及び t を,各々有限の時間区間帯 $(T_1^z, T_2^z]$ にのみ台を持つ関数 u^z ,ならびに t^z に区分けする.式 (10) の平面波速度の最大値を c_{\max} とする.すると,

$$R_c - 2R \ge c_{\max}(T_2^z - T_1^z)$$
 (11)

が成立すれば、選点 $(x,t(x \in S_o,t > T_2^z))$ に対して $\bar{S} \times (T_1^z,T_2^z]$ 上の既知の密度 t^z ならびに u^z によるポテンシャルは次のように計算できる.

$$\int_{\bar{S}} \left(T_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) * u_j^z(\boldsymbol{y}, t) \right)
- \Gamma_{ij}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t) * t_j^z(\boldsymbol{y}, t) dS_y
= -\frac{\partial_t}{8\pi^2} \int_{S_k} \sum_{p=1}^3 \left[v_i^p \delta(t - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{k}/c_p) \right]
* \mathcal{O}^{zp}(\boldsymbol{s}, t, \boldsymbol{k}) dS_k$$
(12)

ここに、 $\mathcal{O}^{zp}(s,t,k)(p=1,2,3)$ は outgoing ray であ

り, 次式で定義される.

$$\mathcal{O}^{zp}(\boldsymbol{s}, t, \boldsymbol{k}) = \frac{1}{\rho} \int_{\bar{S}} \left(\frac{C_{jsqr} n_q(y) k_s v_j^p(\boldsymbol{k})}{c_p^4(\boldsymbol{k})} u_r^z(\boldsymbol{y}, t) - \frac{v_j^p(\boldsymbol{k}) t_j^z(\boldsymbol{y}, t)}{c_p^3(\boldsymbol{k})} \right) \times \delta(t - (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{k}/c_p(\boldsymbol{k})) dS_y$$
(13)

なお、式 (11) は $\bar{S} \times (T_1^z, T_2^z]$ 上の境界密度 t^z , u^z による影響が、時刻 T_2^z 以前に選点 $x(x \in S_o)$ に到達しないための条件である。 $\bar{S} \times (T_1^z, T_2^z]$ 上の密度による影響が時刻 $t_\alpha < T_2^z$ に到達するような選点においては、影響が到達した時刻 t_α の時点で $(t_\alpha, T_2^z]$ における密度 t^z , u^z が未知であるので、式 (12) を用いた算法は成立しない。

式(12)は次のようにも計算される.

$$\int_{\bar{S}} \left(T_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) * u_j^z(\boldsymbol{y}, t) \right) dS_y$$

$$- \Gamma_{ij}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t) * t_j^z(\boldsymbol{y}, t) dS_y$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S_k} \sum_{p=1}^{3} \left[v_i^p \delta(t - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{o}) \cdot \boldsymbol{k}/c_p) \right] dS_k$$

$$* \mathcal{I}^{zp}(\boldsymbol{o}, t, \boldsymbol{k}) dS_k$$
(14)

ここに、 $\mathcal{I}^{zp}(o,t,\mathbf{k})(p=1,2,3)$ は incoming ray であり、次式で定義される.

$$\mathcal{I}^{zp}(\boldsymbol{o}, t, \boldsymbol{k}) = \partial_t \delta(t - (\boldsymbol{o} - \boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{k} / c_p(\boldsymbol{k})) * \mathcal{O}^{zp}(\boldsymbol{s}, t, \boldsymbol{k})$$
(15)

また outgoing ray ならびに incoming ray は次式により原点を移動できる.

$$\mathcal{O}^{zp}(\boldsymbol{s}, t, \boldsymbol{k}) = \delta(t - (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s'}) \cdot \boldsymbol{k}/c_p(\boldsymbol{k})) * \mathcal{O}^{zp}(\boldsymbol{s'}, t, \boldsymbol{k})$$
(16)

$$\mathcal{I}^{zp}(\boldsymbol{o}, t, \boldsymbol{k}) = \delta(t - (\boldsymbol{o} - \boldsymbol{o'}) \cdot \boldsymbol{k}/c_p(\boldsymbol{k})) * \mathcal{I}^{zp}(\boldsymbol{o'}, t, \boldsymbol{k})$$
(17)

