揺らぎを持つ半無限弾性波動場における 領域積分方程式を用いた逆散乱解析手法の展開

Inverse Scattering Analysis of Elastic Half Wave Field by means of the Volume Integral Equation

岩崎健太郎*・東平光生** Kentaro IWASAKI, Terumi TOUHEI

*正会員 工(修) (株)システムインテグレータ(〒 336-0027 埼玉県さいたま市南区沼影 1-10-1 ラムザタワー 7F) **正会員 工博 東京理科大学教授 理工学部 土木工学科(〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

A method for the inverse scattering analysis is presented by means of the volume integral equation. The wave field dealt here is an elastic half space having fluctuations for Lamé constants. The fluctuation of Lamé constants are extracted from the volume integral equation, which is to be solved by FFT and Krylov subspace iterative technique. Several numerical calculations are carried out to verify the present method. It is found from the numerical results that the present method is almost successful to determine the fluctuation of the Lamé constants from the scattered wave field.

Key Words : Volume Integral Equation, Krylov Subspace Iterative Method, FFT, Inverse Scattering Problem, Elastic Half Wave Field

1. はじめに

波動方程式を計算機上で解く,いわゆる数値シミュ レーションは、地震波動解析や環境振動の予測などの 分野で土木工学とも深く関わっている.

積分方程式で表現された波動方程式の解は放射条件 を満足することから,波動方程式に関する研究は,1980 年代より活発に行われてきた¹⁾.また積分方程式の研究 は,これまで主として境界積分方程式に着目が集まっ てきた.これは,境界積分方程式は対象とする領域の 境界の積分で解表現が可能であり,離散化で得られる 行列の次元が小さくなることが期待されてきたためで ある.

その一方,領域積分を用いた方程式による波動場の 数値シミュレーションは,領域積分方程式の離散化に よって大次元な密行列が生成されるため,ごくわずか の研究²⁾³⁾を除き注目はされてきていない.しかし,領 域積分方程式は量子論などで Lippmann–Schwinger 方 程式として理論展開上で重要な役割を果たしてきた⁴⁾. これは Lippmann–Schwinger 方程式が波動方程式の解 と媒質の揺らぎを直接結びつけることが可能であるた めである.この意味で領域積分方程式が数値解析手法 として有力なツールとなるのであれば,理論と実用の 両面で領域積分方程式の利点がさらに生かせるものと 期待できる.そして,この利点を生かすことで,入射 波が揺らぎを通過した際に発生する散乱波を求めるこ とができる.また,さらに散乱波から媒質の揺らぎを 推定する逆散乱解析も可能となる.

こうした背景の中で,全無限弾性波動場における波数 領域の領域積分方程式に対して FFT(ここでは acml ラ イブラリー⁵⁾を用いる)と Krylov 部分空間反復解法⁶⁾ を組み合わせる手法を提案した⁷⁾⁸⁾.この手法の特徴は, 解くべき方程式を演算子で表現し,それを直接 Krylov 部分空間反復解法で解くことにある.この結果,全無限 弾性波動場における散乱および逆散乱解析において非常 に精度の良い解が短い時間で得られることがわかった.

また、半無限弾性波動場における領域積分方程式を 用いた散乱解析手法についてまとめた論文⁹⁾において 次の3つのことが課題として挙げられている、すなわ ち,一般化 Fourier 変換のユニタリ性の証明,逆散乱解 析の数値シミュレーション, 一般化 Fourier 変換の高速 変換アルゴリズムの構築である.本論文の目的は,以 上の課題の一つである半無限弾性波動場における領域 積分方程式に対して逆散乱解析手法および数値シミュ レーション結果を提示することである. なお, 境界積 分方程式を用いた散乱波動場から逆に媒質中のクラッ クなどを検出する、いわゆる逆散乱問題についての研 究は、これまでにも精力的に行われてきた. そして、多 数の論文や成書(たとえば¹⁰⁾¹¹⁾)にまとめられている. しかし, 媒質の揺らぎの広がりを求める逆散乱解析は, これまで実証されてきていない.本論文で展開する手 法は、いくつかの制約条件があるものの、媒質の揺ら ぎを推定するものであり、本手法の有効性を数値計算 によって実証する.

2. 半無限弾性波動場における領域積分方程 式の定式化

2.1 問題の定義

図-1に示すように鉛直下向きに x_3 軸をとり, $x_3 = 0$ での $x_1 - x_2$ 平面を地表面とする.このとき,点震源 で発生した入射波が,弾性定数の変動関数から構成さ れる媒質の揺らぎに照射し,散乱波を生じる問題を扱 う.ここで,地盤中の情報が既知のとき散乱波を求め る問題を散乱問題,逆に散乱波が既知のとき媒質の揺



図-1 本論文の問題の概要

らぎを推定する問題を逆散乱問題と定義する. 定式化にあたりLamé定数は次のように設定する.

$$\begin{cases} \lambda(\vec{x}) &= \lambda_b + \tilde{\lambda}(\vec{x}) \\ \mu(\vec{x}) &= \mu_b + \tilde{\mu}(\vec{x}), \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3_+) \end{cases}$$
(1)

ここに, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ であり, 添字により座標成分 を表す.また, $\mathbb{R}^3_+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ は 3 次元の半無限空 間を表す.さらに, λ_b および μ_b は Lamé 定数が空間 的に一定の部分でバックグラウンドの Lamé 定数と呼 ぶ.これに対し, $\hat{\lambda}(\vec{x})$ および $\hat{\mu}(\vec{x})$ は Lamé 定数の変 動部分であり, 媒質の揺らぎと呼ぶこともある.

