

有限要素法による 3 次元乱流解析における壁関数の具体化

Implementation of the wall function for the three dimensional finite element turbulent flow simulation

長谷部寛*・野村卓史**

Hiroschi HASEBE and Takashi NOMURA

*正会員 修士(工学) 日本大学助手, 理工学部土木工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14)

**フェロー会員 工博 日本大学教授, 理工学部土木工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14)

The present paper describes a procedure to realize the wall function as the natural boundary condition of the finite element formulation for turbulent flow analysis. There are two key ingredients in the present methods: 1) definition of the local tangential plane on arbitrarily curved solid surface in which the wall law takes place; 2) transformation of element coefficient matrices in accordance with the local coordinate transformation of the wall boundary freedoms. The present wall boundary condition is applied to the turbulent flow around a three dimensional steep hill using the $k-\varepsilon$ model.

Key Words: wall function, finite element method, turbulent flow, $k-\varepsilon$ model, three dimensional steep hill

1. 序論

日本には急峻で複雑な地形が多いため、地形因子を考慮した風況予測を行うことが、風力発電量や、局地風などの予測精度を向上させるために必要である。このような風況の予測には、風洞実験だけでなく数値シミュレーションも広く活用されている^{1),2),3)}。乱流状態にある自然風を対象としたそれらの研究は、LES や RANS に代表される乱流モデルが用いられている。

乱流モデルに RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) を用いた場合、固体境界の境界条件の選択肢として以下の二つが考えられる。一つは壁関数⁴⁾などの手法を用いて固体境界近傍をモデル化する方法であり、もう一つは低レイノルズ数型のモデル⁵⁾を使用し、厳密に固体境界まで解像する方法である。

実地形上の風況予測を前提として考えると、低レイノルズ数型モデルは、地表面の植生や凹凸、複雑形状の構造物を解析メッシュで表現することが求められるため、現実的に用いられる可能性は小さい。

一方、地表面近傍をモデル化する手法は、複雑なメッシュ分割を回避することができることから、広く用いられている。壁関数の場合、地表面の植生や凹凸は、地表面粗度という形でモデルに容易に組み込まれる。また、市街地のように地表面粗度が一様でない場合や、粗度要

素より低い領域の気流性状を予測する場合には、建築物などの粗度要素を抵抗物体と見なすキャノピーモデル⁶⁾が用いられる。解析結果を短時間で要求されるような実務的な観点から考えると、これらの地表面近傍をモデル化する手法を用いて計算時間を短縮した上で、良好な解析結果が得られることは重要であると思われる。

石原らは壁関数を用いて、剥離を伴う急峻な 3 次元孤立峰周りの流れの解析を行い、孤立峰背後に形成される流れの構造を明らかにした⁷⁾。石原らは有限体積法により壁関数を具体化している。これに対して、有限要素法において壁関数を具体化する際に、計算境界上の接線方向流速を未知数として、対数則から導かれる壁面せん断応力を運動方程式の自然境界条件として用いる Mohammadi ら⁸⁾の手順をとった場合、著者が 2 次元解析を対象として指摘したように⁹⁾、物体の角や、円柱や丘陵などの固体境界上節点では、壁関数で未知数として扱う節点流速の方向を何らかの形で定める必要がある。これは 3 次元解析でも同様であり、例えば地表面を解析対象とすると、有限要素の面で地表面の曲面を構成するため、一つの節点を有する面の傾きがそれぞれ異なることが考えられる。その場合、壁関数で未知数として扱う節点流速の方向を定める必要が生じる。しかし、これまで 3 次元有限要素解析でそのような点を明確に指摘した例はなく、壁関数を具体化する手順は明らかではない。

本研究は、3 次元有限要素解析において、壁関数で未

知数として扱う固体境界上節点の節点流速の方向を決定する方法と、それを含めた上で壁関数の具体化過程を明確にすることを目的とする。本手法の有効性の検討には、孟らの実験¹⁰⁾ および石原らの解析⁷⁾ を比較対象として、3次元孤立峰周りの流れの解析を実施した。

2. 解析手法

本研究では、RANSのうち最も基本的なモデルである標準 k - ϵ モデル⁴⁾を用いた。また、乱流量を表す変数である乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ϵ が、数値解析的な要因により計算途中で負の値となることを防ぐために $\logarithmic$ form¹¹⁾を適用した。これまでの著者の研究により、 $\logarithmic$ formには流れが過渡的な段階や非定常解析に対して計算安定性を向上させる効果があることがわかっている¹²⁾。

$\logarithmic$ formを適用した標準 k - ϵ モデルの基礎方程式を以下に記す。

【運動方程式】

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) = 0 \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -P \mathbf{I} + \mu \left\{ \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \right\} \quad (2)$$

$$\rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I} - \mu_t \left\{ \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \right\} \quad (3)$$

$$\mu_t = \rho \nu_t = \rho C_\mu e^{2K-E} \quad (4)$$

【連続条件式】

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (5)$$

【 K 方程式 ($K = \ln k$)】

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla K &= \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla K \right] \\ &+ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) (\nabla K)^2 + e^{-K} P_k - \frac{C_\mu}{\nu_t} e^K \end{aligned} \quad (6)$$

【 E 方程式 ($E = \ln \epsilon$)】

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla E &= \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \right] \\ &+ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) (\nabla E)^2 + C_{\epsilon 1} e^{-K} P_k - C_{\epsilon 2} e^{E-K} \end{aligned} \quad (7)$$

$$P_k = \frac{1}{2} \nu_t \left\{ \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \right\}^2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0.09, C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 1.92 \\ \sigma_k &= 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{U}$ は平均流速ベクトル、 P は平均圧力、 $\mathbf{f}$ は外力ベクトル、 ρ は空気密度、 μ は粘性係数、 ν は分子動粘性係数、 μ_t は渦粘性係数、 ν_t は渦動粘性係数である。また $\logarithmic$ formを適用したことで、乱流エネルギー k 、エネルギー散逸率 ϵ の自然対数である K 、 E を変数とする輸送方程式を解いた。

解析領域 Ω の境界 Γ は、基本境界条件を与える境界 Γ_g と自然境界条件を与える境界 Γ_h より成り、それぞれの境界上で以下の境界条件を与える。

$$\mathbf{U} = \mathbf{g}_U, K = \ln g_k, E = \ln g_\epsilon \quad \text{on } \Gamma_g \quad (10a, b, c)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} - \rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) \mathbf{n} = \mathbf{h}_U, \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \mathbf{n} = h_K,$$

$$\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla E \cdot \mathbf{n} = h_E \quad \text{on } \Gamma_h \quad (11a, b, c)$$

ここで $\mathbf{g}_U$ 、 g_k 、 g_ϵ はそれぞれ、 $\mathbf{U}$ 、 k 、 ϵ の既知量を示し、 $\mathbf{h}_U$ は表面力、 h_K 、 h_E はそれぞれ、 K 、 E の勾配に関する既知量を示す。 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルである。