式 (11) で表される遠方場に対し、台が (T_z^z, T_z^z) で \bar{S} 内の要素 y 上に分布する境界密度 u^z , t^z による層 ポテンシャルを表すのが outgoing ray であり、通常の 多重極法における多重極モーメントに相当する。一方、 outgoing ray が計算された時点より未来の時刻に、 S_o 内で観測される層ポテンシャルを表すのが incoming ray であり、通常の多重極法における局所展開係数に相当 する.

以上より、本来求めるべき $\bar{S} \times (0,t]$ 上の密度u及びtによる層ポテンシャルは、 $x \in S_o, t > T_2^z$ に対しては式 (12)、あるいは式 (14) を zまで重ね合わせることに

より次のように求められる。

$$\int_{\bar{S}} (T_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) * u_{j}(\boldsymbol{y}, t)
- \Gamma_{ij}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t) * t_{j}(\boldsymbol{y}, t)) dS_{y}$$

$$= -\frac{1}{8\pi^{2}} \sum_{\zeta=1}^{z} \int_{S_{k}} \sum_{p=1}^{3} \left[v_{i}^{p} \delta(t - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{o}) \cdot \boldsymbol{k}/c_{p}) \right]
* \mathcal{I}^{\zeta p}(\boldsymbol{o}, t, \boldsymbol{k}) dS_{k}$$
(18)

3. 従来法による層ポテンシャルの評価

本節では従来法による式 (2) の層ポテンシャルを計算する手法を示す。これまで、3 次元異方性弾性体を対象とした時間域動的問題の BIEM の研究は Tan and Hirose $^{10)}$ の予備的な結果が知られている。本論文では Tan and Hirose より低次の (区分線形) 時間基底を用いて、Wang $6^{5)}$ の結果を直接的に3 次元に拡張する。

3.1 基本解と二重層核の分解

基本解となめらかな関数 $\varphi(t)$ とのたたみ込みを考える. t < 0 のとき $\varphi(t) = 0$ であるとすると次式を得る.

$$\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t) * \varphi(t)
= \Gamma_{ij}^{R}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t) * \dot{\varphi}(t) + \Gamma_{ij}^{S}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\varphi(t)$$

$$\Gamma_{ij}^{R}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t)
= -\frac{H(t)}{8\pi^{2}} \int_{S_{k}} \sum_{p=1}^{3} \frac{v_{i}^{p} v_{j}^{p}}{\rho c_{p}^{3}} \delta(t - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{k}/c_{p}) dS_{k}$$
(19)

 $\Gamma^S_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \int_{S_k} \sum_{r=1}^3 \frac{v_i^p v_j^p}{\rho c_p^p} \delta((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{k}) dS_k$$
 (21)

 $\Gamma_{ij}^S(x-y)$ は 3 次元静弾性問題の基本解である。このように、基本解を時間依存性がない部分と時間依存性がある部分に分解して考える。

以上を用いて式 (7) で表される影響係数 $U_{IJ}^{\alpha-eta+1}$ は次式に変換される。

$$U_{IJ}^{\alpha-\beta+1} = \int_{S_J} \mathbf{\Gamma}^S(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{y}) dS_{\boldsymbol{y}}$$

$$+ \int_{t_{\beta-1}}^{\min(t_{\beta+1}, t_{\alpha})} \int_{S_J} \mathbf{\Gamma}^R(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{y}, t_{\alpha} - \tau) \partial_{\tau} \Psi_{\beta}(\tau) dS_{\boldsymbol{y}} d\tau$$
(22)

