応用力学論文集 Vol.11, pp.57-65　(2008 年 8 月)　土木学会

BF-spline Ritz 法を用いた Mindlin 平板の動的応答解析

Dynamic response of rectangular Mindlin plates using BF-spline Ritz method

和田　裕明*・水澤　富作**・名木野　晴暢***
Hiroaki WADA , Tomisaku MIZUSAWA and Harunobu NAGINO

* 大同工業大学大学院工学研究科　都市環境デザイン学専攻　(〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)
**工博 大同工業大学教授 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)
***博士(工学) 大分工業高等専門学校助教 都市システム工学科 (〒870-0152 大分市大字牧 1666 番)

This paper presents dynamic responses of rectangular Mindlin plates under the action of impulse uniform load or concentrated load using the BF-spline Ritz method and modal analysis method. The BF-spline Ritz method is used for space domain and the mode superposition method is used for time domain. To demonstrate the accuracy of the present method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by analytical methods. Excellent accuracy is obtained by the present method. The effects of width to thickness ratio, dwell time and impulse function on dynamic responses and dynamic amplitude factors of rectangular Mindlin plates are investigated..

Key Words: *BF-spline Ritz method, modal analysis method, dynamic response, Mindlin plate*

1. まえがき

物体の衝突や突風のような衝撃的な荷重を受ける平板のたわみや断面力の応答を把握することは，平板の動的設計の重要な課題である．

種々のステップ荷重を受ける薄板の動的応答解析は，有限要素法などの数値解析法を用いて変位場の離散化を行い，運動方程式を Newmark の β 法などの時刻歴数値積分法 [1)-3)] を適用して解析されているが．時間積分に計算時間がかかり，また各固有モードの影響が直接評価できない．

一方，線形な弾性平板の応答解析に限定されるが，modal analysis 法 [4),5)] は，固有値解析から求めた固有モードの直交性を利用し，一自由度系の運動方程式に変換した各モードの応答値の重ね合わせより，解析的な応答値が得られる．

任意の境界条件を有する厚板の動的応答問題では，面外せん断変形や回転慣性の影響が無視できなくなるので，これらの影響を考慮したせん断変形理論を適用する必要がある [6)]．ステップ時間 Δt に依存する Newmark の β 法などの時刻歴数値積分法を用いた厚板の動的応答解析が多く見られるが，板の単純な境界条件を除くと，各振動モードの影響を考慮できる modal analysis 法を用いた解析例は少ないように思われる．

最近，著者らは，$k-1$ 次の任意の B-spline 関数が幾何学的境界条件を自動的に満足するように，境界関数と B-spline 関数を組み合わせた区分的許容関数を Ritz 法の変位関数に仮定した BF-spline Ritz 法を定式化し，任意の境界条件を有する Mindlin 板の自由振動解析 [7),8)] および曲げ解析 [9)] へ適用して，精度の高い解析結果を得ているが，Mindlin 板の動的応答解析への本手法の適用が課題として残されていた．

本論文では，BF-spline Ritz 法と modal analysis 法を用いて，ステップ荷重を受ける等方性 Mindlin 板の動的応答解析を行い，本手法の解の収束性や解析精度について検討を行い，本手法の有用性及び解の妥当性について明らかにしている．また，衝撃応答に与えるステップ荷重の載荷時間 τ_1 や幅厚比 b/h などの影響についても明らかにしている．

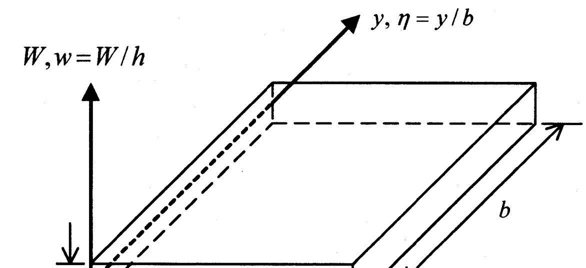


図-1　長方形 Mindlin 板と座標系

2. BF-spline Ritz 法と modal analysis 法の定式化

境界関数を導入したB-spline関数を許容関数に仮定したRitz法を定式化する．**図-1** に示すように，定式化には次式の無次元座標系(ξ,η)と無次元たわみ$w(\xi,\eta)$を用いる．

$$\xi = x/a,\ \eta = y/b,\ w = W/h \tag{1}$$

ここで，a, b, h は，それぞれ長方形板の長さ，幅と厚さであり，$W(\xi,\eta)$は面外振幅たわみである．

2.1 BF-spline Ritz 法による固有方程式の定式化

$k-1$ 次の区分的多項式で定義されるB-spline 関数は，与えられた境界条件を満足しない任意の関数である[10]．ここでは，領域 [0, 1]で幾何学的境界条件を自動的に満足させるための境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を定義する．

表-1 に示す $F_x(\xi), F_y(\xi), F_w(\xi)$ は，それぞれη 軸に平行な境界辺($\xi=0, \xi=1$)で与えられる幾何学的境界条件を満たす境界関数であり，また $G_x(\eta), G_y(\eta), G_w(\eta)$は，それぞれ$\xi$軸に平行な境界辺($\eta=0$, $\eta=1$)で与えられる境界関数である．ただし，表中のS, C, F は，それぞれ単純支持，固定および自由の境界条件を示す．

Mindlin 板理論で仮定される独立した 3 つの振幅変位関数 (たわみ w と 2 つの回転角ϕ_x, ϕ_y) は，**表-1** に示す境界関数と B-spline 関数を組み合わせて，それぞれ次式で仮定する．

$$\phi_x(\xi,\eta) = F_x(\xi)G_x(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta),$$

$$\phi_y(\xi,\eta) = F_y(\xi)G_y(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta),$$

$$w(\xi,\eta) = F_z(\xi)G_z(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \tag{2}$$

ただし，$N_{m,k}(\xi), N_{n,k}(\eta)$は，$k-1$ 次の正規化されたB-spline であり，A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}はそれぞれ未定係数である．$i_x = k-2+m_x$, $i_y = k-2+m_y$, $k-1$ はB-spline 関数の次数，m_x と m_y はそれぞれξ方向とη方向に設けた区分点の数である．