場の時間因子を $exp(-i\omega t)$ とした場合の波動方程式 は以下のようになる.

$$(\lambda_b + \mu_b)\partial_i\partial_j u_j + \mu_b\partial_j\partial_j u_i + \rho\omega^2 u_i = N_{ij}u_j \quad (2)$$

また,自由表面である $x_3 = 0$ での境界条件は次のよう に表される.

$$\begin{cases} \sigma_{31} = \mu_b(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3) = 0\\ \sigma_{32} = \mu_b(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3) = 0\\ \sigma_{33} = \lambda_b(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) + 2\mu_b\partial_3 u_3 = 0 \end{cases}$$
(3)

ここで、 ω は角振動数、tは時間、 ρ は質量密度、 σ_{ij} は応力、 ∂ は偏微分の演算子であり、その添字は偏微分 を行う座標成分を表す.また、 N_{ij} は媒質の不均質性 に関連して現れる演算子で次式で表現される.

$$N_{ij} = -(\tilde{\lambda}(\vec{x}) + \tilde{\mu}(\vec{x}))\partial_i\partial_j - \tilde{\mu}(\vec{x})\delta_{ij}\partial_k\partial_k -\partial_i\tilde{\lambda}(\vec{x})\partial_j - \delta_{ij}\partial_k\tilde{\mu}(\vec{x})\partial_k - \partial_j\tilde{\mu}(\vec{x})\partial_i \quad (4)$$

ただし δ_{ij} は Kronecker のデルタで次のように定義される.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$
(5)

式 (2) および (4) に示すように,繰り返し現れる添字 に関しては総和規約を用いることにする.

2.2 波数領域の領域積分方程式を定式化するための Green 関数の導出

Green 関数は次のように定義される.

$$L_{ij}G_{jk}(\vec{x},\vec{y}) = -\delta_{ik}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{6}$$

$$L_{ij} = (\lambda_b + \mu_b)\partial_i\partial_j + \delta_{ij}\mu_b\partial_k\partial_k + \delta_{ij}\rho\omega^2 \qquad (7)$$

であり, $\delta(\vec{x} - \vec{y})$ は Dirac のデルタ関数で

$$\begin{cases} \delta(\vec{x} - \vec{y}) = \begin{cases} \infty & (\vec{x} = \vec{y}) \\ 0 & (\vec{x} \neq \vec{y}) \end{cases} \\ \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{x} = 1 \end{cases}$$
(8)

と定義される.また,式(6)を水平成分である $x_1 - x_2$ について Fourier 変換するために 2 次元空間の弾性波 動場における空間領域と波数領域の関数を結びつける Fourier 変換を次のように定義する¹²⁾.

$$\begin{cases} (\mathscr{F}_{2}u) (\xi_{1}, \xi_{2}) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{2}} u(x_{1}, x_{2}) \exp(-i(\xi_{1}x_{1} + \xi_{2}x_{2})) dx_{1} dx_{2} \\ (\mathscr{F}_{2}^{-1}\hat{u}) (x_{1}, x_{2}) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{2}} \hat{u}(\xi_{1}, \xi_{2}) \exp(i(\xi_{1}x_{1} + \xi_{2}x_{2})) d\xi_{1} d\xi_{2} \end{cases}$$

$$(9)$$

ここで, \mathscr{P}_2 および[^]は Fourier 変換を, \mathscr{P}_2^{-1} は Fourier 逆変換を示す. $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ は空間領域の座標, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ は波数領域の座標である.

このとき,式(6)を $x_1 - x_2$ について Fourier 変換すると次式を得る.

$$\hat{L}_{ij}\hat{G}_{jk}(\vec{x},\vec{y}) = -\frac{1}{2\pi}\delta_{ik}\int_{\mathbb{R}^2}\delta(\vec{x}-\vec{y})\exp(-i(\xi_1y_1+\xi_2y_2))dx_1dx_2 = -\frac{1}{2\pi}\delta_{ik}\exp(-i(\xi_1y_1+\xi_2y_2))\delta(x_3-y_3)$$
(10)

ここで, $\vec{x} = (\xi_1, \xi_2, x_3)$ である.また,Green 関数の 成分を P-SV 成分と SH 成分に分解することを考える. このとき以下のように変形できる⁹⁾.

$$\hat{G}_{jk} = T_{jl}^* \hat{G}_{lk}^* \tag{11}$$

ここに

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ -i\xi_1/\xi_r & -i\xi_2/\xi_r & 0\\ -i\xi_2/\xi_r & i\xi_1/\xi_r & 0 \end{bmatrix}$$
(12)

また,*は共役転置行列を示し, $\xi_r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ である.このとき,式(10)に式(11)を代入し,両辺にTを左から乗じることで次のようになる.

$$T_{mi} \hat{L}_{ij} T_{jl}^* \hat{G}_{lk}^*$$

= $-\frac{1}{2\pi} T_{mk} \exp(-i(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2)) \delta(x_3 - y_3) (13)$

