応用力学論文集 Vol.11, pp.67-78　(2008 年 8 月)　土木学会

圧縮粘性流れにおける形状決定に関する検討

Shape Determination of a Body in Compressible Viscous Flows

中島修治*・川原睦人**
Shuji Nakajima and Mutsuto Kawahara

*学生会員　工修　中央大学大学院博士課程　理工学研究科土木工学専攻 (〒 112-8551 東京都文京区春日一丁目 13-27)
**正会員　工博　中央大学教授　理工学部　土木工学科 (〒 112-8551 東京都文京区春日一丁目 13-27)

The purpose of this paper is to determine a shape of a body which minimizes fluid force on a surface of a two dimensional elliptical cylinder and a three dimensional disk located in the compressible viscous flow expressed by the Navier-Stokes equations. The formulation to pursue an optimal shape is based on the optimal control theory. The optimal state is defined that a performance function, which consists of integration of a square sum of fluid forces, is minimized. The compressible Navier-Stokes equations are treated as constrained equations. A gradient of the performance function is computed by adjoint variables. The weighted gradient method is used as a minimization algorithm. A volume of the body is assumed to be constant. For the discretization of basic and adjoint equations, the mixed interpolation method based on the bubble function interpolation presented previously by the authors is employed. The structured mesh around the surface is introduced and smoothing is employed for the gradient. As numerical studies, a shape optimization of an elliptical cylinder in a uniform flow field is carried out. As an initial shape, the body is assumed as an ellipse. The shape is updated minimizing the fluid forces on the surface. The stable optimal shape determination of a body in the compressible flows is obtained by the presented method. Finally, several three dimensional disks based on the final shape obtained in two dimension are calculated in the compressible viscous flows.

Key Words : *shape optimization, compressible Navier-Stokes equations, three dimensional analysis, adjoint equation method, weighted gradient method, finite element method, bubble function interpolation*

1. 序論

最適制御問題の主要な問題の一つに形状決定問題がある．形状決定の問題は，圧縮性流れと非圧縮性流れを問わず，多くの研究がなされた．Hicks は，圧縮非粘性流れの亜音速翼型に対して形状決定を行なった[4]．非圧縮流れにおける形状決定では，Stokes 流れ[16),17),14]，Oseen 流れ[15]，高 Reynolds 数流れ[2),3),7),21),10]における形状決定が行われた．一般的に，非圧縮流れは密度と温度が一定であり，エネルギー方程式を解く必要性がないため，形状決定によく扱われる．圧縮性流れでは，多くの研究者が有限体積法を用いて，翼型及び翼の形状決定を研究してきた．Shenoy は，2 次元定常 Euler 方程式によって定義される関数によって，翼型設計問題を行なった[18]．Mohammadi は，k-ε 乱流モデルを基礎方程式に使った自動微分による形状の決定を行なった[12]．圧縮非粘性流れ及び粘性流れにおいて，Jameson は翼型の形状決定を実施した[5]．三次元解析では，空力性能を最大化する翼の設計が行なわれた[8),6]．これらは等角写像の有限体積法に基づいて，実問題を対象に行なわれた．また，実験で得られた形状や実際の翼等が初期形状に使われた．Melvin は空力的な形状決定を用いて，レーシングカーの解析を行なった[11]．これらの研究は，初期形状よりも目的とする性能の高い形状が得られた．しかしながら，形状が最適解かどうかの問題は，未だに研究段階である．圧縮非粘性流れにおいて，楕円から平板のような理論的な最適形状を得る形状決定問題では，数値解析によって平板が得られ，有限要素分割の依存性が確認された[24]．

本研究では，二次元圧縮粘性流れに置かれた物体の形状決定を行なう．また，導出された最終形状から三次元物体を作成し，二次元領域において導出された最終形状を三次元領域で検討する．2 次元圧縮非粘性流れにおいて，物体面積一定の条件の下では，平板が最適な形状となるはずである．しかし，粘性流れにおいては，最終形状として平板とは異なった形状が導出されるはずである．本研究では，非粘性流れ同様に粘性流れでも最適形状が得られるかどうかを確認する．

最適制御理論により，拡張評価関数に基づいた勾配による形状決定は行なわれる．本研究では，流体力減少問題を解くことを目的とし，流体力を直接的に用いた評価関数を最小とするものを最適な状態として定義する．物体表面おける流体力の二乗和の積分により評価関数が構成される．圧縮性 Navier-Stokes 方程式による基礎方程式を評価関数の拘束条件とし，評価関数を最小とするとき，形状が最適化される．重み付き勾

配法を用いた最小化手法において，随伴方程式により計算される評価関数の勾配は物体座標の更新に使われる．物体の面積は初期形状の面積と同等になるように保たれる．

基礎方程式及び随伴方程式の離散化には，安定化気泡関数を用いた混合補間により行なう[13]．この方法は気泡関数の節点値の保存を不要とし，効率的かつ安定な解析を可能とするため，制御問題及び三次元解析に有用である．本手法の安定性に関しては，以前の研究において，圧縮非粘性及び粘性流れともに，数値的安定性を確認しており[23]，形状決定問題に本手法は適切である．

評価関数に基づいた物体の表面座標に関する勾配によって形状更新が進むため，本研究のアルゴリズムにおいて重要な過程は，勾配の計算である．計算された勾配は，メッシュの不規則性，特に物体表面に隣接するメッシュに依存するため，物体周りの構造メッシュはスムーズな勾配を得るために必要とされる．さらに，物体形状を更新する度に物体表面の節点間隔は部分的に狭くなる．メッシュの不規則性及び狭いメッシュ間隔を避け，物体表面座標に対する安定な勾配を得るために，リメッシング法及びスムージング法の両方を導入する．リメッシング法は，物体の表面における節点を等間隔に設定し，物体周りに構造メッシュを作成し，その周囲に Delaunay 三角形分割法が適用される[14]．スムージング法には，八木らの用いたスムージング法が導入される[22]．

数値解析例として，圧縮粘性流れの一様流中に置かれた物体の形状決定問題を実施する．初期形状には，楕円を用いる．解析結果として，評価関数を減少させる形状に更新され，流体力を減少させた最終形状が得られる．また，得られた形状を三次元形状に拡張させて順解析を行ない，２次元領域において導出された最終形状を３次元領域で検討する．これにより，本手法による圧縮粘性流れにおける物体の流体力減少問題が安定に解かれたことが示される．

2.　最適制御理論

2.1　圧縮粘性流れ

圧縮粘性流れの基礎方程式として，保存変数による無次元化した３次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いる．

$$\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{F}^a_{j,j} - \boldsymbol{F}^d_{j,j} = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho e \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho \\ m_i \\ \rho e \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F}^a_j = \begin{bmatrix} \rho u_j \\ u_j \rho u_i + \delta_{ij} p \\ u_j(\rho e + p) \end{bmatrix}, \boldsymbol{F}^d_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ij} \\ u_j \tau_{ij} - q_j \end{bmatrix} \tag{3}$$

Ω は計算領域であり，圧縮粘性流体によって満たされている．ここで，ρ，u_j，e は，それぞれ密度，流速，エネルギー密度である．p，q_j，δ_{ij} は圧力，熱流束，クロネッカのデルタ記号を表し，$\dot{\boldsymbol{U}}$ は時間 t に関する微分を意味する．全エネルギー密度 e は内部エネルギー密度 ε と運動エネルギー密度の和により，

$$e = \varepsilon + \frac{u_i u_i}{2} \tag{4}$$

で表される．本研究では，理想気体を仮定し，状態方程式を以下のように表す．

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \tag{5}$$

γ は比熱比である．また，次の関係式を用いる．

$$\tau_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda^* u_{k,k}\delta_{ij}, \tag{6}$$

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu, \tag{7}$$

$$\varepsilon = c_v \theta, \tag{8}$$

$$q_j = -\frac{\gamma\mu}{Pr}\varepsilon_{,j}, \tag{9}$$

$$c_v = [\gamma(\gamma - 1)M^2_\infty]^{-1}, \tag{10}$$

$$\mu = \frac{\acute{\mu}}{Re} \tag{11}$$

ここで，c_v，θ，$\acute{\mu}$，Re，Pr，M_∞ はそれぞれ，定積比熱，温度，粘性係数，レイノルズ数，プラントル数，基準マッハ数を表す．粘性係数と温度の関係式は，Sutherland の公式を用いて，

$$\acute{\mu} = \theta^{\frac{3}{2}} \frac{\theta_\infty + C}{\theta_\infty \theta + C}, \tag{12}$$

$$C = 110 \tag{13}$$

とし，θ_∞ は基準温度 $[^\circ K]$ を示す．圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (1) は，次式で書き表される．

$$\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{U}_{,j} - (\boldsymbol{K}_{ji}\boldsymbol{U}_{,i})_{,j} = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{A}_j = \frac{\partial \boldsymbol{F}^a_j}{\partial U}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{K}_{ji}\boldsymbol{U}_{,i} = \boldsymbol{F}^d_j \tag{16}$$