表-1 種々の幾何学的境界条件に対応した境界関数

B. C.	$\xi=0,1$			$\eta=0,1$		
	$F_x(\xi)$	$F_y(\xi)$	$F_w(\xi)$	$G_x(\eta)$	$G_y(\eta)$	$G_w(\eta)$
S-S	1	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\eta-\eta^2)$	1	$4(\eta-\eta^2)$
S-F	1	ξ	ξ	η	1	η
F-S	1	$1-\xi$	$1-\xi$	$1-\eta$	1	$1-\eta$
S-C	$4(\xi-\xi^2)$	ξ	$4(\xi-\xi^2)$	η	$4(\eta-\eta^2)$	$4(\eta-\eta^2)$
C-S	ξ	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\eta-\eta^2)$	η	$4(\eta-\eta^2)$
C-C	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\eta-\eta^2)$	$4(\eta-\eta^2)$	$4(\eta-\eta^2)$
C-F	ξ	ξ	ξ	η	η	η
F-C	$1-\xi$	$1-\xi$	$1-\xi$	$1-\eta$	$1-\eta$	$1-\eta$
F-F	1	1	1	1	1	1

調和振動を仮定すれば，等方性な長方形Mindlin 板のひずみエネルギーUは，次式で与えられる[11]．

$$\begin{aligned} U = \frac{D}{2}\left(\frac{a}{b}\right)\int_0^1\int_0^1 \Bigg\{ & \left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right)^2 \\ & + \nu\left(\frac{b}{a}\right)\left\{\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi}\right)\right\} \\ & + \frac{1-\nu}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\xi}\right)\right\}^2 \\ & + 6\kappa(1-\nu)\left(\frac{b}{h}\right)^2\left[\left\{\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right) + \phi_x\right\}^2 \right. \\ & \left. + \left\{\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right) + \phi_y\right\}^2\right]\Bigg\} \mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi \\ = \frac{D}{2}\left(\frac{a}{b}\right) & \{X\}_{mn}^{\mathrm{T}}[K]_{mnrs}\{X\}_{rs} \end{aligned} \tag{3}$$

ただし，

$$\{X\}_{mn} = \left\{\{\delta_A\}_{mn}\quad \{\delta_B\}_{mn}\quad \{\delta_C\}_{mn}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \{\delta_A\}_{mn} &= \left\{A_{11}\quad A_{12}\quad \cdots\quad A_{i_x i_y}\right\}^{\mathrm{T}}, \\ \{\delta_B\}_{mn} &= \left\{B_{11}\quad B_{12}\quad \cdots\quad B_{i_x i_y}\right\}^{\mathrm{T}}, \\ \{\delta_C\}_{mn} &= \left\{C_{11}\quad C_{12}\quad \cdots\quad C_{i_x i_y}\right\}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{5}$$

である．$[K]_{mnrs}$は剛性マトリックス，Dは板の曲げ剛性である．また，κとν はそれぞれせん断修正係数とポアソン比である．

この Mindlin 板の運動エネルギーTは，調和振動を仮定すると，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\rho h\omega^2 ab^3\int_0^1\int_0^1\left\{W^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{b}{h}\right)^2(\phi_x{}^2 + \phi_y{}^2)\right\}\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2}\omega^2\{X\}_{mn}^{\mathrm{T}}[M]_{mnrs}\{X\}_{rs} \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，$[M]_{mnrs}$は質量マトリックスであり，また，ρは密度，ω は円振動数(rad/sec)である．

長方形 Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギーΠは，式(3)および式(6)を用いて，次式で与えられる．

$$\Pi = U - T \tag{7}$$

ここで，U と T はそれぞれ，ひずみエネルギーと運動エネルギーである．

したがって，Ritz 法を適用して，Π を未定係数ベクトルで極値化すれば，次の固有方程式が得られる．

$$\partial\Pi/\partial\{X\}_{rs}^{T} = \left([K]_{mnrs} - \omega^2[M]_{mnrs}\right)\{X\}_{mn} = 0\ ; \quad m,r=1,2,\ldots,i_x,\ \ n,s=1,2,\ldots,i_y \tag{8}$$

式(8)に示す剛性マトリックス$[K]_{mnrs}$および質量マトリックス$[M]_{mnrs}$は，それぞれ式(9)と式(10)で示すサブマトリックスで表される．

$$[K]_{mnrs}=\begin{bmatrix}[K_{\phi_x\phi_x}] & [K_{\phi_x\phi_y}] & [K_{\phi_x W}]\\ [K_{\phi_y\phi_x}] & [K_{\phi_y\phi_y}] & [K_{\phi_y W}]\\ [K_{W\phi_x}] & [K_{W\phi_y}] & [K_{WW}]\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$[M]_{mnrs}=\begin{bmatrix}[M_{\phi_x\phi_x}] & [0] & [0]\\ [0] & [M_{\phi_y\phi_y}] & [0]\\ [0] & [0] & [M_{WW}]\end{bmatrix} \tag{10}$$

これらのサブマトリックス[7)]は，Gaussの数値積分公式により求めている．

したがって，式(8)の固有方程式をHouseholder-QR法を用いて解けば，固有値および正規化された固有ベクトルが求められる．

2.2 Modal analysis法の定式化

ここでは，ステップ荷重を受けるMindlin板の動的応答をmodal analysis法を用いて定式化する[12)]．

ステップ荷重を受けるMindlin板の運動方程式は，減衰の影響を無視すると，次式で与えられる．

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{f(t)\} \tag{11}$$

ここで，$[M]$と$[K]$は，それぞれ式(9)と式(10)で示した剛性マトリックスと質量マトリックスである．$\{x\}$は一般化変位ベクトルであり，また外力ベクトル$\{f(t)\}$は，面外荷重の動的影響を考慮すると，次式で与えられる．

$$\{f(t)\}=F(t)\{qab\int_0^1\int_0^1 W(\xi,\eta)d\xi d\eta+P\times W(\xi_o,\eta_o)\} \tag{12}$$