ここで, 上式の左辺において

$$T_{mi}\hat{L}_{ij}T_{jl}^* = Q_{ml} + \rho\omega^2 \delta_{ml} \tag{14}$$

と表現でき⁹⁾, このとき Q_{ij} は

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}$$
(15)

$$\begin{cases}
Q_{11} = (\lambda_b + 2\mu_b)\partial_3^2 - \mu_b\xi_r^2 \\
Q_{12} = -(\lambda_b + \mu_b)\xi_r\partial_3 \\
Q_{21} = (\lambda_b + \mu_b)\xi_r\partial_3 \\
Q_{22} = \mu_b\partial_3^2 - (\lambda_b + 2\mu_b)\xi_r^2 \\
Q_{33} = \mu_b\partial_3^2 - \mu_b\xi_r^2
\end{cases}$$
(16)

と表現される. さらに, 鉛直方向である *x*₃ 方向の Green 関数は次のように定義される.

$$[Q_{ij} + \rho \omega^2 \delta_{ij}] g_{jk}(x_3, y_3) = -\delta_{ik} \delta(x_3 - y_3)$$
(17)

これより, g_{ik}(x₃, y₃) は表面波と実体波により

$$g_{ik}(x_3, y_3) = \sum_{\vec{\xi} \in \tau_p} \frac{V_{ij}(\vec{\xi}, x_3) V_{kj}^T(\vec{\xi}, y_3)}{\mu \xi_3^2 - \rho \omega^2 + i\epsilon} + \int_{\xi_r}^{\infty} \frac{V_{ij}(\vec{\xi}, x_3) V_{kj}^T(\vec{\xi}, y_3)}{\mu \xi_3^2 - \rho \omega^2 + i\epsilon} d\xi_3 \quad (18)$$

と表せる.ここに ϵ は無限小の正数であり,時間因子 をとったときに進行波となるように特異点の避ける方 法を定め, τ_p は Rayleigh 波の波数の集合である⁹⁾.ま た, $V_{ij}(\vec{\xi}, x_3)$ は半無限弾性波動場における固有関数で あり⁹⁾,添字の*T* は転置行列を表す.最終的に Green 関数は,次のように表現される.

$$G_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{\mathbb{R}^2} d\xi_1 d\xi_2 \sum_{\vec{\xi} \in \tau_p} \frac{\Lambda_{ik}(\vec{\xi}, \vec{x}) \Lambda_{jk}^*(\vec{\xi}, \vec{y})}{\mu \xi_3^2 - \rho \omega^2 + i\epsilon} + \int_{\mathbb{R}^2} d\xi_1 d\xi_2 \int_{\xi_r}^\infty \frac{\Lambda_{ik}(\vec{\xi}, \vec{x}) \Lambda_{jk}^*(\vec{\xi}, \vec{y})}{\mu \xi_3^2 - \rho \omega^2 + i\epsilon} d\xi_3$$
(19)

ここに,

$$\Lambda_{ik}(\vec{\xi}, \vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \exp(i\xi_1 x_1 + i\xi_2 x_2) T_{ij}^* V_{jk}(\vec{\xi}, x_3) \quad (20)$$

である.

2.3 波数領域の領域積分方程式

媒質の揺らぎを支配方程式の非同次項とみなし領域 積分方程式を構成することで次式を得る.

$$u_{i}(\vec{x}) = f_{i}(\vec{x}) - \int_{\mathbb{R}^{2}} \int_{0}^{\infty} G_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) N_{jk}(\vec{y}) u_{k}(\vec{y}) d\vec{y} \quad (21)$$

ここに, $u_i(\vec{x})$ は全波動場, $f_i(\vec{x})$ は入射波である.また入射波 $f(\vec{x})$ は、点震源からの波動であり、次のように置ける.

$$f_i(\vec{x}) = G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_s) p_j \mathscr{A}$$
(22)

ここに、 \mathscr{A} は入射波の振幅、 p_j は方向ベクトル、 \vec{x}_s は 震源位置である. さらに散乱波 v_i を

$$v_i(\vec{x}) = u_i(\vec{x}) - f_i(\vec{x})$$
 (23)

と定義したとき,式(21)は次のようになる.

$$v_{i}(\vec{x}) = -\int_{\mathbb{R}^{2}} \int_{0}^{\infty} G_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) N_{jk}(\vec{y}) f_{k}(\vec{y}) d\vec{y} -\int_{\mathbb{R}^{2}} \int_{0}^{\infty} G_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) N_{jk}(\vec{y}) v_{k}(\vec{y}) d\vec{y}$$
(24)

式 (24) の領域積分方程式に Fourier 変換を施す.しか し、半無限弾性波動場における波動に対しては、自由表 面が存在し、その面に対して垂直な x₃ 方向に Fourier 変換することは不可能である.そこで、ここでは空間 領域と波数領域の関数を結びつける 3 次元半無限弾性 波動場における Fourier 変換 (以降の議論では一般化 Fourier 変換⁹⁾と呼ぶ) を次のように定義する.

$$\begin{cases} \left(\mathscr{U}u_{j}\right)(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^{3}_{+}} \Lambda_{kj}^{*}(\vec{\xi},\vec{x})u_{k}(\vec{x})d\vec{x} \\ \left(\mathscr{U}^{-1}u_{j}\right)(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^{2}} \sum_{\vec{\xi}\in\tau_{p}} \Lambda_{jk}(\vec{\xi},\vec{x})\hat{u}_{k}(\vec{\xi})d\xi_{1}d\xi_{2}(25) \\ + \int_{\mathbb{R}^{2}} \int_{\xi_{r}}^{\infty} \Lambda_{jk}(\vec{\xi},\vec{x})\hat{u}_{k}(\vec{\xi})d\vec{\xi} \end{cases}$$

ここに、 \mathscr{U} および \mathscr{U}^{-1} は一般化 Fourier 変換および 逆変換の演算子を表す.また、 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$ は空間領域のベクトル、 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3_+$ は波数領 域のベクトルであり、 x_3 、 ξ_3 は正の値のみを持つ.