以上の基礎方程式(1)、(5)、(6)、(7)に対し、SUPG法¹³⁾を適用すると、以下の重み付き残差式の弱形式が得られる。

【運動方程式】

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{w}_U \cdot \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} - \mathbf{f} \right) \right\} d\Omega \\ + \int_\Omega s(\mathbf{w}_U) : (\boldsymbol{\sigma} - \rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) d\Omega \\ + \sum_{c=1}^{N_d} \left[\int_{\Omega^c} \tau_U \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{w}_U \cdot \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} - \mathbf{f} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) \right\} d\Omega \right] = \int_{\Gamma_h} \mathbf{w}_U \cdot \mathbf{h}_U d\Gamma \end{aligned} \quad (12)$$

$$s(\mathbf{w}_U) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{w}_U + (\mathbf{w}_U)^T \right\} \quad (13)$$

【連続条件式】

$$\int_\Omega q(\nabla \cdot \mathbf{U}) d\Omega = 0 \quad (14)$$

【 K 方程式 ($K = \ln k$)】

$$\int_\Omega w_K \left\{ \frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla K - (\nabla K)^2 \right\} d\Omega$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \nabla w_K \cdot \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_K} \right) \nabla K d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{N_d} \left[\int_{\Omega^e} \tau_K \mathbf{U} \cdot \nabla w_K \left\{ \frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla K \right. \right. \\
& \left. \left. - \nabla \cdot \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_K} \right) \nabla K - (\nabla K)^2 - e^{-K} P_k + \frac{C_\mu}{v_t} e^K \right\} d\Omega \right] \\
& = \int_{\Omega} w_K \left(e^{-K} P_k - \frac{C_\mu}{v_t} e^K \right) d\Omega + \int_{\Gamma_h} w_K h_K d\Gamma \quad (15)
\end{aligned}$$

【E方程式 ($E = \ln \varepsilon$)】

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w_E \left\{ \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla E - (\nabla E)^2 \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \nabla w_E \cdot \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_E} \right) \nabla E d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{N_d} \left[\int_{\Omega^e} \tau_E \mathbf{U} \cdot \nabla w_E \left\{ \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla E \right. \right. \\
& \left. \left. - \nabla \cdot \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_E} \right) \nabla E - (\nabla E)^2 - C_{\varepsilon 1} e^{-K} P_k + C_{\varepsilon 2} e^{E-K} \right\} d\Omega \right] \\
& = \int_{\Omega} w_E \left(C_{\varepsilon 1} e^{-K} P_k - C_{\varepsilon 2} e^{E-K} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_h} w_E h_E d\Gamma \quad (16)
\end{aligned}$$

w_U, q はそれぞれ運動方程式、連続条件式の重み関数であり、 w_K, w_E はそれぞれ K 方程式、 E 方程式の重み関数である。 τ_U, τ_K, τ_E は SUPG 法の安定化パラメータ¹³⁾である。

解析領域を 8 節点 6 面体要素によって分割し、平均流速 $\mathbf{U}$, logarithmic form の対数型乱流エネルギー K , 対数型エネルギー散逸率 E に対しては、tri-linear の補間関数を適用し、平均圧力 P に対しては要素内一定分布の補間関数を適用し、渦動粘性係数 ν_t は要素内一定とすると、以下の有限要素方程式が導かれる。

【運動方程式】

$$\tilde{\mathbf{M}}_U \dot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})_U \mathbf{u} + \mathbf{D}_U \mathbf{u} - \mathbf{G}_U \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (17)$$

【連続条件式】

$$\mathbf{G}_U^T \mathbf{u} = 0 \quad (18)$$

【 K 方程式 ($K = \ln k$)】

$$\tilde{\mathbf{M}}_K \dot{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})_K \mathbf{K} + (\mathbf{D}_K - \tilde{\mathbf{D}}'_K) \mathbf{K} = \tilde{\mathbf{S}}_K \quad (19)$$

【 E 方程式 ($E = \ln \varepsilon$)】

$$\tilde{\mathbf{M}}_E \dot{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})_E \mathbf{E} + (\mathbf{D}_E - \tilde{\mathbf{D}}'_E) \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{S}}_E \quad (20)$$

$\tilde{\mathbf{M}}_U, \tilde{\mathbf{M}}_K, \tilde{\mathbf{M}}_E$ は SUPG 法による付加項を含む、運動方程式、 K 方程式、 E 方程式の質量マトリックス、

$\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})_U, \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})_K, \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})_E$ は SUPG 法による付加項を含む移流項の係数マトリックス、 $\mathbf{D}_U, \mathbf{D}_K, \mathbf{D}_E$ は拡散項の係数マトリックス、 $\tilde{\mathbf{D}}'_K, \tilde{\mathbf{D}}'_E$ はそれぞれ K 方程式、 E 方程式の $(\nabla K)^2, (\nabla E)^2$ を含む項の係数マトリックス、 $\mathbf{G}$ は勾配項の係数マトリックスである。 $\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{K}, \mathbf{E}$ はそれぞれ、流速、圧力、対数型乱流エネルギー K , 対数型散逸率 E の節点ベクトルであり、 $\tilde{\mathbf{f}}$ は外力項および自然境界条件の等価節点力を含む外力ベクトルである。 $\tilde{\mathbf{S}}_K, \tilde{\mathbf{S}}_E$ はそれぞれ、 K 方程式および E 方程式の境界積分項および SUPG 法による付加項を含む生産項および消散項からなる節点ベクトルである。

以上の有限要素方程式に対し predictor-corrector 法¹³⁾を用いて時間積分を行った。ただし、運動方程式[式(17)]および連続条件式[式(18)]の有限要素方程式は、後述する局所座標変換を施した後、時間積分を行った。

3. 有限要素解析における壁関数の具体化

3.1 2次元有限要素解析における壁関数の具体化手順⁹⁾

まず初めに、本研究で試みた 3 次元有限要素解析における壁関数の具体化手順を示す前に、2 次元有限要素解析における壁関数具体化の際の問題点とそれを解決する手法を述べる。

Mohammadi らは有限要素解析において、以下の 1) ~ 3) の手順で壁関数を具体化した⁹⁾。

- 1) 図-1 に示すように、計算境界を固体境界から δ_w 離れた位置に設置する。ここで δ_w は壁関数のモデル化領域厚さであり、計算境界上の節点が対数領域内に配置されるよう経験的に値が定められる。
- 2) 計算境界上の各節点で、固体境界の接線方向の流速成分 U_{ref} を参照し、対数則¹⁴⁾ [次式(21)] から壁面せん断応力 τ_w を求める。

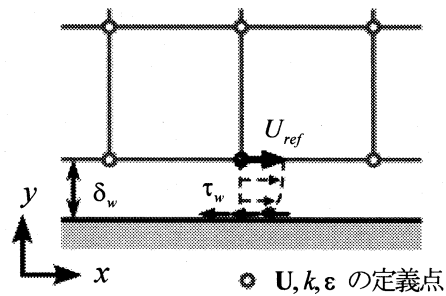


図-1 Mohammadi らが具体化した壁関数の要素配置と壁関数に関わる変数の定義位置

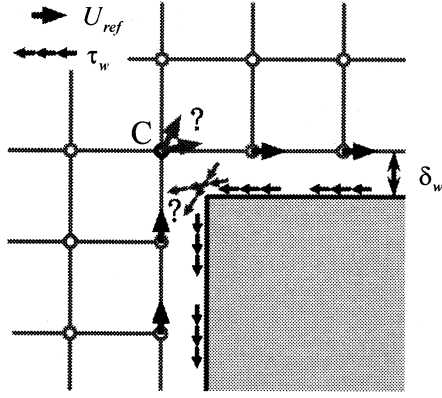


図-2 角柱の角付近の壁関数に関わる変数配置
(有限要素法)