ここで，$\boldsymbol{A}_j$ 及び $\boldsymbol{K}_{ji}$ は，ヤコビ行列である．

境界 Γ_B をもつ物体が外部流れの中に置かれる代表的な問題を**図−1**に示す．初期条件として，一様流を与える．

$$\boldsymbol{U} = \hat{\boldsymbol{U}}(x_i, 0), \ \text{in } \Omega \tag{17}$$

ここで，$\hat{}$ は既知量を示す．境界 Γ_S，Γ_O，Γ_B は，以下のように定義する．

$$\begin{aligned} u_t &= \hat{u}_t, \ \text{on } \Gamma_\mathrm{I} \times \boldsymbol{I}, \\ (\tau_{1j}, u_2, q_n) &= (0,0,0) \ \text{on } \Gamma_\mathrm{S} \times \boldsymbol{I}, \\ (p_0, \tau_{1j}, q_n) &= (\hat{p}_0, 0, 0) \ \text{on } \Gamma_\mathrm{O} \times \boldsymbol{I}, \\ (u_i, q_n) &= (0,0) \ \text{on } \Gamma_\mathrm{B} \times \boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{18}$$

ここで，q_n と p_0 は，法線方向の熱流束と静圧であり，$\boldsymbol{I}$ は最適形状問題における解析時間域を示す．本研究では，流入境界をリーマンの不変量及び等エントロピー条件により，以下のように定義する．

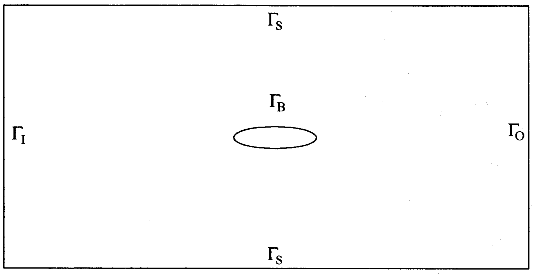
$$u_t = \hat{u}_t, \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{I}}, \tag{19}$$

$$R_\infty = u_n - \frac{2c}{\gamma - 1}, \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{I}}, \tag{20}$$

$$c^2 = \gamma(\gamma - 1)(e - \frac{1}{2}u_i u_i), \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{I}}, \tag{21}$$

$$S = \ln(\mathrm{p}\rho^{-\gamma}), \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{I}} \tag{22}$$

ここで，u_t 及び u_n, c, R_∞，S は，それぞれ，接線方向及び法線方向の速度，音速，リーマン不変量，エントロピーである．



図–1 解析領域及び境界条件 Γ_I，Γ_S，Γ_O，Γ_B

2.2 評価関数

流体力減少問題として，評価関数 J に物体表面の流体力が直接に用いられ，評価関数 J を最小とする物体形状の座標を求める．

$$J = \frac{1}{2}\int_I (F_i - \bar{F}_i)Q_{ij}(F_j - \bar{F}_j)dt, \tag{23}$$

$$F_i = -\int_{\Gamma_B} t_i d\Gamma, \tag{24}$$

$$t_i = (\tau_{ij} - p\delta_{ij})n_j \tag{25}$$

ここで，F_i は流体力, $\bar{F}_i$ は目的の流体力であり，通常ゼロにする．Q_{ij} は重み定数のマトリックスであり，t_i は物体にかかる応力である．拘束条件の圧縮性 Navier-Stokes 方程式に随伴変数を乗じて，評価関数に加算することにより，拡張評価関数 J^* が得られる．

$$J^* = \frac{1}{2}\int_I (F_i - \bar{F}_i)Q_{ij}(F_j - \bar{F}_j)dt + \int_I\int_\Omega \boldsymbol{\Lambda}^T \cdot \{\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{A}_j\boldsymbol{U}_{,j} - (\boldsymbol{K}_{ji}\boldsymbol{U}_{,i})_{,j}\}d\Omega dt \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta_i \\ \zeta \end{bmatrix} \tag{27}$$

ここで，ξ 及び η_i，ζ は随伴変数である．

2.3 随伴方程式

本来の評価関数 J の代わりに拡張評価関数 J^* の停留条件を解くことにより，基礎方程式 (14) を拘束条件とする形状決定問題は解かれる．最適化における必要条件は拡張評価関数 J^* の第一変分により得られる．

$$\delta J^* = 0 \tag{28}$$

拡張評価関数 J^* の第一変分は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\delta J^* = &\int_I\int_\Omega \delta\boldsymbol{U} \cdot \{-\dot{\boldsymbol{\Lambda}} - (\bar{\boldsymbol{A}}_j\boldsymbol{\Lambda})_{,j} + \bar{\boldsymbol{A}}_{j,j}\boldsymbol{\Lambda} \\
&- (\bar{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{1}}{}_{ji}\boldsymbol{\Lambda}_{,i})_{,j} + \bar{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{1}}{}_{ji,j}\boldsymbol{\Lambda}_{,i} - \bar{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{2}}{}_{ji,j}\boldsymbol{\Lambda}_{,i}\}d\Omega dt \\
&+ \int_I\int_\Gamma \bar{\xi}\delta\rho d\Gamma dt + \int_I\int_{\Gamma_S} \bar{\eta}_1\delta m_1 d\Gamma dt \\
&+ \int_I\int_{\Gamma_O+\Gamma_B} \bar{\eta}_i\delta m_i d\Gamma dt + \int_I\int_{\Gamma_S+\Gamma_O} \bar{\zeta}\delta(\rho e)d\Gamma dt \\
&+ \int_I\int_{\Gamma_B} \zeta_{,j}\delta q n_j d\Gamma dt \\
&- \int_I\int_{\Gamma_I} \eta_i\delta\tau_{ij}n_j d\Gamma dt - \int_I\int_{\Gamma_S} \eta_2\delta\tau_{2j}n_j d\Gamma dt \\
&- \int_I\int_{\Gamma_I} \zeta\delta q_j n_j d\Gamma dt - \int_I\int_{\Gamma_I} \zeta u_i\delta\tau_{ij}n_j d\Gamma dt \\
&+ \int_I\int_{\Gamma_B} \{-\eta_i - (F_j - \bar{F}_j)Q_{ij}\}\delta t_i d\Gamma dt \\
&+ \int_\Omega \boldsymbol{\Lambda}(x_i, t_f) \cdot \delta\boldsymbol{U}(x_i, t_f)^T d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{29}$$

ここで,

$$\bar{\boldsymbol{A}}_j = \begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{2}\delta_{j1}\bar{\gamma}u^2 - u_j u_1 & \frac{1}{2}\delta_{j2}\bar{\gamma}u^2 - u_j u_2 & (\bar{\gamma}u^2 - \gamma e)u_j \\
\delta_{j1} & \delta_{j1}u_1 - \delta_{j1}\bar{\gamma}u_1 + u_j & \delta_{j1}u_2 - \delta_{j2}\bar{\gamma}u_1 & \delta_{j1}\bar{\varepsilon} - \bar{\gamma}u_j u_1 \\
\delta_{j2} & \delta_{j2}u_1 - \delta_{j1}\bar{\gamma}u_2 & \delta_{j2}u_2 - \delta_{j2}\bar{\gamma}u_2 + u_j & \delta_{j2}\bar{\varepsilon} - \bar{\gamma}u_j u_2 \\
0 & \delta_{j1}\bar{\gamma} & \delta_{j2}\bar{\gamma} & \bar{\gamma}u_j
\end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$\bar{\gamma} = \gamma - 1, \quad u^2 = u_i u_i, \quad \bar{\varepsilon} = \gamma e - \bar{\gamma}\frac{u_i u_i}{2}, \tag{31}$$