このとき,式 (24) に一般化 Fourier 変換を適用する と次のようになる.

$$\hat{v}_{i}(\vec{\xi}) = -\hat{h}(\vec{\xi})\mathscr{U}_{ij}N_{jk}(\vec{x})\mathscr{U}_{kl}^{-1}\hat{f}_{l}(\vec{\xi}) -\hat{h}(\vec{\xi})\mathscr{U}_{ij}N_{jk}(\vec{x})\mathscr{U}_{kl}^{-1}\hat{v}_{l}(\vec{\xi})$$
(26)

ここに、 $\hat{h}(\vec{\xi})$ は Green 関数を一般化 Fourier 変換する際に現れる関数で

$$\hat{h}(\vec{\xi}) = \frac{1}{\mu\xi_3^2 - \rho\omega^2 + i\epsilon}$$
(27)

である.また,波数領域の領域積分方程式の適用においては,式 (26) に示したように f の一般化 Fourier 変換を用いる.このとき $\hat{f}_i(\vec{\xi})$ は次のようになる.

$$\hat{f}_{l}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^{3}_{+}} \Lambda^{*}_{il}(\vec{\xi}, \vec{x}) f_{i}(\vec{x}) d\vec{x}$$
$$= \hat{h}(\vec{\xi}) \Lambda^{*}_{jl}(\vec{\xi}, \vec{x}) p_{j} \mathscr{A}$$
(28)

2.4 一般化 Fourier 変換と反復解法を組み合わせた 散乱解析手法

領域積分方程式から散乱波動場を算出するために,式 (26)を次のように変形する.

$$\hat{B}_i(\vec{\xi}) = \left(\delta_{il} + A_{il}\right) \hat{v}_l(\vec{\xi}), \quad (\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3)$$
(29)

ここに,

$$\hat{B}_i(\vec{\xi}) = -\hat{h}(\vec{\xi}) \mathscr{U}_{ij} N_{jk}(\vec{x}) \mathscr{U}_{kl}^{-1} \hat{f}_l(\vec{\xi})$$
(30)

であり, 媒質の不均質性と入射波を既知のデータとす れば, 既知の関数として扱うことができる. また, *A_{il}* は次式で定義される線形演算子である.

$$A_{il} = -\hat{h}(\vec{\xi}) \mathscr{U}_{ij} N_{jk}(\vec{x}) \mathscr{U}_{kl}^{-1}$$

$$(31)$$

式 (29) は線形演算子による関数方程式とみなすことが できる.式 (29) を数値的に解くために,演算子 A_{il} を 構成する一般化 Fourier 変換を離散一般化 Fourier 変換 (離散 Fourier 変換含む) に置き換える.そして演算子 A_{il} を有限離散的な点で定義された関数からそれへの線 形演算子とすることを考える.一般化 Fourier 積分変 換を離散一般化 Fourier 変換に置き換えた場合,演算 子 A_{il} を構成する微分演算子 N_{jk} の扱いが問題となる. ここでは, x_1 , x_2 方向に関しては微分演算と Fourier 変換の関係

$$\partial_i f(\vec{x}) = \left(\mathscr{F}^{-1}(i\xi_i \hat{f})\right)(\vec{x}) \tag{32}$$

が成り立つ.また,x₃方向に関しては変換に微分演算 子を直接組み込むことで,微分係数の問題を解決するこ とが可能である.次に式(29)を次のように書き換える.

$$\hat{B}_{(D)i}(\vec{\xi}) = \left(\delta_{(D)il} + A_{(D)il}\right) \hat{v}_{(D)l}(\vec{\xi}), \quad (\vec{\xi} \in D) \quad (33)$$

ここで, D は離散一般化 Fourier 変換が扱う波数空間 内の有限個の離散点の集合である.また, 関数に付け た添字の D は波数領域の点 D で定義された関数であ ることを示す.

式 (33) に示された方程式は,有限次元空間上の線形 演算子による方程式として,連立方程式と同等と考え ることも可能である.ただし,離散一般化 Fourier 変換 の演算には 2D の FFT を組み入れることが得策である.

式 (33) において, 演算子 $A_{(D)il}$ を用いて Krylov 部 分空間を構成することが可能である.そして,これに よって近似解が算出できるものと期待できる.ただし, ここでの Krylov 部分空間の構成では,一般化 Fourier 変換と逆変換を繰り返して行く必要があり,どの程度 の計算時間で実現されるかの問題は後述する.また,散 乱解析に用いる Krylov 部分空間反復解法は、ランチョ ス原理⁶⁾に基づく Bi-CGSTAB 法,Bi-CGSTAB2 法, GPBi-CG 法,GPBi-CG(ω) 法を用いる.これは論文 ⁸⁾に基づく.