ここで，$F(t)$はステップ関数であり，qとPは，それぞれ等分布荷重強度と集中荷重の大きさである．また，ξ_oとη_oは，集中荷重の載荷位置を示す．

変位ベクトル$\{x(t)\}$は，1次からr次の正規化された固有ベクトル成分から成るモーダルマトリックス$[X]$と一般化座標ベクトル$\{q(t)\}$に分離して，次式のように表される．

$$\{x(t)\}=[X]\{q(t)\} \tag{13}$$

式(13)を式(11)に代入すれば，

$$[M][X]\{\ddot{q}\}+[K][X]\{q\}=\{f(t)\} \tag{14}$$

になる．

式(14)の両辺に$[X]$の転置マトリックスを掛けると，次式になる．

$$[X]^T[M][X]\{\ddot{q}\}+[X]^T[K][X]\{q\}=[X]^T\{f(t)\} \tag{15}$$

ここで，次式の関係式が成り立つ．

$$[X]^T[K][X]=[\omega_i{}^2],\qquad [X]^T[M][X]=[I]$$

$$[X]^T\{f(t)\}=\{Q(t)\} \tag{16}$$

したがって，式(16)の関係式を式(15)に代入すれば，モーダルマトリックスの直交性により，次式の一自由度系の運動方程式が得られる．

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2 q_i=Q_i\ (t);i=1,2,\dots,r \tag{17}$$

ただし，rは採用する固有モードの個数である．

したがって，初期値として，変位$q_i(0)$と速度$\dot{q}_i(0)$を用いれば，式(17)の解は，

$$q_i(t)=q_i(0)\cos\omega_i t+(\dot{q}_i(0)/\omega_i)\sin\omega_i t+\frac{1}{\omega_i}\int_0^t Q_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \tag{18}$$

で求められる．なお，次式のたたみ込み積分I_dに含まれる荷重関数$Q(\tau)$が一般的な関数である場合には，数値積分法を用いなければならない．

$$I_d=\int_0^t Q_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \tag{19}$$

しかしながら．下記に示すステップ荷重を対象にすると．厳密に積分できる．

(a) 長方形ステップ荷重（長方形パルス）のI_d

0からt_1間のみに作用するステップ荷重(長方形パルス) F_0 (=qまたはP) を仮定すると，

$$F(t)=F_0\quad ;0\le t\le t_1$$

$$F(t)=0\quad ;t_1\le t \tag{20}$$

I_dは，それぞれ次式で与えられる．

$$I_d=\frac{F_0}{\omega_i}(1-\cos\omega_i t)\quad ;0\le t\le t_1$$

$$I_d=\frac{F_0}{\omega_i}\{\cos\omega_i(t-t_1)-\cos\omega_i t\}\ ;t_1\le t \tag{21}$$

(b) 正弦波ステップ荷重（sinパルス）のI_d

0からt_1間のみに作用するsinパルス$F(t)$を次式で仮定すると，

$$F(t) = F_0 \sin(\pi t / t_1) \quad ; \quad 0 \le t \le t_1$$

$$F(t) = 0 \quad ; \quad t_1 \le t$$

(22)

I_dは，それぞれ次式で与えられる．

$$I_d = F_0 t_1 [\pi \sin \omega_i t - \omega_i t_1 \sin(\pi t / t_1)] / (\pi^2 - t_1^2 \omega_i^2)$$

$$; 0 \le t \le t_1$$

$$I_d = F_0 \pi t_1 [\pi \sin \omega_i t + \sin \omega_i (t - t_1)] / (\pi^2 - t_1^2 \omega_i^2)$$

$$; t_1 \le t$$

(23)

したがって，式(17)の解を式(13)及び式(2)に代入すれば，１次から r 次までの動たわみが求められるので，重ね合わせの原理より，動たわみが求められる．同様にして，動的な曲げモーメントとせん断力も容易に定式化できる．

3. 数値計算例および考察

ここでは，BF-spline Ritz 法と modal analysis 法を用いた等分布ステップ荷重および集中ステップ荷重を受ける正方形 Mindlin 板の動的応答解析について検討する．

計算例では，平板の境界条件を周辺単純支持（SS-SS）と周辺固定（CC-CC）に仮定し，またポアソン比 ν は 0.3，せん断修正係数 κ は 5/6 とする．また，応答時間は，次式の無次元時間 τ で表す．

$$\tau = t / (a^2 \sqrt{\rho h / D}) \qquad (24)$$

なお，固有値解析には，BF-spline Ritz 法の収束性および解析精度を考慮して[7]，spline 次数 k-1 は 4 次，x, y 方向に設ける区分点の数 m_x ,m_y は，それぞれ 21 と仮定する．

(1) 本手法の収束性と精度比較

本解析手法の収束性と解析精度を検討するために，対称な等分布ステップ荷重 q を受ける周辺単純支持された正方形薄板(SS-SS, a/b=1)の中央点での動たわみ $w(\tau)$ および曲げモーメント $Mx(\tau)$ の応答曲線に与える採用モード数 r の影響が**図- 2** に示してある．比較のために，薄板理論に基づく Navier 法と modal analysis 法を用いて定式化した級数解が示してある．ただし，無次元載荷時間 τ_1 は 0.25，ステップ時間 $\Delta\tau$ は 0.01， b/h は 1000 に仮定し，採用モード数 r は 1，11，21 に変化させている．また級数解は 21 の採用モード数を用いた．これより，動たわみ曲線に与える r の影響は， 1 次振動モードが支配的であり，採用モード数を高めても応答曲線に与える変化が顕著に見られない．一方，曲げモーメントの応答曲線は，１次振動モードに大きく依存するが，局所変形を伴う他の高次の振動モードの影響が現れる．級数解と比較して，よく一致した結果が得られている．

