

Green 関数法による任意形状物体に作用する 2 次オーダー回折波の解析

Analysis of Second-order Diffraction Waves around a General Shape Structure
Using Green's Function

南森憲二*・宇都宮智昭**

Kenji NANMORI and Tomoaki UTSUNOMIYA

*工修, 京都大学大学院, 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂)

**工博, 京都大学准教授, 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂)

This paper presents a newly developed numerical analysis program for second-order diffraction waves around a general shape structure using Green's function. In the developed program, the direct method to calculate the second-order velocity potential is used. A program based on the indirect method, but without considering second-order diffraction potential was previously developed. However, the indirect method does not allow the calculation of the pressure distribution nor the free surface elevation. Therefore, in this paper, a new approach using the direct method for calculation of second-order forces is numerically implemented and its results are compared with those obtained from the indirect approach. In the newly developed program, bi-directional waves with two different frequencies are considered.

Key Words: second-order diffraction forces, free surface elevation, direct method, Green's function

1. はじめに

浮体式海洋プラットフォーム等の沖合いに設置される構造物の設計においては、一般に設計波高が大きくなるため、線形回折波理論による扱いだけでは不十分で、波高の 2 次オーダー以上の項の影響を考慮する必要がある^{1),2),3),4)}。また、浮体構造物の波浪応答特性は強い周波数依存性を有しており、基本的には浮体構造物の固有周波数が、卓越する波の周波数を回避するように設計されるが、このとき考慮されるのは線形波浪場であり非線形波浪場は通常、考慮されないことが多い。しかし、実際の多方向不規則波中に浮体構造物が置かれると、2 次オーダー波力として和周波数成分をもつ波力が作用するために、特に緊張係留された TLP (Tension Leg Platform) に対して Springing と呼ばれる鉛直方向の短周期での共振現象を生じさせたり⁵⁾、あるいは差周波数成分をもつ 2 次オーダー波力としての長周期変動波漂流力が作用し、緩係留された浮体に大きな水平方向の長周期動揺を生じさせたりする⁶⁾。

以上の観点から、これまでに多くの 2 次オーダー波力の解析法に関する研究がおこなわれ、既に商用の数値解析プログラムも提供されているが⁷⁾、一定パネルあるいは B-Spline パネルが用いられており、稜線・角点を有する任意形状物体に対しても十分な精度を有しているかどうかについては不明な点もある。そこで著者は、特に 8 節点 2 次要素を用いた高次境界要素法

をベースとし、間接法にもとづく 2 次オーダー回折波力の算出プログラムを作成・検証した⁹⁾が、参照点が角点および稜線上にも配置されるため、角点・稜線を有する構造物においても数値精度が確保されることが期待される。しかし、間接法においては、2 次オーダーポテンシャルを求めることなく波力のみを求めるため、実際の設計においてさらに必要となる物体上の圧力分布や物体まわりの回折波高分布は求められなかった。

そこで、本研究では直接 2 次オーダー回折波ポテンシャルを求めることで 2 次オーダー回折波力を求め、さらに回折波高、圧力分布を算出する数値解析プログラムの開発を行う。実際の多方向不規則波に対応させるため、2 種類の異なる方向からの入射波に対する和周波数、差周波数に関する 2 次オーダー波力全ての成分を統一的に評価するための定式化を行い、これに基づく 3 次元任意形状物体に作用する 2 次オーダー波力・圧力分布および波高分布を数値解析的に精度良く計算するプログラムを作成することを目的とする。

2. 直接法による 2 次オーダー回折波の解析理論

ここでは 2 次オーダー回折波ポテンシャル算出のための定式化および 2 次オーダー波力、圧力分布、波高分布の算出方法について示す。本研究では任意形状物体に入射する 2 つの入射波 (振幅: A_i , 角周波数: ω_i , 入

射角: $\beta_i, i = 1, 2$ を考える。図-1 に座標系および入射波方向について示す。

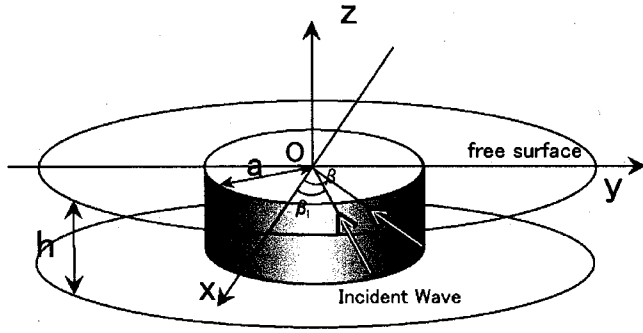


図-1 座標系および入射波方向

2.1 自由表面条件式

図-1 のように座標系をとり、一方向に進行する波長 λ の波を考える。流体中の圧力を p 、密度を ρ とすれば、自由水面 S_F 上では p は大気圧に等しく一定であるので p の実質的時間的变化はなく、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0 \quad \text{on } S_F \quad (1)$$