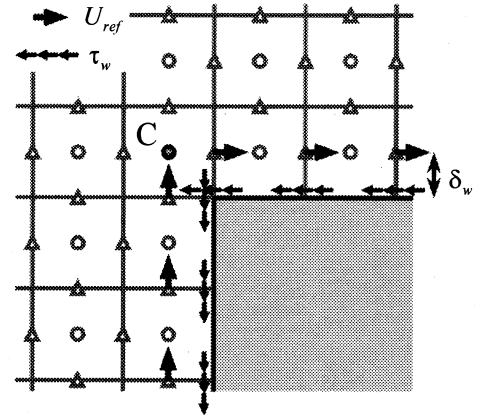


図-3 角柱の角付近の壁関数に関わる変数配置
(有限体積法)

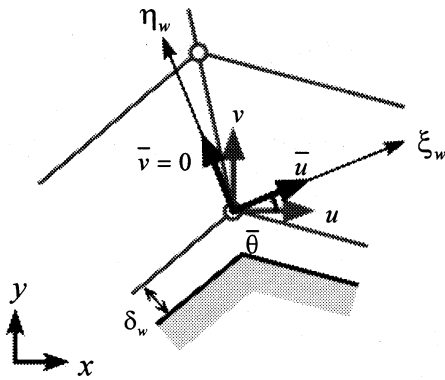


図-4 2次元有限要素解析で壁関数を用いる際の
固体境界上の節点流速の方向

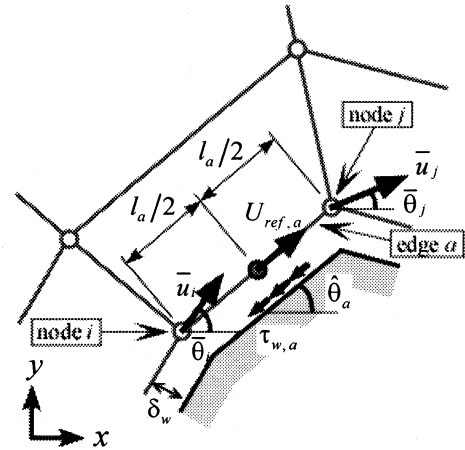


図-5 2次元有限要素解析での
壁面せん断応力の評価位置

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (21)$$

$$\left(\begin{array}{l} u^+ = U_{ref}/u_\tau, \quad y^+ = u_\tau \cdot \delta_w / \nu, \\ \tau_w = \rho u_\tau^2, \quad u_\tau: \text{摩擦速度}, \quad \kappa = 0.41, \quad B = 5.5 \end{array} \right)$$

3) 壁面せん断応力 τ_w は

$$\mathbf{h}_U \cdot \mathbf{t} = \tau_w \quad (22)$$

の関係があり、運動方程式の自然境界条件として扱う。ここで、 $\mathbf{t}$ は境界 Γ_h 上の接線方向の単位ベクトルである。

4) 計算境界上節点の固体境界の接線方向流速成分 U_{ref} は、式(12)右辺の境界積分項により生じる、壁面せん断応力 τ_w の等価節点力を境界条件とする未知数として扱う。

以上が Mohammadi らによる2次元有限要素解析における壁関数の具体化手順である。

Mohammadi らの具体化手順では、壁関数の参照流速 U_{ref} に節点流速の固体境界接線方向成分を用いているが、円柱表面などのように曲線状の境界を持つ物体では、壁関数の参照流速 U_{ref} の方向が全体座標系の座標軸の方向と一致するとは限らず、さらに、図-2に示すように、角柱の角 (C点) では壁関数の参照流速 U_{ref} の方向を一意的に定めることができない。一方、有限体積法では、加藤¹⁵⁾のようにスタガード格子を用いた場合、図-3に示すように、角柱の角 (C点) には流速評価点が位置しないため、前述の問題は生じない。

このような背景から、有限要素解析において壁関数を具体化する際、次の点に関する対処が必要になると考えられる。

- 任意の固体境界形状に対応できる、固体境界上節点の節点流速方向の具体的な設定方法
- 特に、壁関数を、流速を規定する基本境界条件としてではなく、等価節点力を規定する自然境界条件として具体化する場合の、節点自由度の座標変換に伴

Mohammadi らの文献⁹⁾の中では、上記の対処方法について言及されていない。そこで著者はこれらの点を考慮し、以下のように2次元有限要素解析で壁関数を具体化した⁹⁾。

壁関数を用いる際の固体境界上の節点流速の方向を、図-4に示すように、Mohammadi らが参照流速 U_{ref} として用いた節点流速の自由度の方向 (ξ_w 方向) と、それに直交する方向 (η_w 方向) で定義した。 $\bar{u}$ は節点流速の ξ_w 方向成分、 $\bar{v}$ は節点流速の η_w 方向成分、 $\bar{\theta}$ は ξ_w 軸の x 軸からの傾きである。そして $\bar{u}$ を未知数、 $\bar{v}$ をゼロとして扱った。

壁面せん断応力 τ_w は、その作用面を明確にするために、節点で評価するのではなく、要素辺上に一定分布する量として取り扱った。具体的には、図-5に示すように、固体境界を構成する要素辺 a の壁面せん断応力 τ_{wsa} は、辺 a の中点での流速 U_{refsa} を参照し算出した。参照流速 U_{refsa} は辺 a の両端の節点流速 $\bar{u}_i, \bar{u}_j$ の辺 a 方向成分から内挿し求める。

ξ_w 軸の x 軸からの傾き $\bar{\theta}$ 、壁面せん断応力 τ_w の具体的な算出方法および要素係数マトリックスの変換についての詳細は文献⁹⁾を参照されたい。

3.2 3次元有限要素解析における固体境界上の節点流速の方向

3次元有限要素解析において壁関数を具体化するにあたり、3.1節で述べた著者の2次元有限要素解析での壁関数の具体化方法を以下のように拡張した。

図-6に示すように、計算境界面は固体境界から、計算境界が対数領域に入る程度の距離 δ_w だけ離れた位置に設置した。

実地形上の風況解析を想定し、起伏のある地形のように、全体座標系の座標軸の方向が壁関数の参照流速 U_{ref} の方向と一致しない場合に対し、固体境界上節点の節点流速の自由度を定めるために、固体境界上の節点ごとに接平面を定義する。図-7に示す接平面の向きは、その法線ベクトル $\bar{n}$ を、着目する節点を含む面の法線ベクトル $\hat{n}$ と要素面の面積 $\hat{A}$ を用いて次式により定める。

$$\bar{n} = \sum_{j=1}^{N_{sf}} (\hat{A}_j \cdot \hat{n}_j) / \sum_{j=1}^{N_{sf}} \hat{A}_j \quad (23)$$

ここで N_{sf} は着目する節点を含む固体境界上の要素面の総数である。

固体境界上節点の節点流速の自由度は、図-8に示すように、接平面の法線方向 (ζ_w 方向) および接平面内の直交する2方向 (ξ_w 方向、 η_w 方向) として定義する。