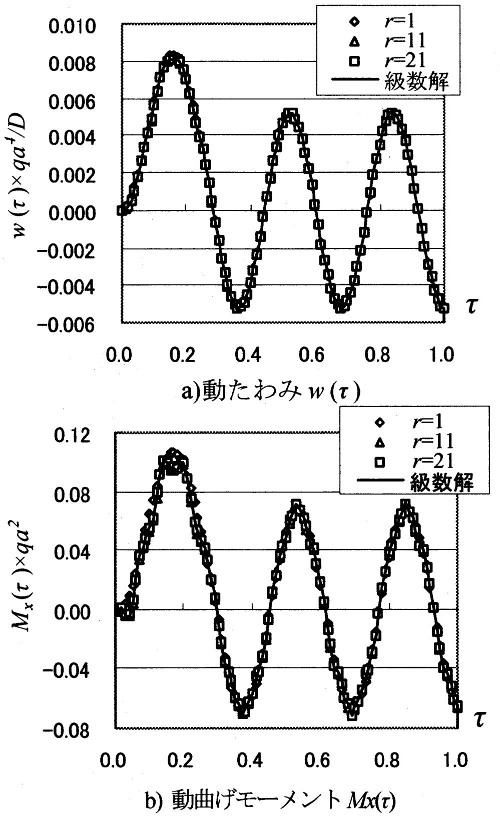


図-2 応答曲線に与える採用モード数 r の影響；b/h=1000,τ_1=0.25

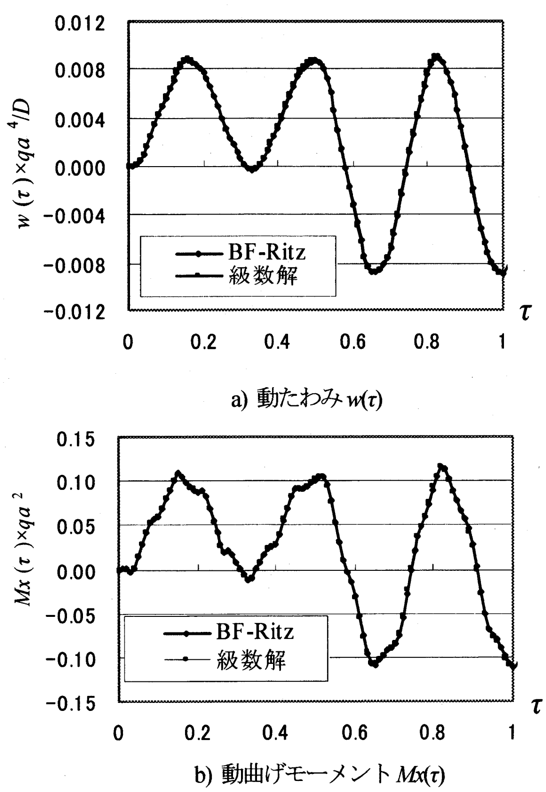


図-3 等分布ステップ荷重を受ける周辺固定板の精度比較：b/h=10,τ_1=0.25

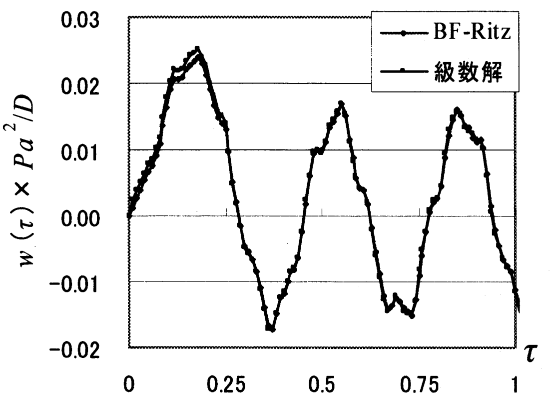


図- 4 板中央点に集中ステップ荷重を受ける正方形板の精度比較；b/h=10,τ_1=0.25

表-2 等分布ステップ荷重を受ける正方形板の動たわみ$w(\tau)$の精度比較：τ_1=0.5,SS-SS

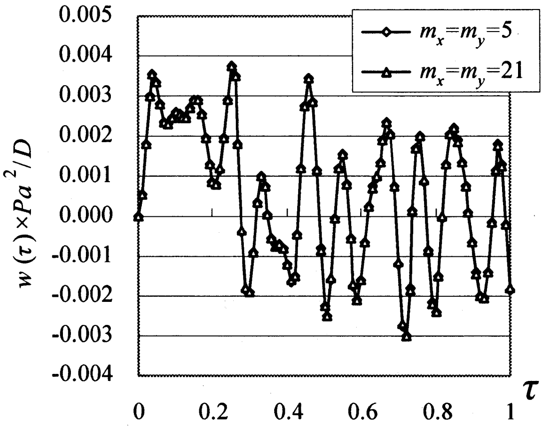
τ	b/h=10		b/h=1000	
	BF-Ritz	級数解	BF-Ritz	級数解
0.05	0.00168	0.00170	0.00179	0.00179
0.1	0.00562	0.00568	0.00559	0.00558
0.15	0.00866	0.00875	0.00808	0.00808
0.2	0.00767	0.00773	0.00701	0.00701
0.25	0.00396	0.00395	0.00324	0.00323
0.3	0.00068	0.00065	0.00015	0.00015
0.35	0.00022	0.00024	0.00058	0.00057
0.4	0.00314	0.00322	0.00422	0.00422
0.45	0.00732	0.00743	0.00774	0.00774
0.5	0.00864	0.00874	0.00789	0.00789
	qa^4/D		qa^4/D	

図- 3は，等分布ステップ荷重を受ける周辺単純支持された正方形Mindlin板(SS-SS, a/b = 1)の中央点での動たわみ$w(\tau)$および曲げモーメント$Mx(\tau)$の応答曲線の精度比較を示している．比較のために，Mindlin 板理論に基づくNavier 法とmodal analysis 法[1)]を用いて求めた級数解が示してある．ただし，b/h =10, τ_1=0.5, 採用モード数rは21と仮定している．また，同様にして，**図- 4**には，板中央(ξ_0=η_0=0.5)に集中ステップ荷重Pを受ける周辺単純支持された正方形Mindlin板(SS-SS, a/b =1)の中央点での動たわみ曲線$w(\tau)$の精度比較が示してある．ただし，b/h=10,τ_1=0.25, 採用モード数rは21に仮定している．

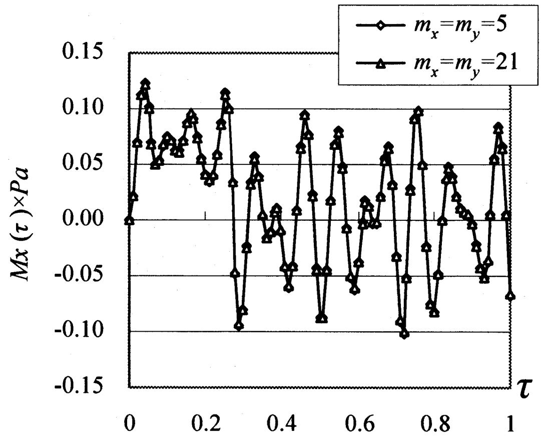
図- 3および**図- 4**に示した精度比較より，本手法で求めた応答曲線が，Mindlin 板理論に基づくNavier 法とmodal analysis 法を用いて求めた級数解とよく一致している．