$$\bar{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{1}}{}_{ji} = \begin{bmatrix}
0 & -\{\mu(\frac{m_1}{\rho^2}\delta_{ji} + \frac{m_i}{\rho^2}\delta_{1j}) + \lambda^*\frac{m_j}{\rho^2}\delta_{1i}\} & -\{\mu(\frac{m_2}{\rho^2}\delta_{ji} + \frac{m_i}{\rho^2}\delta_{2j}) + \lambda^*\frac{m_j}{\rho^2}\delta_{2i}\} & (\bar{K}^1_{ji})_{14} \\
0 & \frac{\mu}{\rho}(\delta_{ji} + \delta_{1j}\delta_{1i}) + \frac{\lambda^*}{\rho}\delta_{1j}\delta_{1i} & \frac{\mu}{\rho}\delta_{2j}\delta_{1i} + \frac{\lambda^*}{\rho}\delta_{1j}\delta_{2i} & (\bar{K}^1_{ji})_{24} \\
0 & \frac{\mu}{\rho}\delta_{1j}\delta_{2i} + \frac{\lambda^*}{\rho}\delta_{2j}\delta_{1i} & \frac{\mu}{\rho}(\delta_{ji} + \delta_{2j}\delta_{2i}) + \frac{\lambda^*}{\rho}\delta_{2j}\delta_{2i} & (\bar{K}^1_{ji})_{34} \\
0 & 0 & 0 & (\bar{K}^1_{ji})_{44}
\end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{K}^1_{ji})_{14} &= -\{\mu\frac{m_k m_k}{\rho^3}\delta_{ji} + \frac{m_j m_i}{\rho^3}(\mu+\lambda^*) \\
&\quad + \frac{\gamma\mu}{Pr}(\frac{e}{\rho} - \frac{1}{\rho^3}m_k m_k \delta_{ji})\}, \\
(\bar{K}^1_{ji})_{24} &= \mu\frac{m_1}{\rho^2}\delta_{ji} + \mu\frac{m_j}{\rho^2}\delta_{1i} + \lambda^*\frac{m_k}{\rho^2}\delta_{1j}\delta_{ki} - \frac{\gamma\mu}{Pr}\frac{m_1}{\rho^2}\delta_{ji}, \\
(\bar{K}^1_{ji})_{34} &= \mu\frac{m_2}{\rho^2}\delta_{ji} + \mu\frac{m_j}{\rho^2}\delta_{2i} + \lambda^*\frac{m_k}{\rho^2}\delta_{2j}\delta_{ki} - \frac{\gamma\mu}{Pr}\frac{m_2}{\rho^2}\delta_{ji}, \\
(\bar{K}^1_{ji})_{44} &= \frac{\gamma\mu}{Pr}\frac{1}{\rho}\delta_{ji},
\end{aligned}
$$

$$
\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathbf{2}}{}_{11} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & (\mu-\lambda^*)\frac{m_l}{\rho^2}\{(\frac{m_1}{\rho})_{,l} - (\frac{m_k}{\rho})_{,k}\delta_{l1}\} \\
0 & 0 & 0 & -(\mu-\lambda^*)\frac{1}{\rho}\{(\frac{m_1}{\rho})_{,1} - (\frac{m_k}{\rho})_{,k}\} \\
0 & 0 & 0 & -(\mu-\lambda^*)\frac{1}{\rho}(\frac{m_1}{\rho})_{,2} \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}, \quad (33)
$$

$$
\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathbf{2}}{}_{12} = \bar{\boldsymbol{K}}^{\mathbf{2}}{}_{21} = 0, \quad (34)
$$

$$
\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathbf{2}}{}_{22} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & (\mu-\lambda^*)\frac{m_l}{\rho^2}\{(\frac{m_2}{\rho})_{,l} - (\frac{m_k}{\rho})_{,k}\delta_{l2}\} \\
0 & 0 & 0 & -(\mu-\lambda^*)\frac{1}{\rho}(\frac{m_2}{\rho})_{,1} \\
0 & 0 & 0 & -(\mu-\lambda^*)\frac{1}{\rho}\{(\frac{m_2}{\rho})_{,2} - (\frac{m_k}{\rho})_{,k}\} \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}, \quad (35)
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\xi} &= \{-u_i u_j + \frac{1}{2}\bar{\gamma}u_k u_k \delta_{ij})\eta_i + (\bar{\gamma}u_k u_k - \gamma e)u_j\zeta\}n_j \\
&\quad - \{\mu(\eta_{i,j} + \eta_{j,i}) + \lambda^*\eta_{k,k}\delta_{ij} + \mu(\frac{m_i}{\rho}\zeta_{,j} + \frac{m_j}{\rho}\zeta_{,i}) \\
&\quad + \lambda^*\frac{m_k}{\rho}\zeta_{,k}\delta_{ij}\}\frac{m_i}{\rho^2}n_j, \quad (36) \\
\bar{\eta}_i &= \{\xi\delta_{ij} + (u_k\delta_{ij} - \bar{\gamma}u_i\delta_{kj})\eta_k + \eta_i u_j \\
&\quad + (\bar{\varepsilon}\delta_{ij} - \bar{\gamma}u_i u_j)\zeta\}n_j + \{\mu(\eta_{i,j} + \eta_{j,i}) + \lambda^*\eta_{k,k}\delta_{ij} \\
&\quad + \mu(\frac{m_i}{\rho}\zeta_{,j} + \frac{m_j}{\rho}\zeta_{,i}) + \lambda^*\frac{m_k}{\rho}\zeta_{,k}\delta_{ij}\}\frac{1}{\rho}n_j, \quad (37) \\
\bar{\zeta} &= (\bar{\gamma}\delta_{ij}\eta_i + \gamma\zeta u_j)n_j \quad (38)
\end{aligned}
$$

最適化の条件を満たすために各項をゼロとすることにより，次の随伴方程式及び随伴変数に対する境界条件，終端条件が得られる．

$$
\begin{aligned}
&-\dot{\boldsymbol{\Lambda}} - (\bar{\boldsymbol{A}}_j\boldsymbol{\Lambda})_{,j} + \bar{\boldsymbol{A}}_{j,j}\boldsymbol{\Lambda} - (\bar{\boldsymbol{K}}^{\mathbf{1}}{}_{ji}\boldsymbol{\Lambda}_{,i})_{,j} \\
&\quad + \bar{\boldsymbol{K}}^{\mathbf{1}}{}_{ji,j}\boldsymbol{\Lambda}_{,i} - \bar{\boldsymbol{K}}^{\mathbf{2}}{}_{ji,j}\boldsymbol{\Lambda}_{,i} = 0, \ \text{in } \Omega\times\boldsymbol{I}, \quad (39)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\eta_i, \zeta) &= (0,0) \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{I}}\times\boldsymbol{I}, \\
(\bar{\xi}, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}) &= (0,0,0), \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{O}}\times\boldsymbol{I}, \\
(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \eta_2, \bar{\zeta}) &= (0,0,0,0), \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{S}}\times\boldsymbol{I}, \\
(\eta_i, \zeta_n) &= (-(F_j - \bar{F}_j)Q_{ij}, 0), \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{B}}\times\boldsymbol{I}, \\
\boldsymbol{\Lambda}(x_i, t_f) &= 0, \quad \text{in } \Omega \quad (40)
\end{aligned}
$$

ここで，ζ_n は法線方向 n_j における $\zeta_{,j}$ の流束である．次の関係式:

$$
\delta m_i = \delta(\rho u_i) = u_i\delta\rho + \rho\delta u_i = u_i\delta\rho + \rho u_{i,l}\delta x_l \quad (41)
$$

を用いて，座標 δx_i に関する拡張評価関数 J^* の勾配が得られる．拡張評価関数 J^* の勾配は基礎方程式と随伴方程式を解くことにより，以下の式で得られる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad(J^*)_l} &= \{\rho\xi\delta_{\mathrm{ij}} + (\rho e + p)\zeta\delta_{ij} + \mu(\eta_{i,j} + \eta_{j,i}) \\
&\quad + \lambda^*\eta_{k,k}\delta_{ij}\}u_{i,l}n_j \quad (42)
\end{aligned}
$$

3. 離散化手法

3.1 時間方向の離散化

陰的解法として，式 (14) に Θ 法を用いる．離散化式は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{U}^{n+1} - \boldsymbol{U}^n) + \boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{U}^*)\boldsymbol{U}^{n+\Theta}_{,j} \\
&\quad - \{\boldsymbol{K}_{ji}(\boldsymbol{U}^*)\boldsymbol{U}^{n+\Theta}_{,i}\}_{,j} = 0, \quad (43)
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{U}^{n+\Theta} = \Theta\boldsymbol{U}^{n+1} + (1-\Theta)\boldsymbol{U}^n \quad (44)
$$

ここで，Δt は時間増分量であり，n は，n ステップ目を意味する．$\boldsymbol{U}^*$ は $\boldsymbol{U}$ の Adams-Bashforth 公式による準線形近似である．

$$
\boldsymbol{U}^* = \frac{1}{2}(3\boldsymbol{U}^n + \boldsymbol{U}^{n-1}) \quad (45)
$$