$\bar{u}$ を節点流速の ξ_w 方向成分、 $\bar{v}$ を節点流速の η_w 方向成分、 $\bar{w}$ を節点流速の ζ_w 方向成分とする。流速の

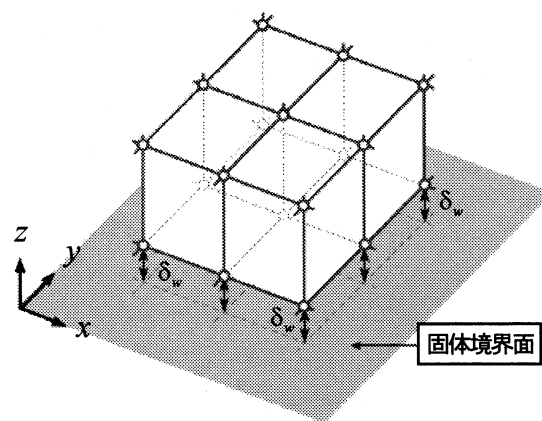


図-6 3次元有限要素解析において壁関数を用いる際の有限要素の配置

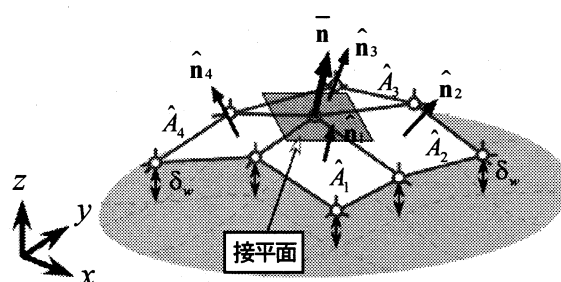


図-7 固体境界上の要素面の法線ベクトルと節点の接平面の法線ベクトル

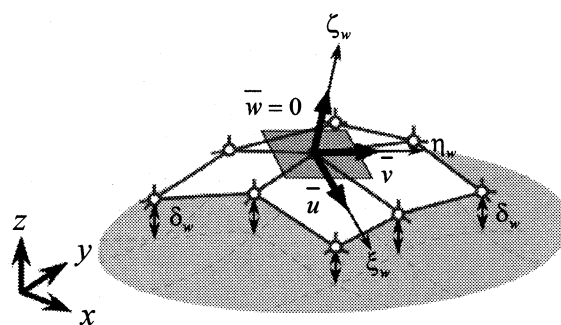


図-8 固体境界上節点の節点流速の定義

固体境界直交方向成分である $\bar{w}$ をゼロとする。接平面内の2自由度 $\bar{u}, \bar{v}$ を未知数とし、自由度 $\bar{u}, \bar{v}$ に対応する等価節点力を対数則から求めて与えるものとする。

3.3 有限要素方程式の局所座標変換

3.2節で述べたように、固体境界上節点の節点流速の方向を局所座標系で定義することから、固体境界に接する要素の要素係数マトリックスにのみ局所座標変換が施された運動方程式および連続条件式の有限要素方程式を解く必要がある。なお、 K, E 方程式に対して局所座標変換は施さない。

固体境界上要素の局所座標変換マトリックスは以下のよう導かれる。固体境界上節点 i において、節点流速の x, y, z 方向成分 u_i, v_i, w_i と、 ξ_w, η_w, ζ_w 方向成分 $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i$ との関係は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = T(\mathbf{e}_i) \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i^{\xi_w} & \mathbf{e}_i^{\eta_w} & \mathbf{e}_i^{\zeta_w} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \end{Bmatrix} \quad (24)$$

ここで $\mathbf{e}_i^{\xi_w}, \mathbf{e}_i^{\eta_w}, \mathbf{e}_i^{\zeta_w}$ は ξ_w, η_w, ζ_w 方向の単位ベクトルである。1つの要素の節点流速ベクトルを $[\mathbf{u}^e \ \mathbf{u}_w^e]^T$ とする。 $\mathbf{u}^e$ は固体境界上以外の節点流速ベクトル、 $\mathbf{u}_w^e$ は固体境界上の節点流速ベクトルである。固体境界上の流速ベクトル $\mathbf{u}_w^e$ に式 (24) の座標変換を施すと、次式 (25) となる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{u}_w^e \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^e \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \bar{\mathbf{u}}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \bar{\mathbf{u}}^e \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{u}}^e$ は節点流速を ξ_w 方向成分、 η_w 方向成分および ζ_w 方向成分に局所座標変換した固体境界上の要素の節点流速ベクトルである。 $\mathbf{L}^e$ は局所座標変換マトリックスであり、 $\mathbf{I}$ は単位行列、 $\mathbf{T}$ は要素の持つ固体境界上節点の数だけ $T(\mathbf{e}_i)$ を対角項に並べた対角行列である。同様の局所座標変換を重み関数に対しても施す。以上により導かれる、局所座標変換が施された運動方程式および連続条件式の有限要素方程式は、

$$\hat{\mathbf{M}}_U \bar{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{u}})_U \bar{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{D}}_U \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{G}_U \mathbf{p} = \bar{\mathbf{f}} \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_U^T \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{M}}_U = \sum_e \mathbf{L}^{eT} \tilde{\mathbf{M}}_U^e \mathbf{L}^e, & \hat{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{u}})_U = \sum_e \mathbf{L}^{eT} \tilde{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{u}})_U^e \mathbf{L}^e \\ \hat{\mathbf{D}}_U = \sum_e \mathbf{L}^{eT} \mathbf{D}_U^e \mathbf{L}^e, & \hat{\mathbf{G}}_U = \sum_e \mathbf{L}^{eT} \mathbf{G}_U^e \end{cases} \quad (28)$$

となる。ここで、 $\tilde{\mathbf{M}}_U^e, \tilde{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{u}})_U^e, \mathbf{D}_U^e, \mathbf{G}_U^e$ は全体座標系で表わされた各要素の質量、移流、拡散、勾配項に関する係数マトリックスである。 $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{f}}$ は固体境界上節点のみ ξ_w 方向成分、 η_w 方向成分および ζ_w 方向成分に座標変換された、流速および外力ベクトル、 $\mathbf{p}$ は圧力の要素ベクトルである。

本研究では式(26), (27) を predictor-corrector 法¹³⁾ により時間積分を行った。以下にそのアルゴリズムを示す。

1) Predictor phase : $i=0$

$$\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(0)} = \bar{\mathbf{u}}_n + (1-\theta)\Delta t \bar{\dot{\mathbf{u}}}_n \quad (29.a)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0} \quad (29.b)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{p}_n \quad (29.c)$$

2) Solution phase : $i=1, 2$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{M}}_{UL} \Delta \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{M}}_U \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} - \hat{\mathbf{N}}_U(\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}) \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \\ \quad - \hat{\mathbf{D}}_U \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} + \hat{\mathbf{G}}_U \mathbf{p}_{n+1}^{(i)} \end{cases} \quad (30.a)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i-1)} + \theta \Delta t \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)} \quad (30.b)$$

$$\left\{ \hat{\mathbf{G}}_U^T (\mathbf{M}_{UL})^{-1} \hat{\mathbf{G}}_U \right\} \Delta \mathbf{P}^{(i)} = -\frac{1}{\theta \Delta t} \hat{\mathbf{G}}_U^T \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \quad (30.c)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} = \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)} + (\mathbf{M}_{UL})^{-1} \hat{\mathbf{G}}_U \Delta \mathbf{P}^{(i)} \quad (30.d)$$