Fourier 変換と反復解法を組み合わせた逆散乱 解析手法

散乱波動場から逆に媒質の揺らぎを推定するために, 式 (26)の両辺を $-\hat{h}(\vec{\xi})$ で割り, 左から \mathscr{U}^{-1} を乗じる ことで次式を得る.

$$\mathscr{U}_{ji}^{-1}\hat{F}_{i}(\vec{\xi}) = N_{jk}(\vec{x})\mathscr{U}_{kl}^{-1}(\hat{f}_{l}(\vec{\xi}) + \hat{v}_{l}(\vec{\xi})) \quad (34)$$

ここで,

$$\hat{F}_i(\vec{\xi}) = -\hat{v}_i(\vec{\xi})/\hat{h}(\vec{\xi}) \tag{35}$$

であり、散乱波動場を既知とすれば、 $\hat{F}_i(\vec{\xi})$ は既知の関数として扱える.また、式 (34)の右辺は媒質の揺らぎを含むことから、媒質の揺らぎを未知量として分離する.ただし、媒質の揺らぎは境界条件を満足する必要性がないため、 x_3 方向に対しても Fourier 変換の適用が可能である.そこで、3次元弾性波動場における空間領域と波数領域の関数を結びつける Fourier 変換を次のように定義する¹²).

$$\begin{cases} \left(\mathscr{F}u\right)(\vec{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_{\mathbb{R}^3} u(\vec{x}) \exp(-i\vec{\zeta} \cdot \vec{x}) d\vec{x} \\ \left(\mathscr{F}^{-1}\hat{u}\right)(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}(\vec{\zeta}) \exp(i\vec{\zeta} \cdot \vec{x}) d\vec{\zeta} \end{cases} \tag{36}$$

ここで、*9* および[^]は Fourier 変換を、*9*⁻¹ および[~]は Fourier 逆変換を示す、 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ は空間領 域のベクトル、 $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \mathbb{R}^3$ は波数領域のベク トルである、さらに、 ζ_3 は前述した一般化 Fourier 変 換の ξ_3 とは異なる値をとる、

このとき,式(34)は次のようになる.

$$N_{jk}(\vec{x})\mathscr{U}_{kl}^{-1}(\hat{f}_l(\vec{\xi}) + \hat{v}_l(\vec{\xi})) = M_{jk}^{(s)}(\vec{x})\mathscr{F}^{-1}\hat{q}_k(\vec{\zeta})$$
 (37)
ただし,

$$[M^{(s)}] = \begin{pmatrix} \varepsilon & \partial_1 \varepsilon & \partial_1 \varepsilon + \eta_1 + 2\varepsilon_{1l}\partial_l \\ 0 & \varepsilon \partial_2 + \partial_2 \varepsilon & \partial_2 \varepsilon + \eta_2 + 2\varepsilon_{2l}\partial_l \\ 0 & \varepsilon \partial_3 + \partial_3 \varepsilon & \partial_3 \varepsilon + \eta_3 + 2\varepsilon_3\partial_l \end{pmatrix}$$
(39)

と定義する.ここに、 $s_i = v_i + f_i$ であり、

$$\begin{cases} \varepsilon = \partial_l s_l \\ \eta_j = (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) s_j \\ \varepsilon_{jk} = (1/2)(\partial_j s_k + \partial_k s_j) \end{cases}$$
(40)

である. すなわち, (q) は媒質の揺らぎで構成される未 知関数のベクトル, [M] は散乱波動場と入射波動場か ら構成される演算子である. 最終的に式 (34) は次のよ うにまとめることができる.

$$\mathscr{U}_{ji}^{-1}\hat{F}_{i}(\vec{\xi}) = M_{jk}^{(s)}(\vec{x})\mathscr{F}^{-1}\hat{q}_{k}(\vec{\zeta})$$
(41)

ここでは、全散乱波動場を既知量として出発する.従っ て、式 (41)の左辺は既知量となる.式 (41)をFFTと Krylov部分空間反復解法を用いることで、 $\hat{\lambda}$ 、 $\hat{\mu}$ が得 られる.また、反復計算には一般化 Fourier 変換ではな く 3D の Fourier 変換を用いることが可能であるため、 散乱解析に比べ短い演算時間で解けることが期待でき る.逆散乱解析には、Krylov部分空間反復解法のアー ノルディ原理⁶⁾から Orthomin(k) 法を用いることで収 束計算を行う.散乱解析と逆散乱解析に用いる反復解 法の原理が異なる点に関しては後述する.

3. 数值計算例

3.1 解析モデルおよび解析条件

前述のように、本論文では地表面に点震源を置き、 媒質の揺らぎに波動を照射する問題を扱う.図-2は、



図-2 媒質の揺らぎの鉛直断面の空間分布 ($x_2 = 0$ km)



図-3 入射波の鉛直断面の空間分布 ($x_2 = 0$ km)

Lamé 定数の λ , μ の変動部分を示し, $x_2 = 0$ km 平面 で図示したものである. これらの最大振幅は 0.1 GPa であり, 深さ 10 km ほどの広がりを持っている. 具体 的には媒質の揺らぎは次式で与え, 球対称性を仮定し ている.

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}(\vec{x}) = 0.1 \exp(-0.1 |\vec{x} - \vec{x}_0|^2) \\ \tilde{\mu}(\vec{x}) = 0.1 \exp(-0.1 |\vec{x} - \vec{x}_0|^2) \quad [\text{GPa}] \end{cases}$$
(42)

ここに \vec{x}_0 は媒質の揺らぎの中心座標で $\vec{x}_0 = (0,0,5)$ としている.