3.2 空間方向の離散化

安定かつ効率的な計算を行なうために，時間項の離散化に混合補間を用いる[13]．**図−2** (a) に示す線形要素を時間項の補間のみに用いる．**図−2** (b) に示す線形要素に気泡関数を加えた気泡関数要素を時間項以外の補間関数及び全ての重み関数に用いる．補間関数は次のように表される．

$$
\begin{aligned}
U^h_e &= \Phi_1\bar{U}_{e1} + \Phi_2\bar{U}_{e2} + \Phi_3\bar{U}_{e3} + \Phi_4\tilde{U}_{e4}, \quad (46) \\
\tilde{U}_{e4} &= \bar{U}_{e4} - \frac{1}{3}(\bar{U}_{e1} + \bar{U}_{e2} + \bar{U}_{e3}), \quad (47) \\
\Phi_1 &= L_1, \quad \Phi_2 = L_2, \quad \Phi_3 = L_3, \quad \Phi_4 = \phi_e, \quad (48) \\
\phi_e &= 27L_1L_2L_3, \quad (49) \\
\dot{U}^h_e &= \Psi_1\dot{\bar{U}}_{e1} + \Psi_2\dot{\bar{U}}_{e2} + \Psi_3\dot{\bar{U}}_{e3}, \quad (50) \\
\Psi_1 &= L_1, \quad \Psi_2 = L_2, \quad \Psi_3 = L_3 \quad (51)
\end{aligned}
$$

ここで，Φ_1 - Φ_4 及び Ψ_1 - Ψ_3 は要素の形状関数であり，L_1 - L_3 は面積座標の線形関数である．$\bar{U}_{e1}$ - $\bar{U}_{e3}$ は節点値であり，$\bar{U}_{e4}$ は気泡関数点の値である．ϕ_e は，式 (49) によって各要素で定義される気泡関数である．

(a) 一次要素　　(b) 気泡関数要素

図–2 補間要素

安定化作用の制御パラメータ $\tilde{\boldsymbol{K}}_{ij}$ の導入により，気泡関数要素の安定化パラメータ $\boldsymbol{\tau_e}$ は以下のように表現できる[9)13)].

$$\boldsymbol{\tau_e} = \left[\int_{\Omega_e}(\boldsymbol{K}_{ij} + \tilde{\boldsymbol{K}}_{ij})\phi_{e,i}\phi_{e,j}d\Omega\right]^{-1}\frac{(\int_{\Omega_e}\phi_e d\Omega)^2}{V_e} \tag{52}$$

ここで，V_e は各要素の面積である．これは，安定化作用の制御パラメータを有する安定化項を付加したことと同義になる．この安定化パラメータと安定化有限要素法で使われる安定化パラメータ $\boldsymbol{\tau_s}$ を

$$\boldsymbol{\tau_e} = \boldsymbol{\tau_s} \tag{53}$$

と定義することにより，安定化有限要素法と等価の安定化作用を得る[1)].

3.3 衝撃波捕捉項

マッハ数の高い流れを安定に解くために，Tezduyar らの衝撃波捕捉項を導入する[19),20)]．本研究では，圧縮性 Navier-Stokes 方程式に，論文[20)]による衝撃波捕捉項を用いる．また，逆解析の場合，終端条件がゼロとなり，境界条件における随伴変数が不連続になる．そのため，随伴方程式には，順解析と異なった衝撃波捕捉項[19)]を用いる．

3.4 リメッシング法

得られた勾配は物体周りのメッシュの不規則性に依存する[15)]．物体の周りに構造メッシュを用いることは，安定な勾配を得るために必要となる．また，形状の更新において，物体表面の節点間隔は狭くなる．

本研究では，Delaunay 三角形分割法をリメッシング法として用いる．物体境界上の節点間隔は，リメッシングの過程で等間隔となるようにし，物体の周囲を構造メッシュで分割した後，その外部領域を Delaunay 三角形分割法により分割する[14)].

物体の面積一定の条件を以下のように定義する．

$$\sum V^{(l)}(x_i) - V_0 = 0 \ , \quad \text{in} \ \ \Omega \times \boldsymbol{I} \tag{54}$$

ここで，$\cdot^{(l)}$ は最適化の更新ステップ数を示し，$\sum V^{(l)}(x_i)$ は解析領域の面積であり，V_0 は初期形状における解析領域の面積である．物体表面の座標は，式 (54) により，面積を一定となるように移動する．物体面積を一定とするために，リメッシングは 2 度行なわれる．

3.5 スムージング法

勾配をスムーズに得るために，次のスムージング法を導入する[6),22)].

$$G_i - \epsilon\frac{\partial^2 G_i}{\partial^2 L} = grad(J^*)_i \tag{55}$$

ここで，G_i はスムージングにより得られる勾配である．式 (55) の離散化には，Galerkin 法を適用する．

4. 最小化アルゴリズム

本研究では，最小化手法として重み付き勾配法を適用する．修正評価関数 K は次の式で表される．

$$K = J^* - \frac{1}{2}\int_I\int_{\Gamma_B}(x_i^{(l+1)} - x_i^{(l)})W_{ij}^{(l)}(x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)})d\Gamma dt, \tag{56}$$

$$W_{ij}^{(l)} = W^{(l)}\delta_{ij} \tag{57}$$

ここで，$W^{(l)}$ は形状の更新において変化させる重み定数である．K の停留条件 $\delta K = 0$ により，物体の座標を更新する式が得られる．

$$W_{ij}^{(l)}x_j^{(l+1)} = W_{ij}^{(l)}x_j^{(l)} + G_i \tag{58}$$

物体表面座標 $x_i^{(l)}$ は，式 (58) によって更新される．重み付き勾配法を用いた計算アルゴリズムは次のようになる．

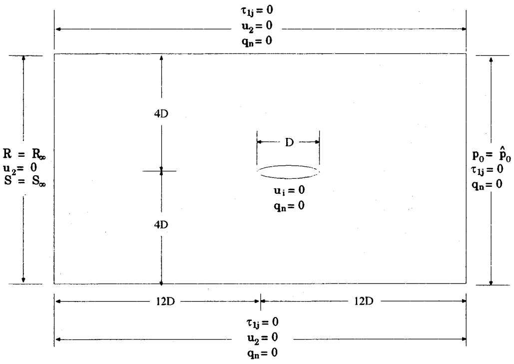
1. $l = 0$ として，初期の物体表面座標 $x_i^{(l)}$ を設定する．
2. 初期の状態量 $\boldsymbol{U}^{(l)}$ を求める．
3. 初期の評価関数 $J^{(l)}$ を求める．
4. 随伴変数 $\boldsymbol{\Lambda}^{(l)}$ を求める．
5. スムージングをした勾配 G_i を求める．
6. 表面座標 $x_i^{(l+1)}$ を求める．
7. もし，物体境界 Γ_B 同士が交わって壊れた場合，重みを $W^{(l)} = 2.0W^{(l)}$ として，6 へ．
   その他は 8 へ．
8. 計算領域をリメッシングする．
9. $\sum V^{(l)}(x_i) - V_0 = 0$ により物体面積を一定になるように，表面座標を移動し，流れに平行となるように物体の両端を基準に回転移動させる．
10. 計算領域をリメッシングする．
11. $E = \|x_i^{(l+1)} - x_i^{(l)}\|$ により，収束判定をする．
    もし，$E < \bar{E}$ ならば，終了
    その他は 12 へ．
12. 状態量 $\boldsymbol{U}^{(l+1)}$ を求める．
13. 評価関数 $J^{(l+1)}$ を求める．
14. 重み定数 $W^{(l+1)}$ を更新する．
    もし，$J^{(l+1)} \leq J^{(l)}$ ならば，$l = l + 1$ として 4 へ，
    その他は，$W^{(l+1)} = 2.0W^{(l)}$ として 6 へ．

ここで，$\bar{E}$ は物体形状の収束判定基準である．

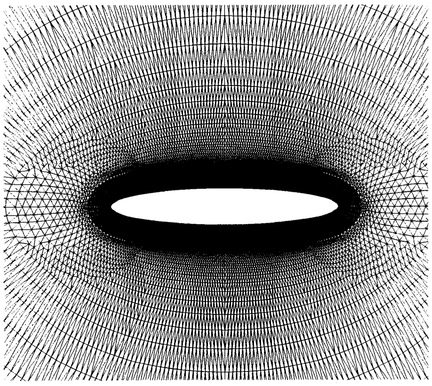
5. 数値解析例

5.1 2次元形状決定問題

圧縮粘性流れに置かれた物体の流体力減少問題を解き，流体力を減少させる物体形状を導出する．抗力の減少について考え，Q_{11} と Q_{22} をそれぞれ，1.0 と 0.0 とし，目的の流体力 $\bar{F}_i$ をゼロと設定する．長軸と短軸の比を6対1の楕円を初期形状とする．計算領域及び境界条件を**図−3**に示す．各計算条件は $\gamma = 1.4$，$Re = 10000$，$Pr = 0.72$ とする．一様流を $\rho = 1.0, u_1 = 1.0, u_2 = 0.0, \theta = 1.0$，$M_\infty = 0.8$，$\theta_\infty = 216.7[°K]$ と設定する．物体周りのメッシュは**図−4**と**図−5**のように，2種類の有限要素メッシュを用いて解析する．