また，**表- 2**は，等分布ステップ荷重を受ける周辺単純支持された正方形板中央点の動たわみの応答値の精度比較を示している．ただしb/hは10と1000に仮定し，τ_1=0.5, 採用モード数rは21である．これより，本手法で求めた値は，級数解とよく一致した結果を示している．

次に，偏心する集中ステップ荷重を受ける周辺固定正方形板（a/b=1, b/h=10）の載荷点（ξ=0.25, η=0.75）でのたわみ応答曲線$w(\tau)$と曲げモーメントの応答曲線$Mx(\tau)$の収束性に与える区分点の数m_x×m_yの影響が，**図- 5**に示されている．ここで，集中ステップ荷重は偏心位置(ξ_0=0.25,η_0=0.75）に作用させ，無次元載荷時間τ_1は0.25に仮定している．また採用モードの項数は6に仮定し，区分点の数は5×5と21×21に変化させている．これより，たわみおよび曲げモーメントの応答曲線に与える区分点の数の影響はさほど顕著にみられない．



a) 動たわみ$w(\tau)$



b) 動曲げモーメント$Mx(\tau)$

図-5 偏心する集中ステップ荷重を受ける固定板の応答曲線に与える区分点の数の影響 ：r=6,b/h=10, CC-CC,τ_1=0.25,ξ_0=0.25,η_0=0.75,ξ=0.25,η=0.75

図- 6には，**図- 5**で述べた偏心する集中ステップ荷重(ξ_0=0.25,η_0=0.75）を受ける周辺固定正方形板（a/b=1,b/h=10）の載荷点でのたわみ応答曲線$w(\tau)$と曲げモーメントの応答曲線$Mx(\tau)$の収束性に与える採用モードの項数rの影響が示してある．ここでモードの採用項数は21から51まで変化させ，また区分点の数は21×21と仮定している.この図より，偏心ステップ荷重を受けると，等分布載荷の場合と異なり，高次のモードが卓越してくるが，モードの採用項数を51程度に採れば，ほぼ収束値が得られている．

したがって，以後の計算例では，対称荷重ではモードの採用項数を21に仮定し，偏心荷重では51を採用する．

(2) ステップ荷重を受ける厚板の動的特性

図-7には，等分布ステップ荷重を受ける周辺固定された正方形板（CC-CC, a/b=1）の中央点での1次モード，6次モードおよび11次モード別に求めた動たわみ曲線が示してある．これらのモードは，それぞれ図に示すように板中央点の動たわみに関係する対称モードである．ただし，b/h=10とτ_1=0.5に仮定している．

この図より，1次モードから求めた応答曲線は，他の高次モードから求めた応答値と比較して，非常に大きな値を示している．

次に，等分布ステップ荷重を受ける平板の動たわみの最大応答値に対するモード別に求めた応答値の影響を調べるために，採用モード数rを11に仮定して，特定の時刻τで求めた最大応答値に対する各モードの応答値の影響率が，**図-8**に示してある．ただし，b/h =10とτ_1=0.5に仮定し，境界条件は，それぞれ周辺固定（CC-CC）と周辺単純支持（SS-SS）としている．

これより，最大動たわみに与える1次モードの影響率は，95%以上を示し，高次モードの影響が非常に小さくなっている．また，周辺固定板の1次モードの影響率は，単純支持板の値と比較して，若干大きく現れている．

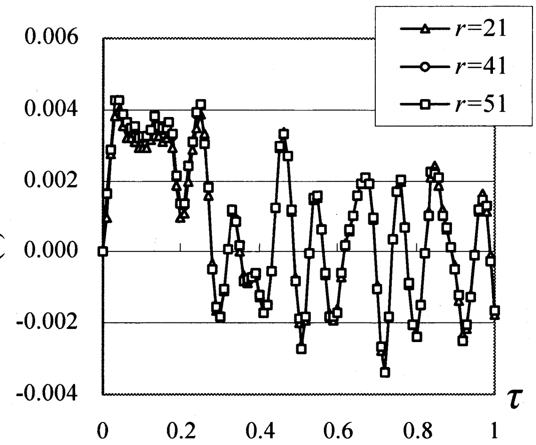
同様にして，**図-9**には，集中ステップ荷重を受ける周辺固定板の載荷点での動たわみの最大応答値に対するモード別に求めた応答値の影響率に与える集中ステップ荷重の載荷位置（ξ_0, η_0）の影響が示してある．ただし，b/h =10とτ_1=0.5に仮定している．この図より，集中ステップ荷重を中央点に載荷した場合は，1次のモードの影響率が約90%を示し，他のモードと比べ卓越している．

一方，偏心する集中ステップ荷重を受ける場合には，2次モードが約40%,4次モードが約30%を示し，対称載荷した場合と比べて，比較的高次のモードの影響を受け易いことがわかる．

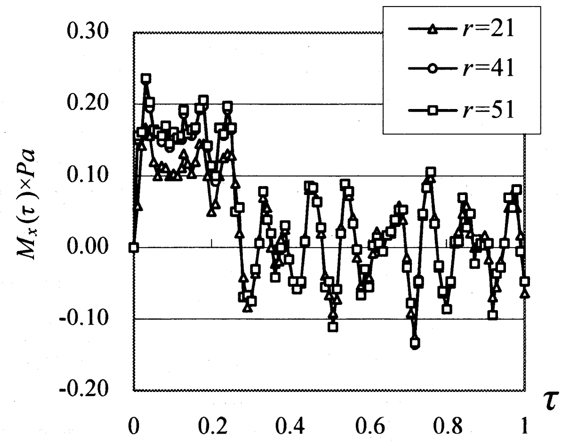
図-10には，等分布ステップ荷重を受ける周辺固定された正方形板（CC-CC, a/b–1）の中央点でのたわみと曲げモーメントの動的応答曲線に与える幅厚比b/hの影響が示してある．ただし，r=21, τ_1=0.5に仮定している．

これより，動たわみ曲線に与える幅厚比の影響は顕著に見られ，b/hが小さくなると，横せん断変形の影響により，応答値が大きく現れる．一方，曲げモーメントの最大応答値に与えるb/hの影響は，動たわみの値と比較して，さほど大きく見られない．