また,弾性媒質のバックグラウンドの定数は, $\lambda_b = 4$ GPa, $\mu_b = 2$ GPa, $\rho = 2 \times 10^3$ kg/m³ とする. すな わち,このときの P 波の速度は 2 km/s, S 波の速度は 1 km/s である.また,波動場の振動数を 1 Hz とする. したがって,バックグラウンドの P 波と S 波の波数は それぞれ, $k_L = 3.14$ km⁻¹ および $k_T = 6.28$ km⁻¹ で ある.また,Green 関数の表現で用いた無限小の正数 ϵ については有限の正数に置き換え, $\epsilon = 0.4$ とした.入 射波の振幅は $\mathscr{A} = 1.0 \times 10^{-5}$ km,方向ベクトル p_j は $p_j = (0,0,1)$,震源位置は $\vec{x}_s = (0,0,0)$ とおく.図-3 に $x_2 = 0$ km における $x_1 - x_3$ 鉛直断面の入射波の変 位分布を示す.この図は横軸に x₁,縦軸に x₃軸をとっている.入射波は鉛直下向きに広がりながら伝わっていき,地表面付近で,表面波が振幅の大きい波をトラップしている様子が見て取れる.

また,数値計算は AMD opteron x86-64(2.4GHz)の プロセッサーを有する 4cpu 並列の PC を使用する. 散乱解析手法において、半無限弾性波動場での一般化 Fourier 変換には 2D の FFT が必要である. また逆散乱 解析には 3Dの FFT が必要となる.ここでは、FFT に acml ライブラリー⁵⁾を用いている.FFT に用いるデー タサンプリングの個数は $N_i = 256$, (j = 1, 2), 空間座 標のデータサンプリングの間隔は $\Delta x_j = 0.25 \text{ km}, (j = 0.25 \text{ km})$ 1,2), 波数の分解能は $\Delta x_j \Delta \xi_j = 2\pi/N_j$ の関係より $\Delta \xi_i = 0.098 \text{ km}^{-1}$ である.また x_3 方向は $N_3 = 512$, $\Delta x_3 = 0.0625 \text{ km}$, 波数の分解能は $\Delta \xi_3 = 0.196 \text{ km}^{-1}$ である.ただし、散乱解析においては $\Delta \xi_3 = 1/2\Delta \xi_1$ と 置いている. これは一般化 Fourier 変換は通常の Fourier 変換とは異なり鉛直方向の Δx_3 と $\Delta \xi_3$ が互いに拘束 しあうことがないためであり, いくつかのパラメータ スタディをした結果,上記の値を用いることとした.

散乱および逆散乱解析に用いる反復解法の収束条件 は、方程式を次のように一般的に表現したとき、

$$Ax = b \tag{43}$$

残差ベクトルのノルムが次の条件を満足したときとする.

$$\left\| r \right\| \le \epsilon_M \left\| b \right\| \tag{44}$$

ここに, rは残差ベクトルで次式で定義される.

$$r = Ay - b \tag{45}$$

ただし、yは反復過程で得られる近似解である.また、 式 (43)のbは既知ベクトルである.収束判定に用いる ϵ_M は、散乱解析の計算では 0.001、逆散乱解析では残 差ベクトルのノルムが一定の値に収束したときに解が 収束したとみなす.これは、逆散乱解析では、解の収 束が単調には減少しないためである.また、反復計算 における初期ベクトルには、既知ベクトルbを用いる. すなわち、散乱解析では式 (26)の右辺第一項、逆散乱 解析では式 (37)の左辺を用いる.

3.2 散乱解析結果

このときの散乱解析における収束状況を図-4に示す. 今回の数値モデルでは、Bi-CGSTAB法、GPBi-CG(ω) 法の収束特性が最も良好であることが見て取れる.そ して、Bi-CGSTAB2法、GPBi-CG法の順に相対残差 の減り方が早くなっている.またどの手法に関しても、 反復回数を踏むごとに順調に相対残差を減らしている ことがわかる.

図-5 に本手法によって得られた散乱波の鉛直変位分 布を示す.散乱波は,揺らぎの中心付近である $x_3 = 5$ km で非常に大きくなっている.特に前方散乱が強くで ていることが見て取れ,散乱体の中心を通過した後も 散乱波が徐々に増大していることがわかる.図-6,7,8



図-4 散乱解析における収束比較



図-5 散乱波の鉛直断面の変位分布 ($x_2 = 0$ km)

は本手法によって得られた $x_3 = 4$, 5, 6 km の $x_1 - x_2$ 平面における散乱波の変位分布となっている. 横軸に x_1 ,縦軸に x_2 をとっている. これらの結果によると, 散乱波の鉛直断面での結果と同様に揺らぎの中心であ る $x_3 = 5$ km における散乱波よりも $x_3 = 4$ km での散 乱波の変位の方が小さく,そして $x_3 = 6$ km での散乱 波の変位の方が大きいことが見て取れる. また,散乱 波は $x_1 = x_2 = 0$ km を中心として同心円上に同じ波 長で広がっている様子が見て取れる.

3.3 逆散乱解析結果

次に式(41)を用いて散乱波動場から媒質の揺らぎを 決定する逆散乱解析結果を示す.図-9に逆散乱解析に おける解の収束特性を示す.これは,式(41)の解の相 対残差と反復回数の関係である.前述したように逆散 乱解析では,アーノルディ原理に基づく反復解法を用 いる.この理由はランチョス原理に基づく反復解法で は相対残差が減少せず,逆に増加する結果となり収束 しない結果を得たためである.今回の収束結果から散 乱解析に比べ相対残差の減り方が鈍いことを示すもの の,約2回の反復である程度の解を得ることができて いる.これに関しては全無限弾性波動場における逆散



図-6 散乱波の水平断面の変位分布 (x₃ = 4km)



図-7 散乱波の水平断面の変位分布 (x₃ = 5km)



図-8 散乱波の水平断面の変位分布 (x₃ = 6km)

乱解析においても同様の結果⁸⁾となっている.