同様にして (8) で表される $oldsymbol{W}_{IJ}^{lpha-eta+1}$ は

$$\mathbf{W}_{IJ}^{\alpha-\beta+1} = \frac{1}{2} \delta_{IJ} \delta_{\alpha\beta} \mathbf{I} + \text{v.p.} \int_{S_J} \mathbf{T}^S(\mathbf{x}_I, \mathbf{y}) dS_J$$
$$+ \int_{t_{\beta-1}}^{\min(t_{\beta+1}, t_{\alpha})} \int_{S_J} \mathbf{T}^R(\mathbf{x}_I, \mathbf{y}, t_{\alpha} - \tau) \partial_{\tau}^2 \Psi_{\beta}(\tau) dS_y d\tau$$
(23)

の形となる。ここに、 T^S 、 T^R は適当な関数である。

3.2 影響係数の計算

(1) 時間依存性のない項

式 (22) の右辺第一項の積分については、 $Wang 6^{7)}$ の方法を用いる事により次のように計算される。

$$\int_{S_{J}} \Gamma_{ij}^{S}(\boldsymbol{x}_{I} - \boldsymbol{y}) dS_{y} =$$

$$-\Re \int_{0}^{\pi} \sum_{\beta=1}^{3} \bar{\Gamma}_{ij}^{\beta}(\phi) \left[\int_{S_{J}} \frac{\operatorname{sgn}[(\boldsymbol{x}_{I} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{k}]}{(\boldsymbol{x}_{I} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{s}^{\beta}} dS_{y} \right] d\phi \tag{24}$$

ここに,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{\beta}(\phi) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{A_{ij}(\mathbf{s}^{\beta})}{\partial_{\eta} D(\mathbf{s}^{\beta})},$$

$$\mathbf{s}^{\beta} = \cos \phi \mathbf{e}^{1} + \sin \phi \mathbf{e}^{2} + \eta_{\beta} \mathbf{n}, \tag{25}$$

 $A_{ij}(s)$ 及び D(s) はそれぞれ式 (5) で定義した $G_{ij}(s)$ の余因子行列及び行列式であり、 η_β $(\beta=1,2,3)$ は η に関する 6 次方程式

$$D(\cos\phi e^1 + \sin\phi e^2 + \eta n) = 0$$

の解のうち、虚部が正のもの (重複を含めて 3 つある事が示される) である。また、 (e^1,e^2,n) は、 e^1 が境界要素 S_J の任意の辺に平行に、n が S_J に垂直になるようにとった基底ベクトル (図 2 参照) である。

同様の計算により式 (23) の右辺第二項の積分は次式 となる.

$$\int_{S_J} T_{ij}^S(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{y}) dS_y =$$

$$- \Re \int_0^{\pi} \sum_{\beta=1}^3 \bar{T}_{ij}^{\beta}(\phi) \left[\int_{S_J} \frac{\operatorname{sgn}[(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{k}]}{[(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{s}^{\beta}]^2} dS_J \right] d\phi$$
(26)

ここに, $\bar{T}_{ij}^{\beta}(\phi) = C_{jlmn} n_l(\boldsymbol{y}) s_n^{\beta} \bar{\Gamma}_{im}^{\beta}(\phi)$ である.式 (24),(26) における [] で囲まれた境界要素上の積分 は簡単に解析的に積分することが出来る. ϕ に関する 積分は解析的に行うことが出来ないので数値積分を用いて評価する.

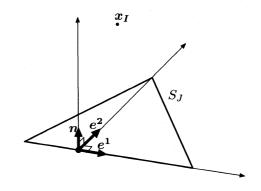


図-2 正規直交基底 (e^1, e^2, n)

(2) 時間依存性のある項

式 (22), (23) の右辺第二項の計算について考える.

$$\int_{t_{\beta-1}}^{\min(t_{\beta+1},t_{\alpha})} \int_{S_J} \Gamma_{ij}^R(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{y}, t_{\alpha} - \tau) \partial_{\tau} \Psi_{\beta}(\tau) dS_{\boldsymbol{y}} d\tau$$
(27)

$$\int_{t_{\beta-1}}^{\min(t_{\beta+1},t_{\alpha})} \int_{S_J} T_{ij}^R(\boldsymbol{x_I},\boldsymbol{y},t_{\alpha}-\tau) \partial_{\tau}^2 \Psi_{\beta}(\tau) dS_y d\tau$$
(28)