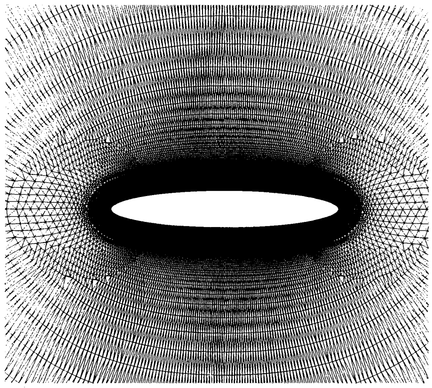


図−3 解析領域及び境界条件

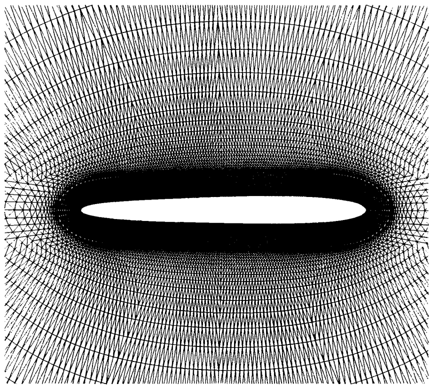


図−4 有限要素分割 (1)
(節点数:17268, 要素数 34028)

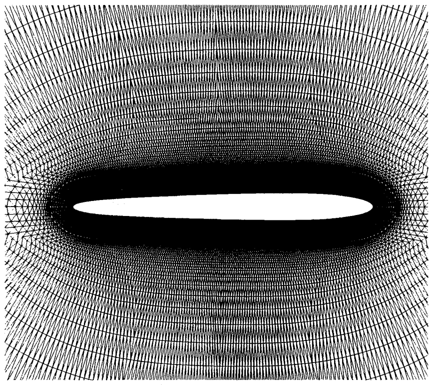
メッシュ(1) は，節点数及び要素数は 17268 及び 34028 であり，物体周りの節点数は 256 である．**図−6**に最終形状におけるメッシュを示す．メッシュ(2) は，節点数及び要素数は 20964 及び 41288 であり，物体周りの節点数は 320 である．**図−7**に最終形状におけるメッシュを示す．メッシュ(1) 及びメッシュ(2) におけるメッシュ



図−5 有限要素分割 (2)
(節点数:20964, 要素数:41288)



図−6 最終形状における有限要素分割 (1)



図−7 最終形状における有限要素分割 (2)

分割の違いは，物体周りの節点数の違いだけである．各パラメータはそれぞれ，$\Theta = 1.0, \Delta t = 0.005, \epsilon = 1.0, W = 1.0$ である．形状決定は 3000 ステップ順解析を行なった後に，145 ステップの逆解析により行なう．収束判定 $\bar{E}$ は 10^{-6} とする．

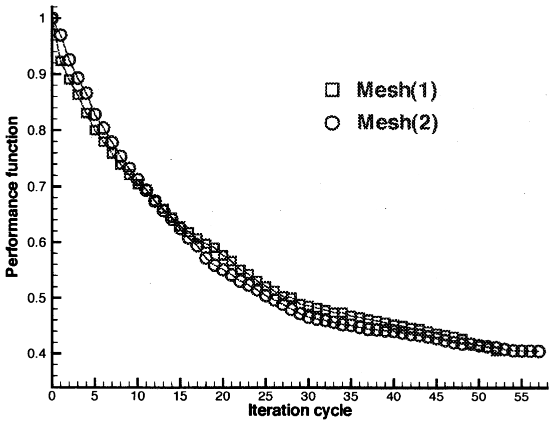
正規化した評価関数とメッシュの比較を**表−1**に示す．評価関数の変化を**図−8**に示す．メッシュ(1) 及びメッシュ(2) を用いた場合の形状比較を**図−9**に示す．評価

関数の減少率は，ほとんど変わらなかったが，物体表面の節点数と評価関数の最終値はメッシュに依存した．また，最終形状に関しても異なった形状となり，微細なメッシュのほうが評価関数は減少し，左右に伸びた形状になると考えられる．

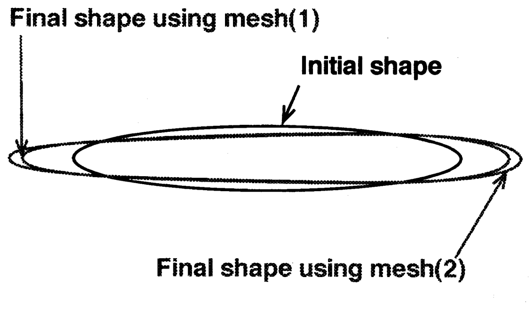
初期形状及び最終形状の圧力分布を**図–10**から**図–12**に示す．最終形状の物体表面から衝撃波が消えたことが確認できる．しかしながら，物体後方における渦は完全にはなくならなかった．

表–1 正規化した評価関数の最終値とメッシュの比較

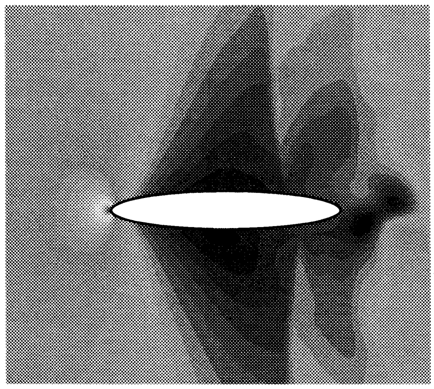
	節点数	要素数	物体表面の節点数	評価関数の値
メッシュ(1)	17268	34028	256	40.55%
メッシュ(2)	20964	41288	320	40.52%



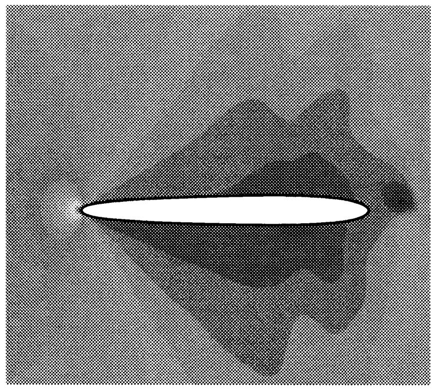
図–8 評価関数



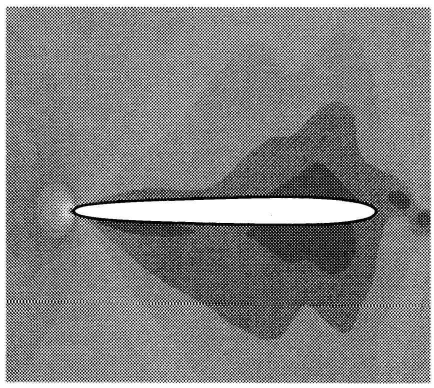
図–9 形状比較



図–10 初期形状における圧力分布 (メッシュ(2))



図–11 最終形状における圧力分布 (メッシュ(1))



図–12 最終形状における圧力分布 (メッシュ(2))

5.2　3次元形状解析

2次元流れ場において得られたメッシュ(2)の最終形状より，3次元形状を作成し，三次元物体形状の解析を行なう．三次元形状は以下の4ケースを行なう．

ケース1は2次元解析で用いた楕円の回転体を解析する．

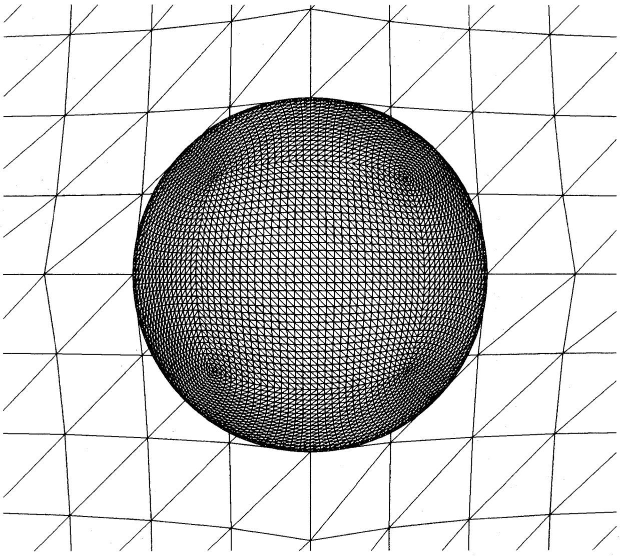
ケース2からケース4は x-z 平面の断面に最終形状を用いて作成する．それぞれのケースの違いを以下に