また,実際にどの程度,解が収束しているのか比較 するために,反復解法に用いた初期ベクトル(以降の議 論では第ゼロ近似解と呼ぶ)を図-10から図-14に示 す.図-10は, x_3 軸における λ の第ゼロ近似である. 図中の target は,散乱解析時に設定した媒質の揺らぎ







図-10 x_3 軸における $\tilde{\lambda}$ の第ゼロ近似 ($x_1, x_2 = 0$ km)



図-11 x_3 軸における $\tilde{\mu}$ の第ゼロ近似 ($x_1, x_2 = 0$ km)

であり以降の議論ではターゲットと呼ぶ.また,zero は第ゼロ近似解を示す.結果から,第ゼロ近似解はター ゲットに比べ最大 30 倍の大きさとなっている.そして 大きく波を打っている様子が見て取れる.次に, x_3 軸 における $\tilde{\mu}$ の第ゼロ近似を図—11 に示す. $\tilde{\mu}$ の第ゼロ 近似も $\tilde{\lambda}$ 同様ターゲットと比較して非常に大きな値を 持つことがわかる.

図-12 は $x_3 = 5$ km における $x_1 - x_2$ 平面のターゲットである媒質の揺らぎの分布である.図-13,図-14 に $x_3 = 5$ km における第ゼロ近似解の $x_1 - x_2$ 平面での



図-12 $x_1 - x_2$ 平面におけるターゲット ($x_3 = 5$ km)



図-13 $x_1 - x_2$ 平面における $\tilde{\lambda}$ の第ゼロ近似 ($x_3 = 5$ km)



図-14 $x_1 - x_2$ 平面における $\tilde{\mu}$ の第ゼロ近似 ($x_3 = 5$ km)

散乱波の振幅を示す. 図–13 は $\hat{\lambda}$ の第ゼロ近似解である. この結果から,大まかな形は近いものを持っているものの,媒質の強度自体は非常に大きな値となっている. また,このときの媒質の揺らぎのピークは4 GPaとなっており,図–10の最大強度よりも大きいことがわかる. これは、最大強度の位置が原点ではなく少しずれた位置となっているためである. 同様に図–14 は、 μ の第ゼロ近似解である. $\hat{\lambda}$ の値に比べ更に大きな値を持っていることが見て取れる. そして,図–11 における最大強度に比べ、非常に大きくなっている. これは、原点付近では窪んでいるためである.

次に図-15 に x_3 軸方向における $\hat{\lambda}$ の推定結果を示 す. 横軸に x_3 軸をとり、縦軸に揺らぎの強度をとって いる. 図中の target はターゲットであり、estimation



図-15 x_3 軸における $\tilde{\lambda}$ の推定結果 ($x_1, x_2 = 0$ km)



図-16 x_3 軸における $\tilde{\mu}$ の推定結果 ($x_1, x_2 = 0$ km)

は推定結果である.この結果から,揺らぎの位置,揺 らぎの強度の大まかな推定ができていることがわかる. 同様に µの推定結果を図-16 に示す.µに関してもほ ぼターゲットの周辺に分布している結果となっており, 揺らぎの形,強度を捉えることに成功している.

図-17 から図-19 に $x_3 = 5$ km における $x_1 - x_2$ 平 面の図を示す。図-17 はターゲットである媒質の揺ら ぎの分布である。図-18 は λ の推定結果となっている。 ターゲットと比較すると揺らぎがある場所以外でも値 を持つ結果が出ている。一方,揺らぎのピーク付近で は揺らぎの範囲,大きさをほぼ捉えることに成功して いる。次に図-19 は μ の推定結果となっている。 λ の 推定結果と比較すると揺らぎの範囲を広く、そして強 度は多少弱く推定している傾向が見て取れる。しかし、 λ の推定結果と同様に、揺らぎのある部分を推定する ことには成功している。

図-20 から図-22 に $x_3 = 6$ km における $x_1 - x_2$ 平 面の推定結果を示す. 図-20 はターゲットである媒質 の揺らぎの分布である. λ の推定結果を図-21 に示す. 先に示した $x_3 = 5$ km での結果と同様に揺らぎがある 場所以外でも微小な値を持つ結果が出てしまっている が, 揺らぎが突出している箇所ではほぼ形を捉えるこ とに成功している.次に μ の推定結果を図-22 に示す.



図-17
$$x_1 - x_2$$
 平面におけるターゲット ($x_3 = 5$ km)



図-18 $x_1 - x_2$ 平面における $\tilde{\lambda}$ の推定結果 ($x_3 = 5$ km)



図-19 $x_1 - x_2$ 平面における $\tilde{\mu}$ の推定結果 ($x_3 = 5$ km)

この結果から分かることは, $x_3 = 5$ km の結果と比べ 揺らぎの膨らみが大きくなっていることである.また, $x_3 = 5$ km の推定結果と比較して最大値も $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ とも に大きく評価されていることがわかる.しかし,これ らの結果から揺らぎの位置,強度を推定することは可 能であることがわかる.