まず,式 (27) は,時間基底 (式 (6)) をヘビサイド関数 を用いて書き直し計算すると,次式のようになる.

$$\frac{1}{8\pi^{2}\Delta t} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sum_{p=1}^{3} \frac{v_{i}^{p}(k) v_{j}^{p}(k)}{\rho c_{p}^{3}} \left[S_{w}^{1} - S_{w}^{2}\right] \sin\theta d\theta d\phi$$

$$(t_{\beta+1} < t_{\alpha}$$
 のとき)

$$\frac{1}{8\pi^2 \Delta t} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sum_{p=1}^{3} \frac{v_i^p(k) v_j^p(k)}{\rho c_p^3} S_w^1 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$(t_{\beta+1} = t_{\alpha} \quad \mathcal{O} \ \xi \ \mathfrak{F})$$

$$(29)$$

ここに, S_w^1 は,次のように定義される: L_1 及び L_2 を各々 x から $c_p(t_\alpha-t_{\beta-1})$, $c_p(t_\alpha-t_\beta)$ の距離にあり,かつ k と直交する直線であとすると(図 3 参照), S_w^1 は直線 L_1 及び L_2 と境界要素の辺で囲まれた五角形,台形,あるいは三角形の面積である.また, S_w^2 は, S_w^1 における β を 1 だけ増やして,上述した S_w^1 に相当する面積を求めたものである.

同様に,式(28)は次式となる.

$$\frac{1}{8\pi^{2}\Delta t}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\sum_{p=1}^{3}\frac{v_{i}^{p}(k)v_{j}^{p}(k)}{\rho c_{p}^{3}}\left[l_{1}-2l_{2}+l_{3}\right]d\theta d\phi$$

 $(t_{\beta+1} < t_{\alpha}$ のとき)

$$\frac{1}{8\pi^2\Delta t} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sum_{p=1}^{3} \frac{v_i^p(k)v_j^p(k)}{\rho c_p^3} \left[l_1 - l_2\right] d\theta d\phi$$

$$(t_{\beta+1}=t_{\alpha}\quad \mathcal{O}$$
とき)

ここに、 l_1 及び l_2 は上述した L_1 、 L_2 の辺長であり、 l_3 は l_1 及び l_2 と同様に、x から $c_p(t_\alpha-t_{\beta+1})$ の距離にあり、かつ k と直交する直線の長さである。

式 (29), (30) における単位球面上の積分は解析的に積分することはできないので数値的に行う。本論文では θ , ϕ に関する積分ともに数値積分を用いて評価した.

なお、本節で示した影響係数の計算法に現れる各項は、wave front の前方においてもゼロにはならず、足してゼロになる性質を有している。このため、wave front の前方の評価点では始めから影響係数の評価を行なわない様にしておくなど何らかの処理を行わないと計算量が大幅に増えることになる。しかし、異方性弾性波動問題では一般に wave front の形状が複雑になることが知られている¹²⁾。そのため厳密に wave front の処理

をするのは困難であるので、本論文では平面波の速度の最大値 c_{max} を求め、その値を用いて仮想的な wave front の前方では影響係数の評価を行なわないようにした。

また、本論文では、簡単のため、影響係数の直接計算に関わる数値積分公式として台形公式を採用したが、この選択に関しては計算効率上必ずしも最善とは言えないので、今後更に検討を行なう必要があるものと考えられる。

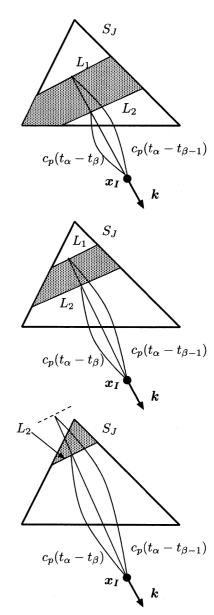


図-3 積分範囲 (一重層ポテンシャル)