3) Corrector phase : $i=1, 2$

$$\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i-1)} + \Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \quad (31.a)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i-1)} + \theta \Delta t \Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \quad (31.b)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{p}_{n+1}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{P}^{(i)} \quad (31.c)$$

圧力増分方程式 [式(30.c)] の解法にはCG法を用いている。ここで、式(30.c), (30.d) 中の $\mathbf{M}_{UL}$ は、局所座標変換を施した質量マトリックス $\hat{\mathbf{M}}$ からではなく、全体座標系によって表された質量マトリックス $\mathbf{M}$ から作られた集中質量マトリックスである。

3.4 壁面せん断応力の評価位置

2次元有限要素解析で壁関数を具体化した際、壁面せん断応力 τ_w を図-5に示すように固体境界に接する要素の辺上に分布する量として扱い、要素内の流速の補間に1次の補間関数を用いているため、壁面せん断応力 τ_w を固体境界の辺上で一定に分布すると仮定した。3次元有限要素解析において壁関数を具体化する際、この扱いを拡張し、壁面せん断応力 τ_w は固体境界上の要素面に分布する量として扱い、要素内の流速の補間に1次の補間関数を用いることから、要素面上に一定分布すると仮定する。

図-9に示すように、着目する面の壁面せん断応力 τ_w を算出するための参照流速 U_{ref} は面の中心で評価した。参照流速 U_{ref} は、着目する面を構成する4節点の節点流

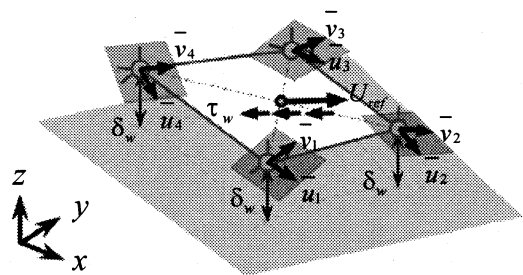


図-9 壁面せん断応力の評価位置

速の ξ_w 方向成分 $\bar{u}$ および η_w 方向成分 $\bar{v}$ を合成した上で、合成した流速を面内に投影し、内挿することで算出する。

面ごとに評価される壁面せん断応力 τ_w は、地表面粗度の影響が反映されるよう Launder ら⁴⁾ の2層モデルを拡張する形で、次式により評価した。

$$[z^+ < 11.63] \quad \tau_w = -\mu \frac{U_{ref}}{\delta_w} \quad (32.a)$$

$$[z^+ \geq 11.63] \quad \tau_w = -\frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} \hat{k}_{ref}^{1/2}}{\ln(\delta_w / z_0)} \cdot U_{ref} \quad (32.b)$$

$$\left(z^+ = \frac{C_\mu^{1/4} \hat{k}_{ref}^{1/2} \delta_w}{\nu}, C_\mu = 0.09, \kappa = 0.4187 \right)$$

ここで、 z_0 は粗度長である。 $z^+ < 11.63$ の場合は層流と判断して Newton の粘性法則を用い、 $z^+ \geq 11.63$ の場合は乱流と判断して、地表面粗度の影響が考慮された z_0 型対数則を用いて壁面せん断応力 τ_w を評価している。 $\hat{k}_{ref}$ は参照流速 U_{ref} の評価点での乱流エネルギーであり、着目する面を構成する4節点の乱流エネルギーの節点値を内挿して求められる。

運動方程式に対しては、式 (32.a) もしくは (32.b) で求められた壁面せん断応力 τ_w を式(22)に示すように自然境界条件に組み込み、式(12)右辺の境界積分の結果得られる壁面せん断応力 τ_w の等価節点力の ξ_w 方向成分および η_w 方向成分を境界条件として用いる。

また、石原らの解析⁷⁾で用いられているように、壁面せん断応力 τ_w が式 (32.a), (32.b) により評価できることから、その影響を乱流エネルギー k および散逸率 ε に反映させるため、固体境界上節点では K 方程式の生産項 P_k および消散項 $C_\mu e^k / \nu_t$ を、壁面せん断応力 τ_w を含む次式(33), (34) により算出された値に修正する。

$$P_k = \tau_w \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_w \frac{U_{ref}}{\delta_w} \quad (33)$$

$$\frac{C_\mu}{\nu_t} e^k = \frac{\varepsilon}{k} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{1/2}}{\kappa \delta_w} \quad (34)$$

散逸率 ε の固体境界上節点の節点値は、 E 方程式を解くことなく式(34)より直接求める。

4. 3次元孤立峰の解析

4.1 解析条件

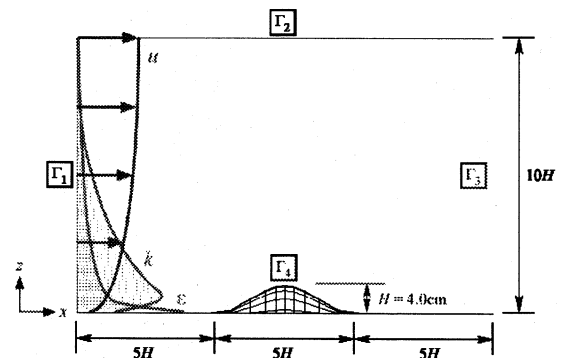
3章で示した手順に従い壁関数を具体化し、3次元孤立

峰周りの流れの解析を行い、孟らの実験¹⁰⁾ および石原らの解析結果⁷⁾ と比較した。

解析領域奥行き方向中心断面の断面図および境界条件を図-10に示す。孤立峰の形状は石原らと同様に余弦の2乗の形状とした。孤立峰高さは $H=4.0\text{cm}$ 、解析領域サイズは幅 $15H$ 、奥行き $15H$ 、高さ $10H$ とした。なお、石原らの解析領域サイズは幅 $60H$ 、奥行き $20H$ 、高さ $22.5H$ であり、本研究の解析領域サイズは、石原らの解析領域より小さい。

境界条件は、流入境界で水平方向流速 u および乱流エネルギー k に孟らの実験値を用い、エネルギー散逸率 ε は図-10中に示した式を用いて、乱流エネルギー k および高さ z の関数で与えた。なお、流入条件は奥行き方向には一様に与えた。上方および側方境界はスリップ条件を与え、流出境界はトラクション・フリーとした。領域下面は地表面境界として設定し、その境界条件には、3章で記した手法に基づく壁関数を用いた。壁関数でモデル化する領域の厚さを $\delta_w = 0.025H$ として、それより上方をメッシュ分割した。粗度長は石原らの解析に合わせ、 $z_0 = 0.0075H$ とした。

図-11に解析メッシュの全体図を、図-12に奥行き方向 (y 方向) 中心断面のメッシュ分割図を示す。メッシュ分割数は x, y, z 方向の順に $16 \times 16 \times 16$ 分割した。節点数は4913、要素数は4096である。最小要素サイズは山の頂上において、 $5H/16 \times 5H/16 \times 9H/100$ (x, y, z 方向の順) とした。なお、石原らの解析は、メッシュ分割数が $70 \times 34 \times 31$ 、節点数79520、要素数73780であり、最小要素サイズは、 $5H/32 \times 5H/32 \times H/20$ である。