図-11には，等分布ステップ荷重を受ける周辺固定された正方形板の中央点での動たわみ及び曲げモーメント応答の動的増幅率DAF（動的最大応答値/静的最大値）に与えるステップ荷重の載荷時間τ_1と幅厚比b/hの影響が示してある．ここで，b/hは1000,20,10と仮定し，τ_1は0.1から1まで変化させている．これらの図より，周辺固定された正方形板では，動たわみの増幅率DAF_wの値は，τ_1の値の増大とともに大きな値を示すが，τ_1の値が0.1を越えると一定の値を示し，また，b/hの値が大きいほど，DAF_wが大きな値を示している．



a) 動たわみ $w(\tau)$

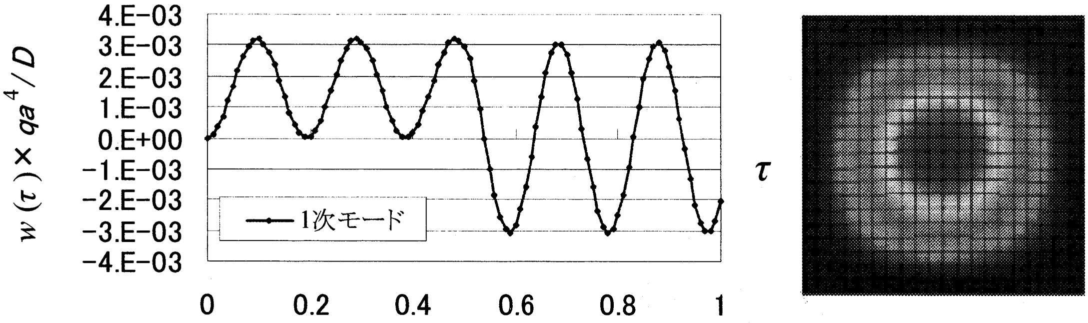


b) 動曲げモーメント $Mx(\tau)$

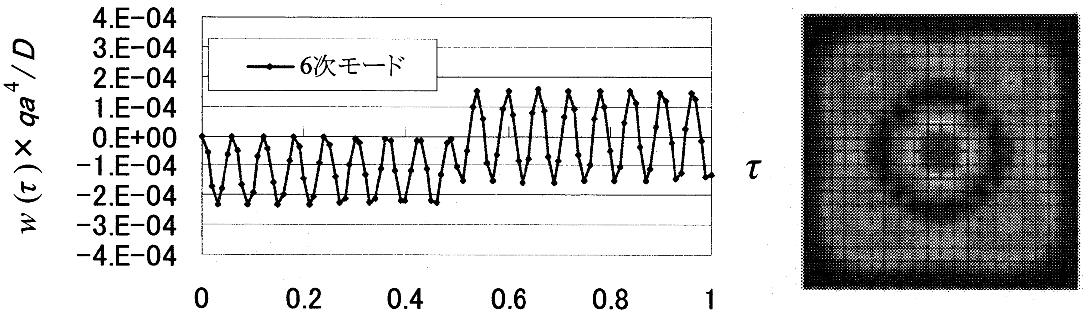
図-6 偏心された集中ステップ荷重を受ける固定板の応答曲線に与える級数項rの影響：τ_1=0.25
m_x=m_y=21, b/h=10, ξ_0=0.25, η_0=0.75, ξ=0.25, η=0.75

一方，曲げモーメントのDAF_{Mx}は，τ_1の値が0.4を境にして，異なった性状を示す．τ_1の値が0.4より小さくなると，DAF_{Mx}に与えるb/hの影響は，0.1を越えると板厚が薄いほど，大きな値を示す．τ_1の値が0.4を越えると，板厚の大きさに関わらずほぼ一定になり，板厚が厚いほどDAF_{Mx}の値が増大する傾向を示している．

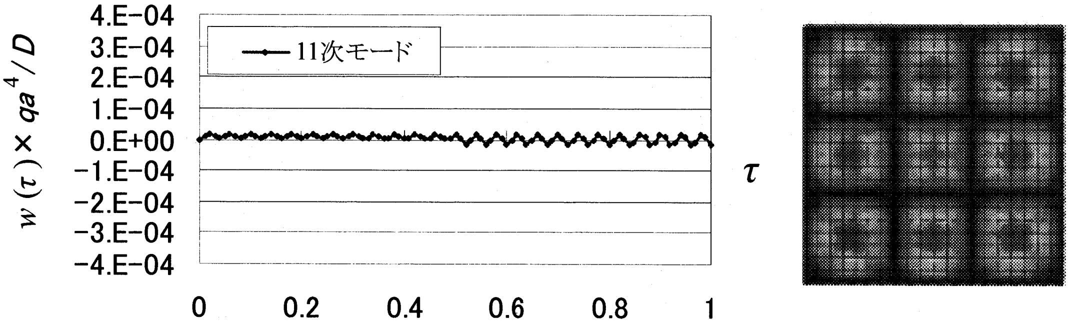
図-12には，等分布ステップ荷重を受ける周辺固定された正方形板の中央点での動たわみ$w(\tau)$および曲げモーメント応答$Mx(\tau)$および固定辺中央点でのせん断力応答$Sx(\tau)$の動的増幅率（DAF）に与えるステップ荷重の載荷時間τ_1の影響が示してある．ここで，b/hは10と仮定し，τ_1は0.1から1まで変化させている．これより，τ_1が0.5を超えると動たわみ及び断面力のDAF値は，τ_1の値に依存せず，ほぼ一定の値を示すが，τ_1の値が小さいと，DAF値も小さくなる．また，曲げモーメント応答のDAF_{Mx}の値は，動たわみのDAF_wやせん断力のDAF_{Sx}の値と比較して，大きな値を示し，またDAF_{Mx}>DAF_w>DAF_{Sx}の関係が読み取れる．