4. 高速解法のアルゴリズム

前節で導いた従来法による積分と,2.3で導いた平面 波展開の双方を利用すると,式(2)の層ポテンシャル を計算する手法を構成する事ができる.すなわち,あ る境界選点について、近傍の要素からの寄与は従来法で評価し、遠方の要素からの寄与は平面波展開によって評価する。その手順は本質的に等方性の場合^{2),3)}と同じであり、異方性弾性体では波の速度が方向によって異なるために、速度に依存するパラメータの取り方が等方性の場合とわずかに異なるのみである。ここでは等方性の場合との相違点を簡単に指摘するに留める。

4.1 セルと時間区間

過去の影響のうち、遠方の境界要素からの影響はPWTD アルゴリズムを用いてひとまとめにして評価する。この際、空間次元を階層的に立方体に分割し、それらをPWTD アルゴリズムを適用するための単位とする。これらの立方体をセルと呼ぶ。各々のセルにおいては、空間方向だけでなく、過去の M 個の時間ステップをひとまとめにして取り扱う。その際、階層毎に、時間軸を $M\Delta t$ 毎に分割し、区間 $((z-1)M\Delta t, zM\Delta t](z=1,2,\cdots)$ を第 z 時間区間と呼ぶ。PWTD アルゴリズムを適用して過去の影響をひとまとめで評価する際は、第 z 時間区間に属する u や t の離散値の影響を考慮すればよい。u や t を区間 $[-p_t\Delta t, p_t\Delta t]$ に台を持つ補間関数によって時間方向に補間する場合、最下層の(もっとも細かい) セル $(\nu$ でル l_{max}) において、M を

$$M^{(l_{\text{max}})} = \frac{\beta L^{(l_{\text{max}})}}{c_{\text{max}} \Delta t} - 2p_t + 1 \tag{31}$$

と選び、上位のセル (レベル l) では

$$M^{(l)} = 2M^{(l+1)}$$
 $l = 2, 3, \dots, l_{\text{max}} - 1$ (32)

と選ぶ事によって, 時空方向のセルの階層性を確保している.

4.2 kのサンプリングと単位球面上の積分

式 (14) で k について単位球面上で積分する必要が生じる。この積分方法、並びに k のサンプリング点の取り方について述べる。

outgoing ray は式 (13) によって生成されるが,変位 や表面力が時間方向に ω_{\max} で帯域制限されている場合には,時間ステップの長さ Δt を,Nyquist 周波数 $\omega_f = \pi/\Delta t$ が $\omega_f = \chi_1 \omega_{\max}$ となるように決める.ここに, χ_1 は over sampling ratio であり,1 より大きな値である.この時,outgoing ray は空間的には次数

$$K = \frac{2R\omega_{\text{max}}\chi_2}{c_{\text{min}}}$$

$$= \frac{2R\omega_f\chi_2'}{c_{\text{min}}}$$
(33)

の球面調和関数で近似的に表現できると考えられる。ここに $R=\sqrt{3}L/2$ であり,L はセルの辺長である。また c_{\min} は平面波速度の最小値とする。また, χ_2 は定数であり,定数 $\chi_2'=\chi_2/\chi_1$ を excess bandwidth factor と呼ぶ。この K を用いて,例えば式 (14) 右辺の単位球面

上の積分は極座標 (θ,ϕ) を用いると θ 方向には K+1 点の Gauss 公式, ϕ 方向には 2K+1 点の台形公式を用いる。

5. 数值計算例

5.1 単位球の内部問題

適当な無次元化を行なった座標系において、(1,1,1)を中心とする単位球の内部問題を考える。図4のように、境界を500個の三角形要素で分割した(1500DOF)。 弾性テンソルは