Γ_1 : u, k = 実験値 ⁹⁾ $\varepsilon = C_\mu^{1/4} k^{3/2} / l, l = \kappa z$
Γ_2 : スリップ条件
Γ_3 : トラクション・フリー
Γ_4 : 壁関数 ($\delta_w = 2.5 \times 10^{-2} H, z_0 = 7.5 \times 10^{-3} H$)

図-10 解析領域奥行き方向中心断面の断面図および境界条件

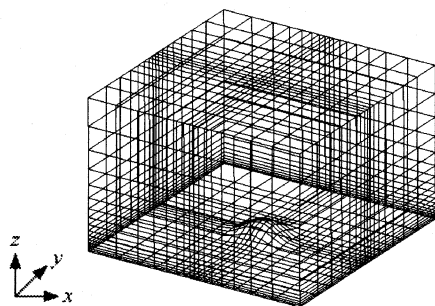


図-11 解析メッシュ全体図

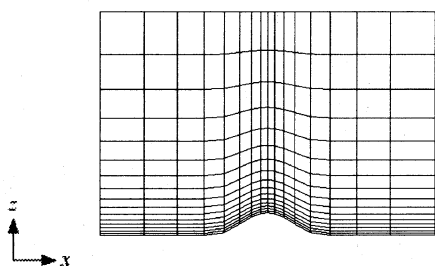
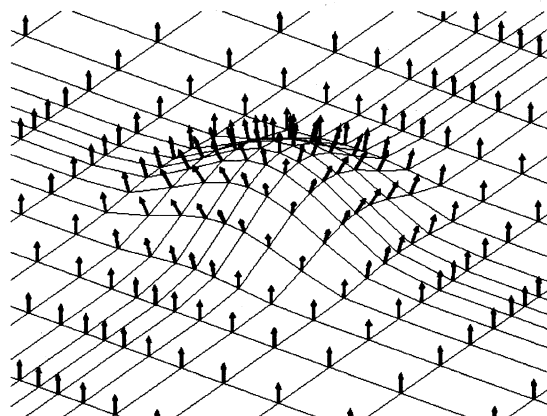
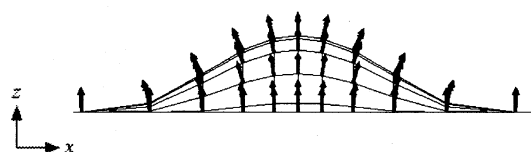


図-12 奥行き方向中心断面のメッシュ図



(a) 鳥瞰図



(b) xz 面

図-13 固体境界上節点における接平面の法線ベクトル

4.2 固体境界上節点の接平面の法線ベクトルおよび節点流速ベクトルの方向

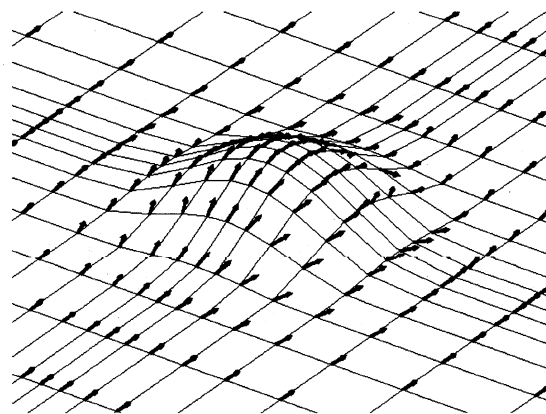
3.2 節で述べたように、壁関数を具体化するにあたり固体境界上節点において局所的な接平面を定義し、節点流速の自由度成分を接平面内に2成分 ($\bar{u}, \bar{v}$)、接平面の法線方向に1成分 ($\bar{w}$) という扱いとした。ただし、地表面全体に渡って法線方向成分 $\bar{w} = 0$ とする。図-13(a), (b) は固体境界上節点の接平面の法線ベクトルである。(a) は鳥瞰図, (b) は y 軸方向から見た図である。山の尾根線に沿って法線ベクトルの傾きが変化しており、節点ごとに接平面の傾きが変化していることが確認できる。

図-14 (a), (b) は固体境界上節点の節点流速の単位ベクトル図である。(a) は鳥瞰図, (b) は y 軸方向から見た図である。節点流速の接平面法線方向 ($\bar{w}$ 方向) 成分 $\bar{w}$ をゼロとすることにより、流速ベクトルは山の形状に沿う方向を向いていることがわかる。

以上の結果から、3.2 節で述べた固体境界上節点の節点流速の自由度の扱いが達成できていることが確認された。

4.3 解析結果

図-15 (a)-(f) に定常状態における y 軸方向中央の xz 面内諸量の分布図を示す。山の頂上付近で流れが収束し、その周辺で乱流エネルギー k および散逸率 ε が最大となっている。圧力は山の頂上付近で負圧が最も最大となっている。

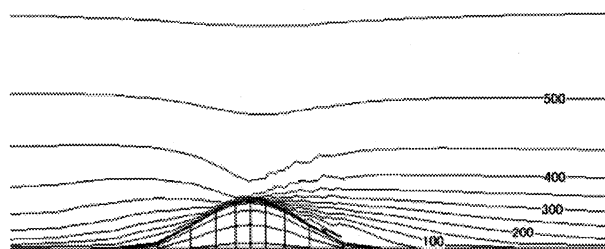


(a) 鳥瞰図

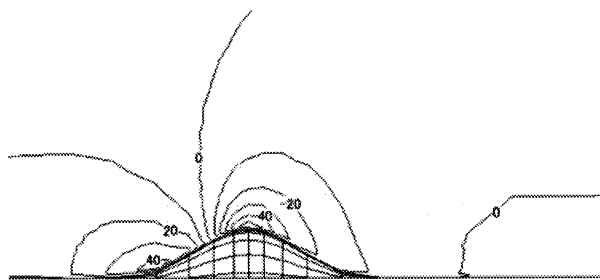


(b) xz 面

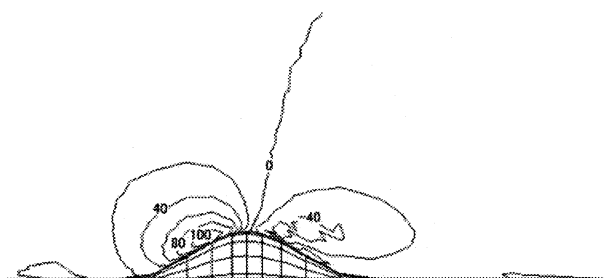
図-14 固体境界上節点の節点流速の単位ベクトル



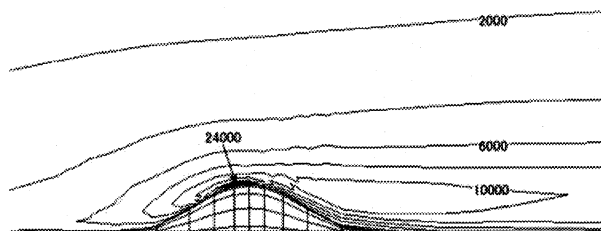
(a) u 分布 [コンター間隔 50cm/s]