3.4 演算時間の比較

図-23 に反復10回に要した散乱解析と逆散乱解析の 演算時間の比較を示す.横軸は解析の種類であり,左 が散乱解析,右が逆散乱解析となっている.縦軸は10 回の演算に要した時間で単位はminである.これらの 結果から,散乱解析は非常に時間を要することがわか







図-21 $x_1 - x_2$ 平面における $\tilde{\lambda}$ の推定結果 ($x_3 = 6$ km)



図-22 $x_1 - x_2$ 平面における $\tilde{\mu}$ の推定結果 ($x_3 = 6$ km)

る.それに対して、逆散乱解析における反復1回あた りの演算時間は、散乱解析と比べ非常に短い時間であ ることがわかる.この理由は、散乱解析に用いる一般 化 Fourier 変換に膨大な演算時間を必要とするのに対 して、逆散乱解析では、FFTを用いることが可能であ るためである.

また, 散乱解析において収束条件を満足するのに約 7~10回の反復計算を要し, このときの演算時間は約 30~42時間である. 逆散乱解析では, 解が収束する までに2回の反復計算を要し, このときの演算時間は 約400分である.



ANAYSIS CASE

図-23 10回の反復に要した散乱,逆散乱解析の演算時間の 比較

4. 結論

本論文では、揺らぎを持つ半無限弾性波動場におけ る領域積分方程式を用いた逆散乱解析手法の展開と題 し、散乱および逆散乱解析手法の展開とその数値計算 例を逆散乱解析を中心に示した.本手法は、波数領域 の領域積分方程式に対し、FFT と Krylov 部分空間反 復解法を適用した.

散乱解析においては、一般化 Fourier 変換と Krylov 部分空間反復解法を用いることで散乱波を算出した.特 にここでは、Krylov 部分空間反復解法からランチョス 原理の4種法を用い収束特性の比較を行った.これら の結果によると全無限弾性波動場における先の論文⁸⁾ と同様に Bi-CGSTAB 法と GPBi-CG(ω) 法が最も良 い収束を示すことが分かった.したがって本手法にお ける散乱解析ではこの2手法を適用することが良いこ とがいえる.

逆散乱解析においては、FFT と Krylov 部分空間の アーノルディ原理を用いた反復解法を組み合わせるこ とで媒質の揺らぎを推定した.しかし、媒質の揺らぎ を精確に推定することは現在の定式化では難しいこと も分かった.しかし、揺らぎの存在領域を同定すると いう観点では、ターゲットと逆散乱解析結果がほとん ど一致しているという点で、逆散乱解析が可能である. また、文献⁴⁾で述べられているように、逆散乱問題は いわゆる不適切 (ill-posed) 問題として提示されている. これは境界積分方程式を用いて逆散乱解析を行う際に 第1種 Fredholm 方程式が得られることにも起因する. 一方、領域積分方程式を用いた逆散乱解析の解の一意 性の問題の検討は、今後に譲らなければならない点も 存在するものの、第1種 Fredholm 方程式を用いる必 要の無い点が、境界積分方程式を用いる場合と異なる.

反復解法に関しては1種法のみの結果を示したがラ ンチョス原理に基づく反復解法では発散することがわ かっている.しかし、アーノルディ原理に関しても、収 束はあまり良好ではない.今回の逆散乱解析の定式化 で得られた方程式は、第2種 Fredholm 方程式¹²⁾のタ イプでない.このことが解析を困難にした可能性も考 えられる.全無限弾性波動場での逆散乱解析では、シフ ト演算子の導入で容易に第2種 Fredholm 方程式¹²⁾が 得られ、それが解の収束特性の向上に貢献した⁷⁾⁸⁾と 考えられる.今後は、点加振で生じた波動を用いた半 無限弾性波動場における逆散乱解析の方程式を第2種 Fredholm 方程式に帰着させる検討も必要であろう.

参考文献

- 西村直志:最近の境界要素法の話題:(社)土木学会応用 力学委員会 計算力学小委員会,1998
- Kitahara, M., Niwa, Y., Hirose, S. and Yamazaki, M.: Coupling of numerical Green's matrix and boundary integral equations for the elastodynamic analysis of inhomogeneous bodies on an elastic half-space, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 8, pp. 397-407, 1984.
- Niwa, Y., Hirose, S. and Kitahara, M.: Elastodynamic analysis of inhomogeneous anisotropic bodies, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 22, pp. 1541-1555, 1986.
- 4) Colton, D. and Kress, R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, Berlin, Springer, 1998.
- 5) http://www.softek.co.jp/SPG/Pgi/TIPS/acml.html

- 6) 藤野清次, 張紹良: 反復法の数理, 応用数値計算ライブ ラリー, 朝倉書店, 1996
- 7)東平光生,岩崎健太郎,小林遼,木内拓:領域積分方程 式を用いた弾性波動場の散乱および逆散乱解析手法の展 開,応用力学論文集,Vol.10, pp. 17-26, 2007
- 8) Kentaro IWASAKI, Terumi TOUHEI: Inverse scattering analysis of elastic wave field by means of the volume integral equation, APCOM'07 in conjunction with EPMESC XI, CD-ROM, 2007
- 9) 東平光生: 領域積分方程式を用いた揺らぎを持つ半弾性 波動場の解析手法, 土木学会論文集, Vol.64, No.2, 2008
- (10) 廣瀬壮一: 定量的超音波非破壊評価とその周辺技術,応 用力学論文集, Vol.7, pp.3-12, 2004
- 11)小林昭一編著,波動解析と境界要素法,京都大学出版会, 2000.
- 12) 新井朝雄: ヒルベルト空間と量子力学(第5章), 共立講 座 21 世紀の数学,朝倉書店, 1997.

(2008年4月14日受付)