示す．

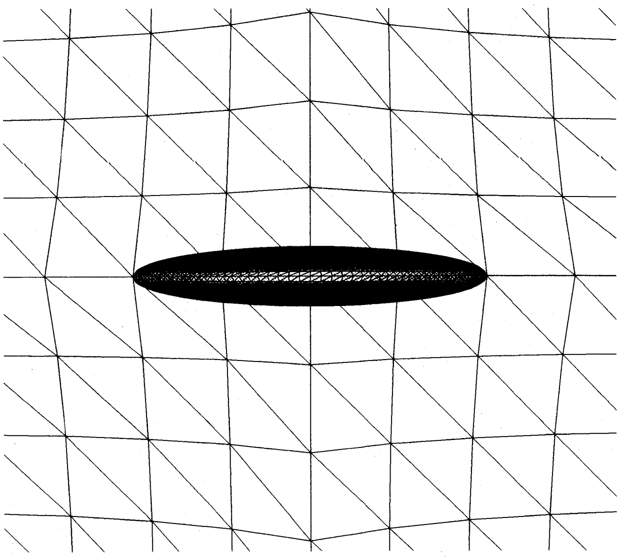
ケース２：x-y 平面を円とし，ケース１の円盤と同体積にした．

ケース３：物体の y 軸方向の幅をケース１と同じ D にし，物体の x-z 断面の断面積をケース１の楕円と同じにした．

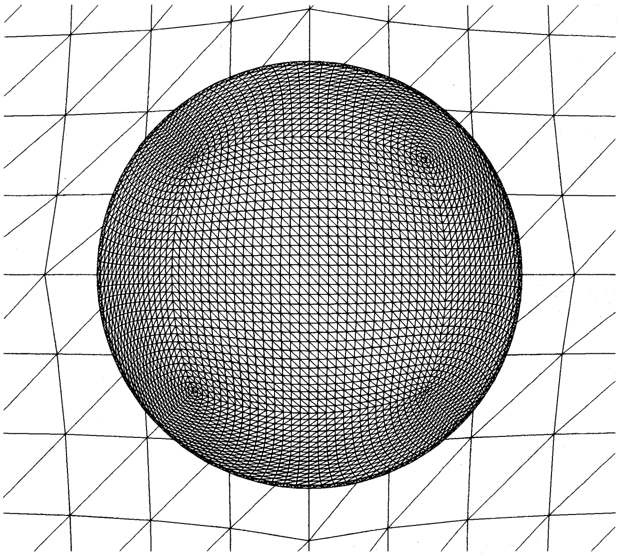
ケース４：x-y 平面を直径 D の円とし，x-z 平面において，流れの軸方向の長さをケース１と同じ D にした．



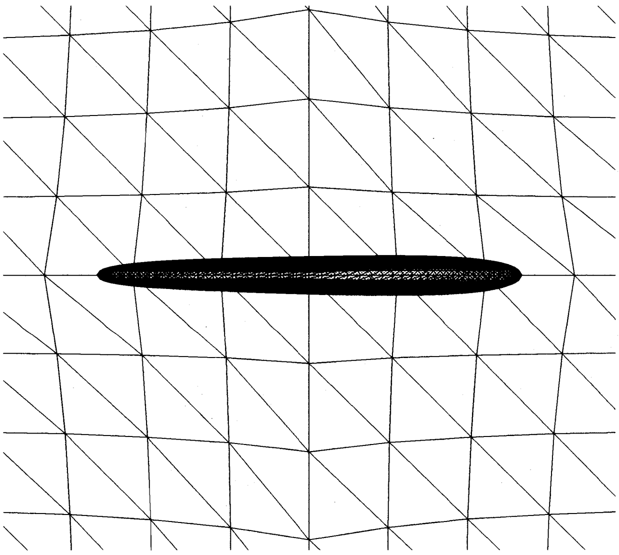
図−13 x-y 平面の有限要素分割 (ケース１)



図−14 x-z 平面の有限要素分割 (ケース１)

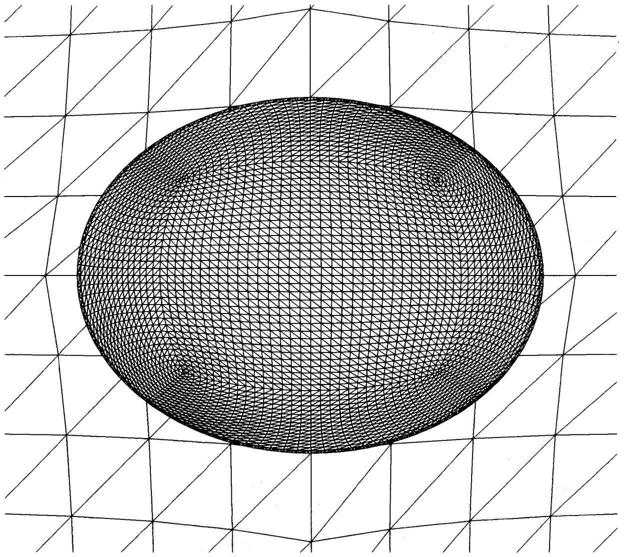


図−15 x-y 平面の有限要素分割 (ケース２)

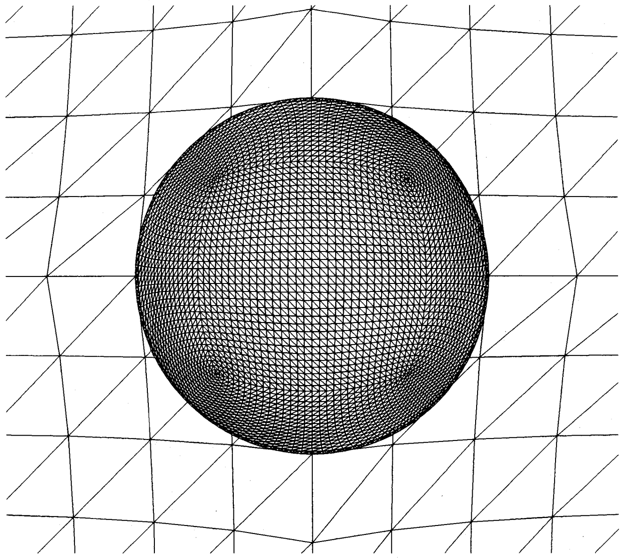


図−16 x-z 平面の有限要素分割 (ケース２)

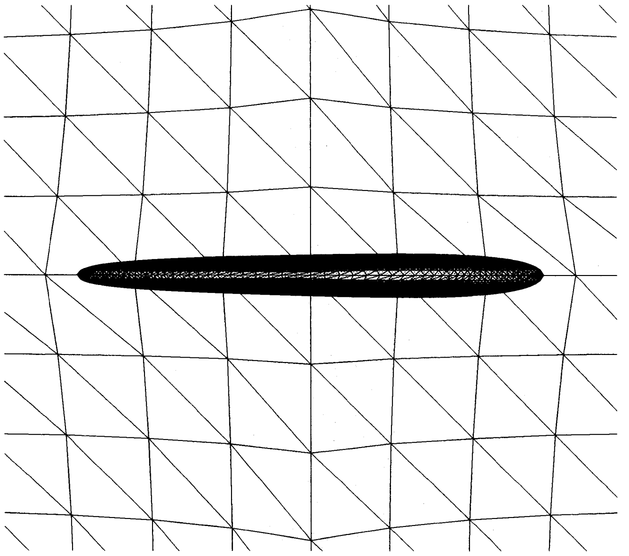
計算領域の分割には，全て構造メッシュを用いる．総節点数及び要素数は，418466 及び 2457600 であり，物体周りの総節点数及び要素数は，6146 及び 12288 である．各物体の周りのメッシュについて，x-y 平面で見た図及び x-z 平面で見た図を**図−13**から**図−20**にそれぞれ示す．なお，物体周りに非常に粗いメッシュが描かれているのは，物体背後にある解析領域の外部境界のメッシュである．３次元解析における解析領域及び境界条件は，２次元領域を３次元領域に拡張したものを用いる．流入及び流出境界条件及び側面の境界条件は，２次元領域と同様である．解析領域の長さ及び幅は，２次元領域と同様に 24D 及び８ D であり，高さは８ D とする (**図−21**)．各計算条件及び各パラメータは２次元の場合と同じとし，500 ステップ計算した結果を示す．三次元解析は計算負荷が高いために，計算領域を領域分割し，並列化して計算する (**図−22**)．使用した