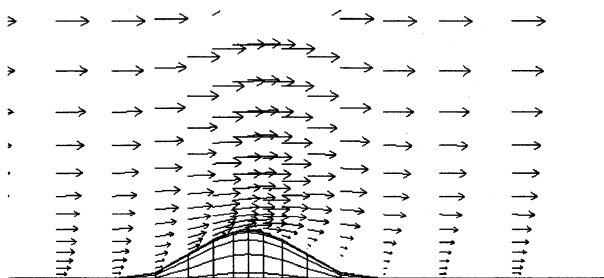
(d) p 分布 [コンター間隔 10g/cm/s²]



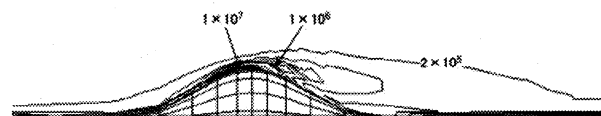
(b) w 分布 [コンター間隔 20cm/s]



(e) 乱流エネルギー [コンター間隔 2000cm²/s²]



(c) 流速ベクトル



(f) エネルギー散逸率 [コンター間隔 $2 \times 10^5 \sim 1 \times 10^6: 2 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}^3, 1 \times 10^6 \sim 2 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{s}^3$]

図-15 定常状態の y 軸方向中央の xz 面内諸量の分布図

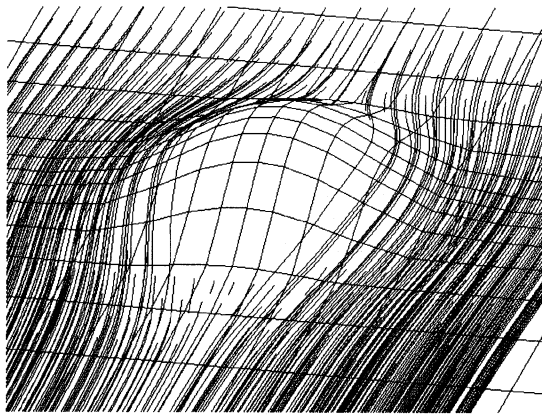
図-16(a), (b) はそれぞれ、無次元高さ $z/H=0.125$ および 1.0 の高さの流線図である。山の頂上を越えた流れは剥離することなく、山の斜面に沿って下流側へと流れている。石原らの解析結果では、山の頂上を越えると剥離流が生じ、山の側方を回り込む流れが風下側斜面に生じた上昇流によって持ち上げられ、下流方向へ流れる、という流れの構造になっている。

この解析結果の定性的な差異の要因を検討するため、山の頂上を通る鉛直軸に沿った、流速の水平成分 u 、鉛直成分 w および乱流エネルギー k のプロファイルを、

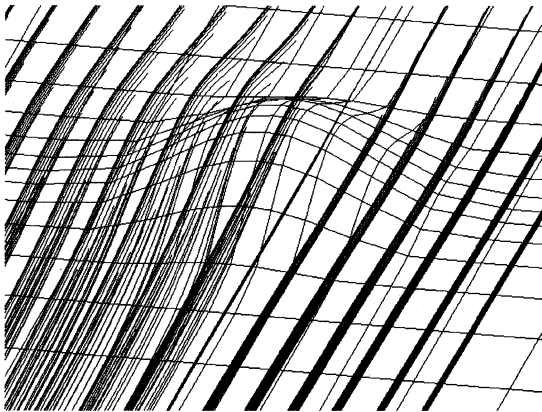
孟らの実験値および本研究と同様に標準 $k-\epsilon$ モデルを用いた石原らの解析結果と比較する。図-17 (a), (b), (c) にそれぞれの比較結果を示す。

流速の水平方向成分 u は、実験値、解析値と比べ、若干過大に評価しているものの、定性的に一致した分布が得られた。定量的な差は石原らの解析に比べ解析領域の高さが低いためと考えられる。

流速の鉛直方向成分 w は、実験値と比べ過小評価となっている。これは u と同様、解析領域高さに起因すると考えられ、解析領域の天井部が若干低いことから、全



(a) $z/H=0.125$



(b) $z/H=1.0$

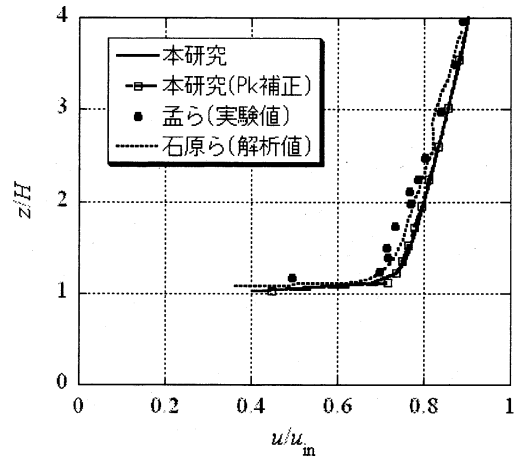
図-16 孤立峰周辺の流線図

体的に鉛直方向の流れが抑えられたためと思われる。

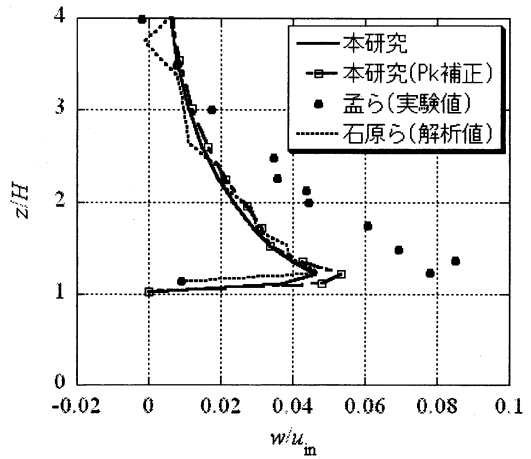
乱流エネルギー k は、固体境界近傍で実験値および解析値と比べ3倍程度過大に評価されており、顕著な差が見られる。バックステップ流れの解析例などからも、乱流エネルギーの過大評価は逆流域の予測精度を低下させることが知られており¹⁷⁾、これが山の風下側斜面の流れの構造の定性的な差につながっていると考えられる。

石原らは壁関数を用いる際、3.4節で示した壁面せん断応力 τ_w を用いて k 方程式の生産項 P_k を評価する扱いを取った場合、壁面せん断応力 τ_w が大きくなる場所で、生産項 P_k を過大に評価する傾向があると述べている。さらに石原らはそれを回避するために、 $\partial k / \partial n \geq 0$ という境界条件が満たされるまで、 k 方程式の生産項 P_k の値を小さく修正するアルゴリズムを導入している⁷⁾。そこで本研究においてもこの方法を参考にして、 K 方程式において、固体境界上要素の生産項 P_k を、固体境界上の要素内で $\partial k / \partial n \geq 0$ という条件が満たされるまで毎ステップ半減させる方法を試みた。

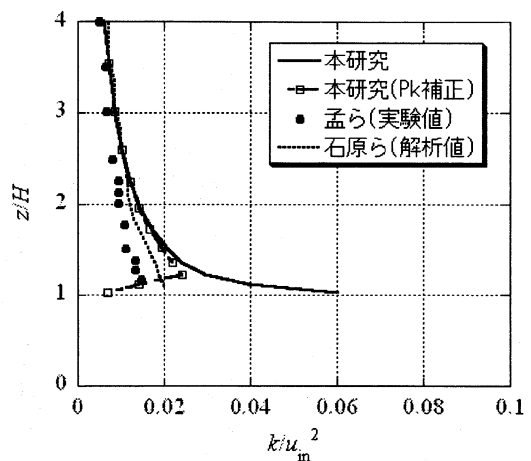
図-18 にこの修正方法を用いた場合の流線図を示す。山の頂上での流れの剥離と風下側斜面での上昇流が見られ、石原らの結果に定性的に一致する結果が得られた。