a) 1次モードのたわみの応答曲線及び振動モード



b) 6次モードのたわみの応答曲線及び振動モード



c) 11次モードのたわみの応答曲線及び振動モード

図-7 等分布ステップ荷重を受ける周辺固定板の各モード別の動たわみ曲線 : b/h=10, τ_1=0.5

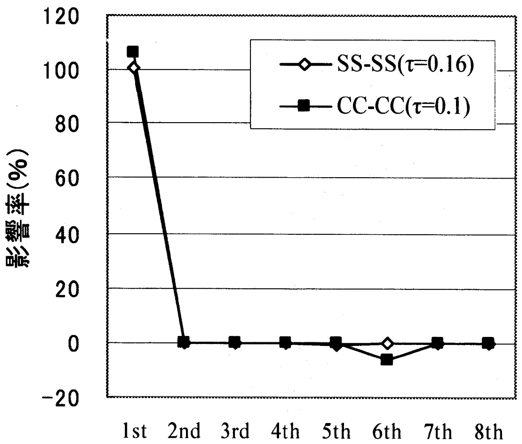


図-8 各モードの応答値の影響率に与える境界条件の影響 : b/h=10, τ_1=0.5

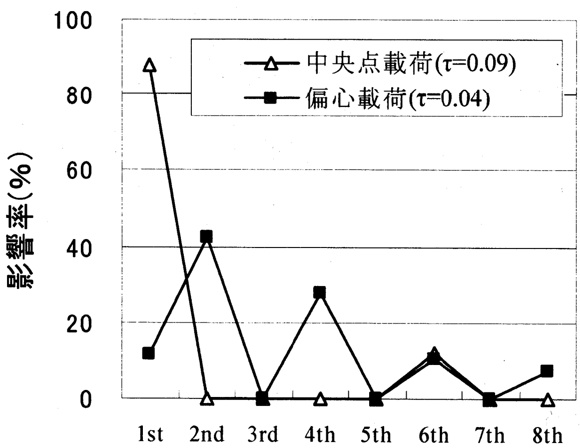
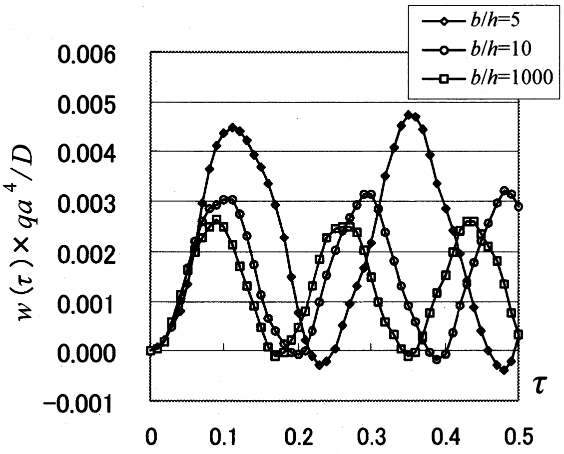
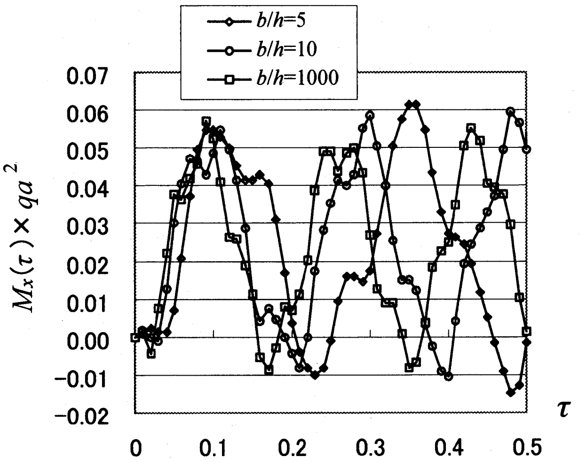


図-9 各モードの応答値の影響率に与える集中ステップ荷重の載荷位置の影響 : b/h=10, τ_1=0.5, CC-CC
中央点載荷(ξ_0=η_0=0.5), 偏心載荷(ξ_0=0.25, η_0=0.75)

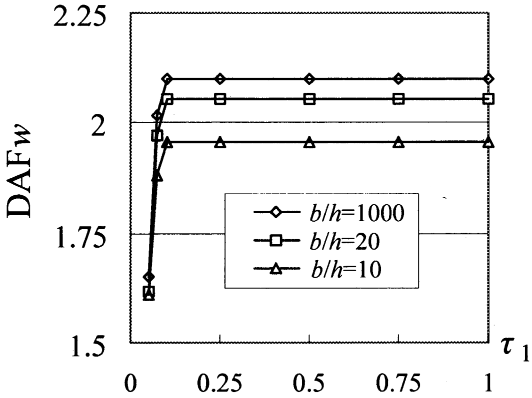


a)動たわみ $w(\tau)$

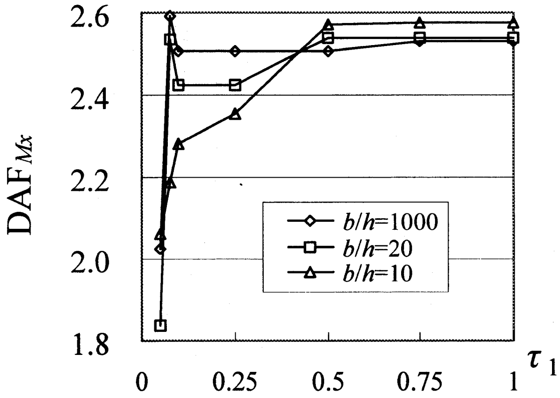


b) 動曲げモーメント $Mx(\tau)$

図-10 周辺固定正方形板の中央点での応答曲線に与える幅厚比 b/h の影響：τ_1=0.5



a)動たわみ $w(\tau)$ のDAF_w



b) 曲げモーメント $Mx(\tau)$ のDAF_{Mx}

図-11 等分布ステップ荷重を受ける周辺固定板の中央点での動たわみ、動曲げモーメントのDAF

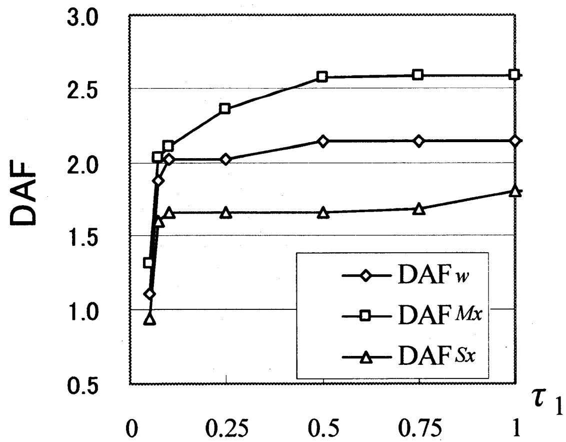


図-12 等分布ステップ荷重を受ける周辺固定板のDAFに与えるたわみおよび断面力の影響：b/h=10

図-13には，周辺固定された正方形板（CC-CC, a/b=1）の中央点での動たわみの DAF_w に与えるパルス形状の影響がそれぞれ示してある．ここで，パルス形状として，長方形パルスと正弦パルスを仮定し，b/h は10である．