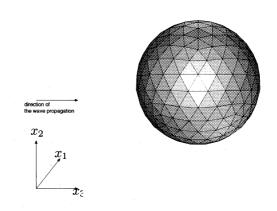


図-4 境界要素 (1500DOF)

$$\begin{pmatrix} 0.6931 & 0.1051 & 0.1349 & -0.1299 & 0.0 & 0.0 \\ 0.6931 & 0.1349 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.8862 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.4302 & 0.0 & 0.0 \\ \text{sym.} & & & & & & & \\ (34) \\ \end{pmatrix}$$

を用い、密度は $\rho = 1$ とした。境界条件は次のように与えた。まず入射波の伝播方向 d を定め、

$$G_{ij} = \frac{C_{ikjl}d_kd_l}{\rho} \tag{35}$$

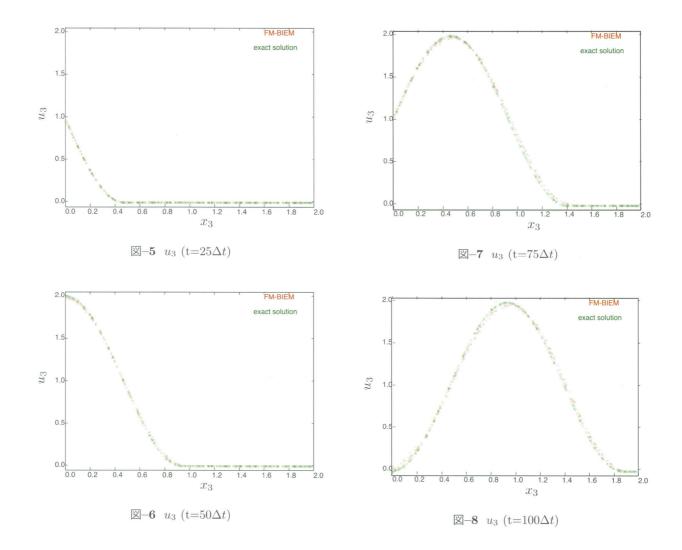
の固有値及び固有ベクトルを求め振動方向v及び伝播速度cを定める。ここでは、d=(0,0,1) とし、v=(0,0,1)、 $c\simeq 0.94$ となるものを選んだ。そして得られた値を用いて次式で与えられる変位場に対応する表面応力を要素すべてに与える。

$$u(x,t) = v \left[1 - \cos \frac{2\pi}{\Lambda} \left(t - \frac{d \cdot x}{c} \right) \right]$$
 (36)

 Λ は波長で、2 とした。また COS は次のように定義した関数である。

$$COSx = \begin{cases} \cos x & 0 \le x \le 2\pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
 (37)

このときこの問題の解は式 (36) となる。時間選点数 N_t は 100, Δt は 0.02 とした。また, $\chi_1=3.0$, $p_t=3$ と



した. χ_2' はおよそ 0.2 としたため, $K^{(2)}=32$ となった. また, 直接計算部分における単位球面上の積分は天頂角方向は 100 点, 方位角方向は 200 点の台形公式を用いた. 計算には京都大学学術情報メディアセンターの HPC2500 を用い, 32 スレッドを用いた簡易な並列化を行なった.

以上の条件で計算を行った結果を、図 5~図 8 に示す。数値解、及び式 (36) により計算された解析解について、横軸に各要素の x_3 、縦軸を u_3 としてプロットしたものである。得られた数値解はほぼ解析解に一致している。また、 N_t ステップまでの全要素において数値解と解析解の最大誤差を求め、解析解の最大値 2 に対する比率 E を計算した。最大誤差 E は 4% となり、精度は得られていると判断した。要した実行 CPU 時間の最大値は 55 時間 10 分であった。

6. 結言

本論文では PWTD アルゴリズムを 3 次元時間域異 方性動弾性問題に拡張し、高速多重極境界積分方程式 法による数値解析コードを開発した。また、解析解が 存在する問題に提案する手法を適用して、精度の検証 を行った. 誤差の最大値は 4%であり、工学的には十分 実用に足る精度が得られていることを確認した.