(a) u 分布

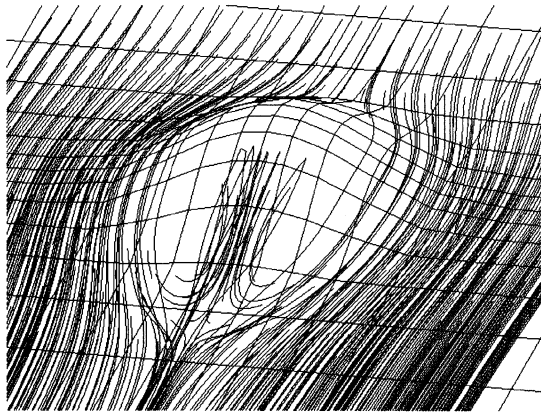


(b) w 分布

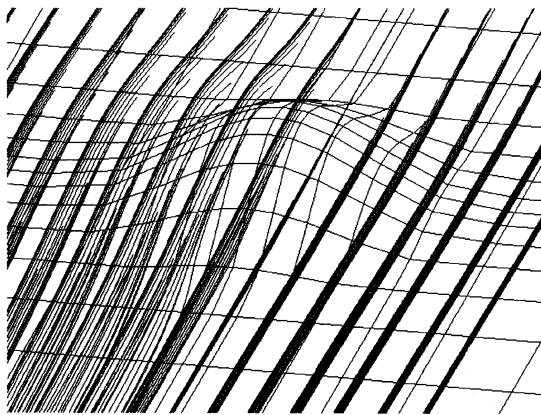


(c) k 分布

図-17 山の頂上を通る鉛直軸に沿った分布



(a) $z/H = 0.125$



(b) $z/H = 1.0$

図一18 生産項 P_k を修正した場合の流線図

図一17の四角付き一点破線は、この修正方法を用いた場合の結果である。固体境界近傍の乱流エネルギー k の過大評価が抑えられ、石原らの解析結果にほぼ一致する結果が得られた。

5. 結論

本研究では有限要素法による3次元乱流解析において、壁関数を運動方程式の自然境界条件として具体化する方法を示した。この方法は、実地形のような曲面状の固体境界を有する解析対象に対し壁関数を適用する際に、固体境界上節点において節点ごとに接平面を定義した上で、節点流速を接平面内の2成分および接平面法線方向の1成分として扱うものである。接平面の方向の決定方法と、この境界条件を有限要素方程式に具体化する過程の両方に、独自の方法を構築した。

本手法を、3次元孤立峰周りの流れの問題に適用した。

節点流速の自由度については、接平面の法線ベクトルは山の形状に合わせて傾きが変化したこと、節点流速は山の斜面に沿う方向を向いたことから、本研究で試みた節点流速の自由度の扱いが達成できたことが確認できた。

孟らの実験値と比較した結果、山の風下側の流れの構造に違いが見られた。山の頂上の固体境界近傍で乱流エネルギーが過大に評価されている。しかし、石原らの解析を参考にして、 K 方程式の生産項 P_k を小さく修正した結果、山の風下側の流れの構造が改善され、石原らの解析結果と定性的に一致する結果が得られた。本研究では標準 $k-\epsilon$ モデルを用いたことから、実験値との定量的な差は若干生じているものの、石原らの標準 $k-\epsilon$ モデルを用いた解析においても実験値との差は生じていることから、有限要素法による壁関数の具体化という課題に関しては目的を達成できたものと考ええる。

石原らが Shih の非線形 $k-\epsilon$ モデル¹⁸⁾ を用いて解析精度の向上を図っていることから⁷⁾、乱流モデルの影響を検討することが今後の課題と言える。

参考文献

- 1) 石原孟, 山口敦, 藤野陽三: 複雑地形における局所風況の数値予測と大型風洞実験による検証, 土木学会論文集, No.731/I-63, pp.195-211, 2003
- 2) 山口敦, 石原孟, 藤野陽三: 力学統計的局所化による新しい風況予測手法の提案と実測による検証, 土木学会論文集A, No.62 N0.1, pp.110-125, 2006
- 3) 内田孝紀, 大屋裕二, 友清衣利子, 前田潤滋: 地形性強風の数値予測と格子解像度の影響, 応用力学論文集, Vol.9, pp.795-802, 2006
- 4) B.E. Launder and D.B. Spalding: The numerical computation of turbulent flows, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol.3, pp.269-289, 1974
- 5) 服部博文, 上野真, 長野靖尚: LRN型2方程式乱流モデルによる3次元メソスケール複雑乱流場の予測, 第20回数値流体力学シンポジウム講演要旨集, p34, 2006
- 6) 平岡久司, 丸山敬, 中村泰人, 桂順治: 植物群落内および都市キャノピー内の乱流モデルに関する研究(その1) 乱流モデルの作成, 日本建築学会計画系論文報告集, 第406号, pp.1-9, 1989
- 7) 石原孟, 日比一喜: 急峻な山を越える乱流場の数値予測, 日本風工学会誌, 第83号, pp.175-188, 2000
- 8) Mohammadi, B. and Pironneau, O.: Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model (Research in Applied Mathematics), John Wiley & Sons Ltd, 1994
- 9) 長谷部寛, 野村卓史: 有限要素解析における物体の角への壁関数適用方法の検討, 応用力学論文集, Vol.9, pp.811-820, 2006
- 10) 孟岩, 日比一喜: 急峻な山を越える乱流境界層に関する実験的研究, 第15回風工学シンポジウム論文集, pp.61-66, 1998

- 11) Ilinca, F. and Pelletier, D. : Positivity Preservation and Adaptive Solution for the k- ϵ Model of Turbulence, AIAA J., Vol36 (1), pp.44-50, 1998
- 12) 長谷部寛, 野村卓史: k- ϵ モデルにおけるLogarithmic formの有効性の検討と非定常流れへの適用, 構造工学論文集, Vol.51A, pp.921-932, 2005
- 13) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R.: Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.32, pp.199 - 259, 1982
- 14) 木田重雄, 柳瀬眞一郎: 乱流力学, 朝倉書店, 1999
- 15) 加藤真志: 修正2方程式乱流モデルによる角柱の基本空力特性に関する研究, 名古屋大学学位論文, 1997
- 16) 長谷部寛, 野村卓史: 壁関数の参照流速の方向を考慮した孤立峰周りの流れの有限要素解析, 計算工学講演会論文集, Vol.13, pp749-752, 2008
- 17) 長野靖尚, 森西洋平, 笠木伸英: バックステップ流れの数値解析とその検証, 流れ解析プログラム検証研究分科会 (RC104) 成果報告書, 日本機械学会, pp.239-255, 1994
- 18) Shih, T. H., Zhu, J. and Lumley, J. L.: A new Reynolds stress algebraic equation model, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.125, pp.287 - 302, 1995

(2008 年 4 月 14 日 受付)