この図より，長方形パルスの DAF_w の値は正弦パルスによる結果より常に大きくなるが，τ_1 が0.5を超えると，それぞれ一定な値を示している．一方，正弦パルスを受ける厚板の DAF_w の値は，τ_1 が0.5以内で，最大値を持つ分布性状を示す．

4. あとがき

本論文では，BF-spline Ritz法とmodal analysis法を用いて，ステップ荷重を受けるMindlin板の動的応答解析を行い，本手法の解の収束性や解析精度について検討を行い，本手法の有用性及び解の妥当性について明らかにした．また，周辺固定板の動的応答に与えるステップ荷重の載荷時間 τ_1 や幅厚比 b/h などの影響についても明らかにしている．

本研究で得られた主な結果を示すと，以下のようになる．

1) BF-spline Ritz 法と modal analysis 法に基づく応答解析法で求めた解の収束性は，区分点の数にはさほど依存しないが，非対称なステップ荷重を受ける場合には，比較的高次のモードが誘発されるので，採用するモードの項数は 51 程度にとる必要がある．
2) 対称なステップ荷重を受ける周辺固定板の最大動たわみに与える 1 次モードの影響率は，95%以上を示し，高次モードの影響が非常に小さくなっている．一方，偏心する集中ステップ荷重を受ける周辺固定板の応答値の影響率は，2 次モードが約 40%，4 次モードが約 30%を示し，高次のモードの影響が顕著に現れる．
3) 動たわみの増幅率 DAF_w の値は，τ_1 の値の増大とともに大きな値を示すが，τ_1 の値が 0.1 を越えると一定の値を示し，また，b/h の値が大きいほど，DAF_w が大きな値を示している．
4) 周辺固定された正方形板の曲げモーメントの DAF_{Mx} は，τ_1 の値が 0.4 を越えると，板厚の大きさに関わらず一定になり，板厚が厚いほど DAF_{Mx} の値が増大する傾向を示している．
5) 等分布ステップ荷重を受ける周辺固定板の曲げモーメント応答の DAF_{Mx} の値が，動たわみの DAF_w やせん断力の DAF_{Sx} の値と比較して，大きな値を示し，また $DAF_{Mx} > DAF_w > DAF_{Sx}$ の関係が読み取れる．
6) また，長方形パルスの応答値は正弦パルスによる結果より常に大きくなるが，τ_1 が 0.5 を超えると，それぞれ一定な値を示している．一方，正弦パルスを受ける厚板の DAF_w の値は，τ_1 が 0.5 以内で，最大値を持つ分布性状を示す．

なお，モードの重ね合わせに基づく本手法は，線形かつ弾性平板の動的応答解析法であるので，適用の制限を受けるが，今後，種々の非線形な応答問題への適用範囲を広げるために，Newmark の β 法に基づく時刻歴応答解析法の定式化について検討して行きたい．

最後に，貴重なご意見を頂いた査読者に，謝意を表します．

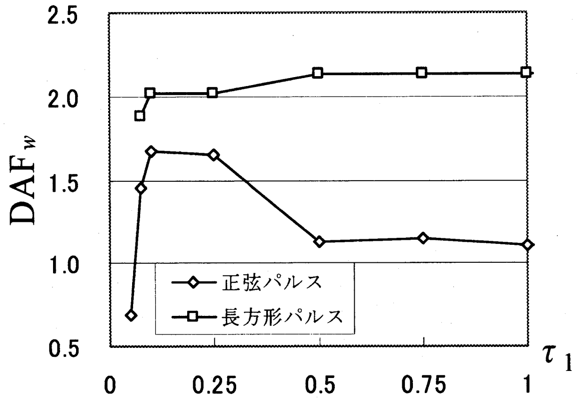


図-13 周辺固定板正方形の中央点での動たわみの DAF_w に与えるパルス形状の影響：b/h=10,τ_1=0.5

参考文献

1) Hinton, E.: Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells. Pineridge Press, 1988.
2) Rock, T. and Hinton, E.; Free vibration and transient response of thick and thin plates using the finite element Engeering,Vol.3,pp.51-63,1974.
3) Pica, A. and Hinton, E.; Transient and pseudo-transient analysis of Mindlin plates; International Journal for Numerical Method in Engeering. Vol. 15, pp.189-208, 1980.
4) Rao, S.S.: Mechanical vibrations. Addison-Wesley Publishing Company, 1986.
5) Reismann, H. and Lee, Y.; Forced motion of rectangular plates,In Proc.4TH Biennial Southestern Conf. Theoretical and Applied Mechanics,Tulane University,New Orleans,Pergamon Press, New York, 1968.
6) Mindlin, R.D.: Influence of rotary inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics* Vol.18, pp.1031-1036, 1951.
7) 名木野晴暢,水澤富作,三上 隆: BF-spline Ritz 法を用いた長方形 Mindlin 板の振動解析．応用力学論文集, Vol. 9, pp. 341-352, 2006.
8) 水澤富作,和田裕明,名木野晴暢: ,BF-spline Ritz 法を用いた厚肉斜板の自由振動解析．応用力学論文集, Vol. 10, pp. 109-119, 2007.
9) 水澤富作: BF-spline Ritz 法を用いた固定と自由辺を有する長方形 Mindlin 板の曲げ解析．構造工学論文集, Vol.53A, pp. 1-12 , 2007.
10) Boor, C. D.: On calculating with B-spline, *Journal of Approximation Theory*, Vol.6, pp.50-62, 1972.
11) Liew, K.M., Wang, C.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.: Vibration of Mindlin plates – Programming the p-Version Ritz method, Elsevier Science, Oxford, 1998.
12) 和田裕明,水澤富作: ,BF-spline Ritz 法を用いた Mindlin 板の動的応答解析．H.19 年度土木学会中部支部研究発表会, I-36, pp. 69-70, 2008.

(2008 年 4 月 14 日　受付)