本論文で取り上げた例題は、空間の自由度が1500、 時間の自由度が100程度の小規模なものであるが、現 状ではかなりの計算コストがかかっている。これには 2つの原因がある。一つは、扱った問題規模が小さい ため,直接計算の計算時間が支配的であり,直接計算 部分において、層ポテンシャルを計算する際に、単位 球面上の積分を精度よく行うために数値積分の積分点 数を多くとらなければならない事の影響を強く受けた ためである。そこで、より計算量が少なく、かつ精度 のよい積分手法の研究を行う必要があるであろう. も う一つの原因としては outgoing ray から incoming ray への変換 (いわゆる M2L) の計算にコストがかかって いる事が挙げられる. 実際, M2Lには(15)を用いる が、これに含まれる微分を処理するために数値計算を Fourier 域で行なっており、その際球ベッセル関数の評 価が必要になる²⁾. 異方性弾性体の場合, 平面波の速 度は伝播方向によって変化するため、1つの方向を定め るたびに球ベッセル関数の評価回数が増大する。本論 文ではこの計算を記憶量の観点から on the fly で再計 算したが、計算時間との兼ね合いから precompute す る方法も考える必要性があると思われる.

また、本論文で行なった数値計算は基礎的な問題や 内部問題のみに留まり、無限遠を含むような問題、あ るいは特異性のある問題といった境界積分方程式法の 利点を生かすことのできる問題の解析は計算効率の改 善と併せて今後の課題となった。しかし、問題の複雑 さを考えると、算法そのものの成立と精度の確認がで きた事は、一定の成果であると考えている。

参考文献

- Ergin, A.A., Shanker, B. and Michielssen, E.: Fast evaluation of three-dimensional transient wave fields using diagonal translation operators, J. Comput. Phys., vol.146, pp.157–180, 1998
- 2) Takahashi, T., Nishimura, N. and Kobayashi, S.: A fast BIEM for three-dimensional elastodynamics in time domain, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.28, pp.165–180, 2004
- 3) Otani, Y., Takahashi, T. and Nishimura, N.: A fast boundary integral equation method for elastodynamics in time domain and its parallelisation, In; Boundary Element Analysis: Mahematical Aspects and Applications, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics vol.29 (Eds. Schanz, M. and Steinbach, O.) pp.161–185, Springer, 2007
- 4) 吉川 仁, 大谷佳広, 西村 直志: 時間域多重極 BIEM を用いたレーザ超音波非破壊評価に関する大規模波動解析, 計算数理工学論文集, vol.7, pp.79-84, 2007

- Wang, C.Y., Achenbach, J.D., and Hirose, S.: Twodimensional time domain BEM for scattering of elastic waves in solids of general anisotrpy, *International Journal of Solids and Structures*, vol.33, pp.3843– 3864, 1996
- 6) Nishimura, N.: Applications of the Boundary Integral Equation Methods to Solid Mechanics, 京都大学学位論文, 1988
- Wang, C.Y. and Denda, M.: 3D BEM for general anisotropic elasticity, *International Journal of Solids* and Structures, vol.44, pp.7073-7091, Elsevier 2007
- 8) Tonon, F., Pan, E., Amadei, B.: Green's functions and boundary element method formulation for 3D anisotropic media, *Computers and Structures*, vol.79, pp.469–482, 2000
- 9) Tan, A.T. and Hirose, S.: Three dimesional time harmonic boundary element method for anisotropic solids, *Proc. APCOM'07* (CDROM), 2007
- 10) Tan, A.T. and Hirose, S.: 3D time domain boundary element formulation for anisotropic elastic solid, 計算数理工学論文集vol.7, pp.285-290, 2008
- Wang, C.Y. and Achenbach, J.D.: Elastodynamic fundamental solutions for anisotorpic solids, Geophysical Journal International, vol.118 pp.384–392, 1994
- Payton, R.G.: Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media, Martinus Nijhoff Publishers, 1983

(2008年4月14日受付)