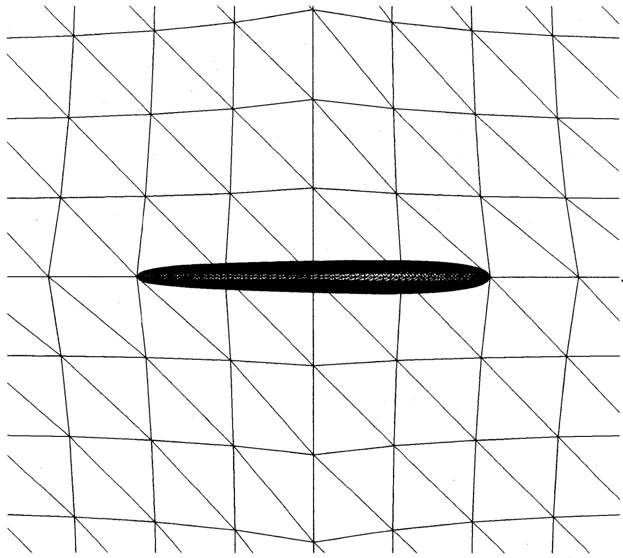
図–17 x-y 平面の有限要素分割 (ケース３)



図–19 x-y 平面の有限要素分割 (ケース４)



図–18 x-z 平面の有限要素分割 (ケース３)



図–20 x-z 平面の有限要素分割 (ケース４)

計算機は，pSeries 690 POWER4 Super Chip 1.3GHz の 16CPU である．

それぞれの圧力分布図を**図–23**から**図–27**に，ケース１の渦度分布図を**図–24**に示す．ケース１の楕円回転体には，円盤の上下面には衝撃波と思われる圧力分布の不連続面が発生した．また，円盤後方には渦度分布図 (**図–24**) が示すような渦が発生した．それぞれの抗力の履歴を**図–28**に示す．

２次元の結果では，評価関数は 40.52% の減少があったが３次元の結果では，ケース１と同等の抗力か，それ以上の抗力がケース２及びケース３で確認された．ケース２においては，物体の体積をケース１と同等としたことにより，流れに対する物体の投影面積が増えたことにより物体の圧力に関する応力が増加したためと考えられる．ケース３においては，物体の三次元性が流れに影響した結果，もともとケース１よりも物体の表面積が大きかったため，顕著に影響が現れたと考えられる．ケース４は物体の体積を考慮しておらず，物体の表面積も小さいものとなるため，ケース１よりも抗力が減少した．よって，面積一定の条件より得られた２次元形状は，体積一定の３次元形状においては，必ずしも物体の抗力を減少させる結果にはならないといえる．

6. 結論

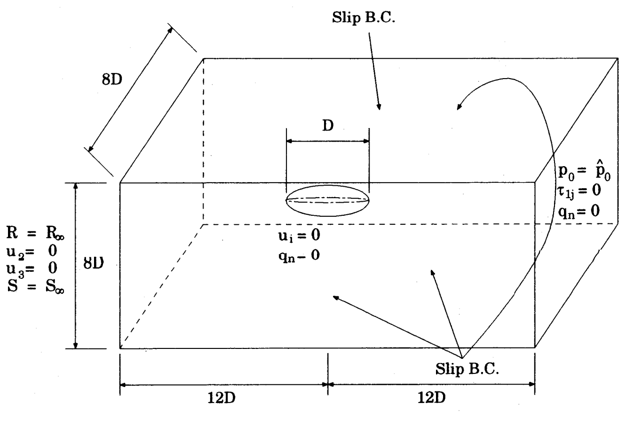
本研究では，圧縮粘性流れにおける２次元物体の形状決定及び得られた最終形状を用いて三次元物体を作成，解析し，２次元領域において得られた形状の検討を実施した．２次元物体の形状決定では，２種類の有限要素メッシュを用いて評価関数を一定値に収束させ，40.52% と 40.55% に減少させた形状を導出できた．３

次元物体の解析においては，全てのケースで安定に計算を行なうことができた．

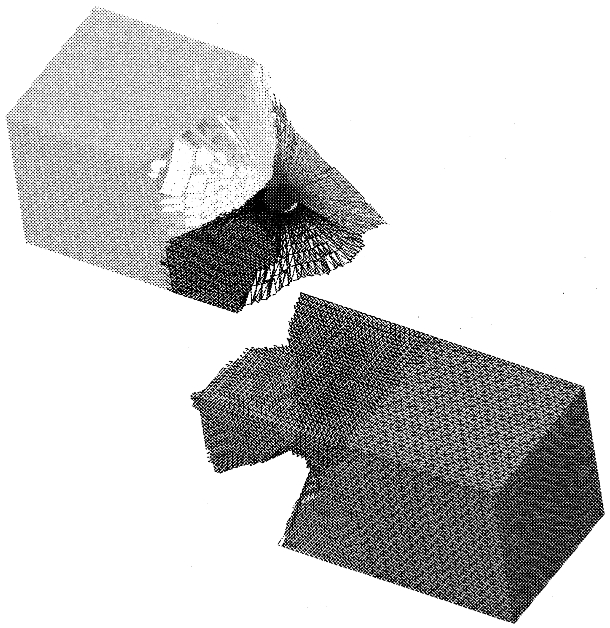
基礎方程式と随伴方程式の離散化手法として，気泡関数に基づいた混合補間を時間項に対して用いた．本手法では，２次元及び３次元の解析において，物体周りにおける圧力振動は発生せず，計算を安定に解くことができた．また，リメッシング法及びスムージング法を合わせて用いることにより，最終形状は物体表面座標に数値振動のない安定な形状を導出できた．

２次元の形状決定問題で導出された形状に関して，初期形状の物体表面に見られた衝撃波は，得られた最終形状においては発生しなかったが物体後方の渦は残ったままだった．また，２種類のメッシュを用いて，導出された二つの形状には違いがあり，最終形状は物体表面の節点数に依存すると考えられる．そのため，数値解析における形状の決定では，導出された形状に離散化誤差が含まれるため，メッシュの細分化が重要となる．

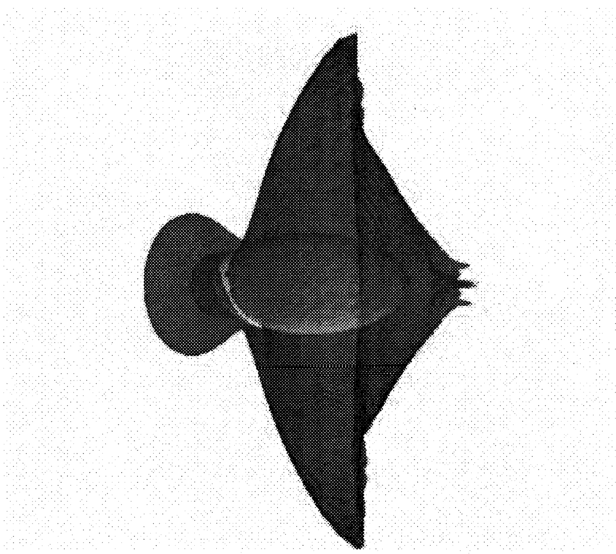
３次元解析では，２次元の形状決定問題で評価関数が 40.52% 減少した形状を用いたが，必ずしも２次元領域で導出された形状から作成された３次元形状が良い形状であるとはいえない．３次元領域において形状導出する場合には３次元領域における形状決定を行なうことが必要である．



図–21 解析領域及び境界条件



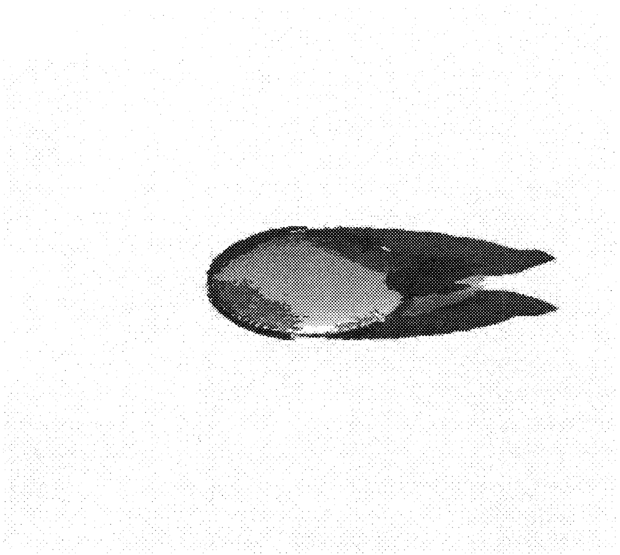
図–22 領域分割 (16 分割)



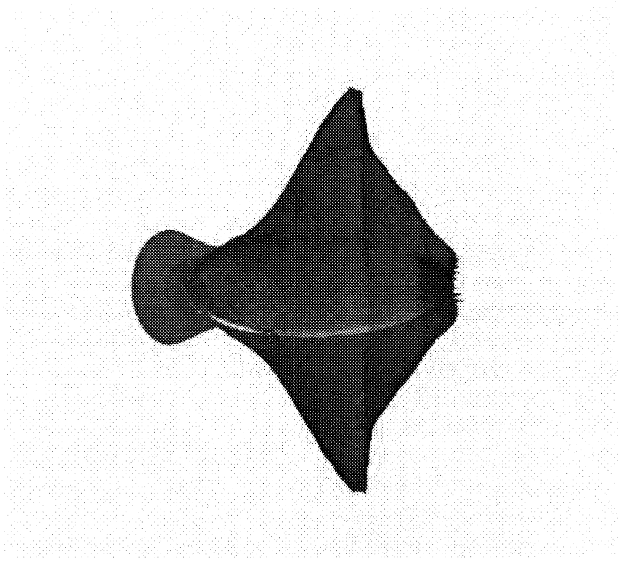
図–23 圧力分布 (ケース１)

参考文献

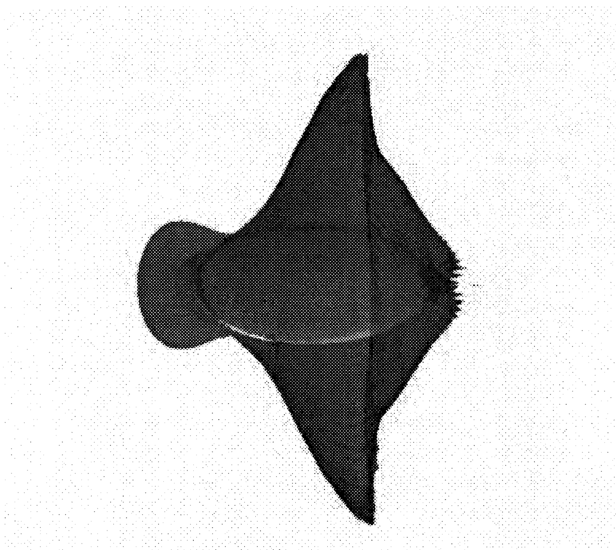
1) Behr,M. and T.E.Tezduyar, Finite element solution strategies for large-scale flow simulations, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 1994, 112, 3-24.
2) Glowinski,R. and O.Pironneau: On the numerical computation of the minimum-drag profile in laminar flow, J. Fluid Mech., 1975, 72, part2, 385-389.
3) He,B., O.Ghattas and J.F.Antaki: Computational Strategies for Shape Optimization of Time-Dependent Navier-Stokes Flows, Technical Report CMU-CML-97-102, 1997.
4) Hicks,R.M., E.M.Murman and G.N.Vanderplaats, An Assessment of Airfoil Design by Numerical Optimization, NASA TM X-3092, Ames Research Center, Moffett Field, California., July 1974.
5) Jameson,A., N.Pierce and L.Martinelli, Optimum Aerodynamic Design Using the Navier-Stokes Equations, AIAA paper 97-0101, 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibition, Reno, Nevada, January 1997.
6) Jameson,A., Aerodynamic Shape Optimization Using the Adjoint Method, Lecture at the Von Karman Insti-



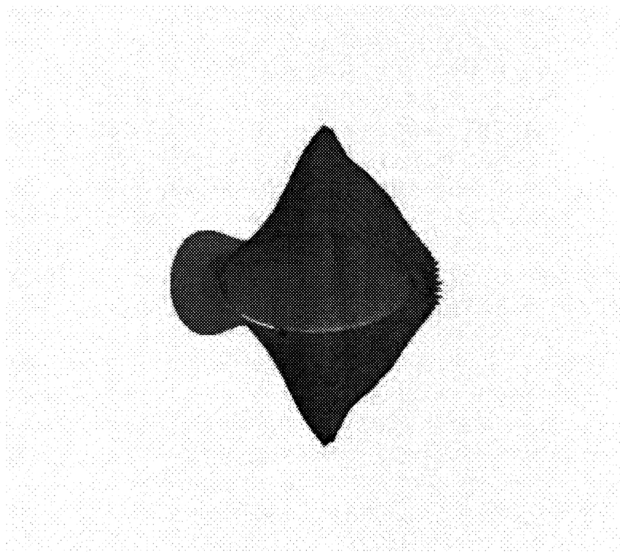
図–24 渦度分布 (ケース 1)



図–26 圧力分布 (ケース 3)



図–25 圧力分布 (ケース 2)



図–27 圧力分布 (ケース 4)

tute, Brussels, February 6, 2003.

7) Katamine,E., H.Azegami and S.Itoh, Solution to Shape Optimization Problems of viscous flow fields, Int. J. Comp. Fluid Dyn., 2005, 19, No.1, 45-51.

8) Leoviriyakit,K. and A.Jameson, Aerodynamic Shape Optimization of Wings Including Planform Variations, AIAA paper 2003-0210, 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, January 2003

9) Matsumoto,J. and Kawahara,M., Shape Identification for Fluid-Structure Interaction Problem Using Improved Bubble Element, Int. J. Comp. Fluid Dyn., 2001, 15, 33–45, 2001.

10) Matsumoto,J., Shape Identification for Navier-Stokes Equations with unsteady flow using bubble function element stabilized method, WCCM, 353, 2004.

11) Melvin,A. and L.Martinelli, Aerodynamic Shape Optimization of Racing Car Components, ASE Motorsports Engineering Conference December 2, 2004.

12) Mohammadi,B., Shape Optimization for 3D Turbulent Flows Using Automatic Differentiation, Int. J. Comp. Fluid Dyn., 1998, 11, No.1-2, 27-50.

13) Nakajima,S. and M.Kawahara: New Finite Element Formulation Based on Bubble Element for the Transient Compressible Euler Equations, Commun. Numer. Meth. Eng., 2008 (submitted).

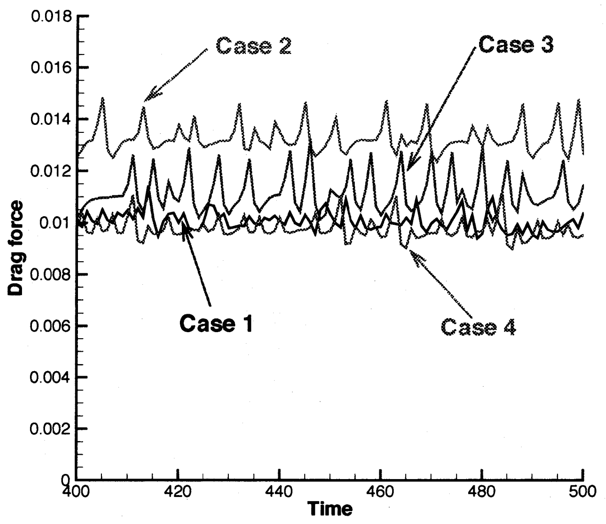
14) Nojima,K. and M.Kawahara, Three-Dimensional Shape Identification of Body Located in Viscous Fluid Flow, I.C.H.E., 2006.

15) Ogawa,Y. and M.Kawahara, Shape Optimization of Body Located in Incompressible Viscous Flow Based on Optimal Control Theory, Int. J. Comp. Fluid Dyn., 2003, 17(4), 243-251.

16) Pironneau,O., On optimum profiles in Stokes flow, J. Fluid Mech., 1973, 59, No.1, 117-128.

17) Pironneau,O., On optimum design in fluid mechanics, J. Fluid Mech., 1974, 64, No.1, 97-110.

18) Shenoy,A., M.Heinkenschloss and E.M.Cliff, Airfoil Design by an All-at-once Method, Int. J. Comp. Fluid



図–28 抗力の時暦

Dyn., 1998, 11, No.1-2, 3-25.

19) Tezduyar,T.E. and Y.Osawa: "Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors", Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.,2000, 190, 411-430.

20) Tezduyar,T.E. and M.Senga: "Stabilization and Shock-Capturing Parameters in SUPG Formulation of Compressible Flows", Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.,2006, 195, 1621-1632.

21) Yagi,H. and M.Kawahara, Shape optimization of a body located in low Reynolds number flow, Int. J. Numer. Meth. Fluid., 2005, 48, 819-833.

22) Yagi,H. and M.Kawahara, Numerical Optimal Shape Determination of A Body Located in Incompressible Viscous Fluid Flow, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.,2007, 196, 5084-5091.

23) Nakajima,S. and M.Kawahara: The Finite Element Formulation Based on Bubble Function Element for Solving the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations, 39th Fluid Dynamics Conference/Aerospace Numerical Simulation Symposium 2007, JAXA-SP-07-016, pp.154-159.

24) Nakajima,S. and M.Kawahara, Shape Optimization of a Body in Compressible Inviscid Flows, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2008(in press).

(2008 年 4 月 14 日 受付)