が成り立つ。ただし、 u, v, w を流体の速度成分として、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

である。一方、 Φ を流体の速度ポテンシャルとすれば、Bernoulli の定理によって圧力は、

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 - g\zeta \quad (3)$$

のように与えられる。ただし、 $z = \zeta(x, y, t)$ は波面の式、 ∇ はグラディエント、 g は重力の加速度である。これを式 (1) に代入すれば、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \Phi)^2 \right) \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \Phi)^2 \right) \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \Phi)^2 \right) \\ & + g \frac{D}{Dt} \zeta = 0 \quad \text{on } z = \zeta \end{aligned} \quad (4)$$

が得られる。さらに、

$$\frac{D}{Dt} \zeta = \frac{D}{Dt} z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (5)$$

となり、式 (4) は結局

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial (\nabla \Phi)^2}{\partial t} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial (\nabla \Phi)^2}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial (\nabla \Phi)^2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial (\nabla \Phi)^2}{\partial z} \right\} = 0 \quad \text{on } z = \zeta(6) \end{aligned}$$

となる。この式 (6) が完全な形の自由表面条件式である。今、 Φ や ζ が微小パラメータ $\epsilon = \kappa_0 A$ (κ_0 : 波数

、 A : 波振幅) によって、

$$\Phi = \epsilon \Phi^{(1)} + \epsilon^2 \Phi^{(2)} + O(\epsilon^3) \quad (7)$$

$$\zeta = \epsilon \zeta^{(1)} + \epsilon^2 \zeta^{(2)} + O(\epsilon^3) \quad (8)$$

のように展開できるとする。ただし、

$\Phi^{(1)}$: 1 次の全速度ポテンシャル

$\zeta^{(1)}$: 1 次の自由表面における波面の式

$\Phi^{(2)}$: 2 次の全速度ポテンシャル

$\zeta^{(2)}$: 2 次の自由表面における波面の式

$O(\epsilon^3)$: 3 次以上のオーダーの項

である。

式 (3) および式 (6) を、 $z = 0$ に関して Taylor 展開した後、自由表面上 $z = \zeta$ の条件を代入し、 ϵ によって正則摂動展開すると、

ϵ の項に対して、

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

$$\zeta^{(1)} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (10)$$

ϵ^2 の項に対して、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \\ & = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \zeta^{(2)} = & \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} - \frac{1}{2g} (\nabla \Phi^{(1)})^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{g^2} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \right) \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (12)$$

が成り立つ。

2.2 速度ポテンシャル

ここでは、2 つの入射波 (振幅: A_i 、角周波数: ω_i 、入射角: $\beta_i, i = 1, 2$) を対象とした入射波ポテンシャル、回折波ポテンシャルについて示していく。

1 次オーダーの総ポテンシャル $\Phi^{(1)}$ は、

$$\Phi^{(1)} = \Re \left(\sum_{i=1}^2 \phi_i^{(1)} e^{i\omega_i t} \right) \quad (13)$$

と表すことができる。2 次オーダーの総ポテンシャルについては、和周波数 ($\omega^+ = \omega_1 + \omega_2$) による成分と差周波数 ($\omega^- = \omega_1 - \omega_2$) による成分との和で表すことができ、

$$\Phi^{(2)} = \Re \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\phi_{ij}^+ e^{i\omega^+ t} + \phi_{ij}^- e^{i\omega^- t} \right) \quad (14)$$

と表すことができる。

さらに以上の総ポテンシャル $\Phi^{(1)}$ 、 $\Phi^{(2)}$ を入射波ポテンシャル Φ_I と回折波ポテンシャル Φ_D とに分割でき、

$$\Phi^{(1)} = \Phi_I^{(1)} + \Phi_D^{(1)} \quad (15)$$

$$\Phi^{(2)} = \Phi_I^{(2)} + \Phi_D^{(2)} \quad (16)$$

と表すことができる。

(1) 入射波ポテンシャル

1 次オーダーの入射波ポテンシャルは以下のように表すことができる。

$$\Phi_I^{(1)} = \Re \sum_{i=1}^2 \left[\phi_{Ii}^{(1)} e^{i\omega_i t} \right] \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \phi_{Ii}^{(1)} &= \frac{igA_i}{\omega_i} \frac{\cosh k_i(z+h)}{\cosh k_i h} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{igA_i}{\omega_i} \frac{\cosh k_i(z+h)}{\cosh k_i h} e^{ik_i(x \cos \beta_i + y \sin \beta_i)} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、

$$\omega_i^2 = k_i g \tanh k_i h \quad (19)$$

$$\mathbf{x} = (x, y) \quad (20)$$

$$\mathbf{k}_i = (k_i \cos \beta_i, k_i \sin \beta_i) \quad (21)$$

である。

2 次オーダーの入射波ポテンシャルは以下のように表すことができる。

$$\Phi_I^{(2)} = \Re \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[\phi_{Iij}^+ e^{i\omega^+ t} + \phi_{Iij}^- e^{i\omega^- t} \right] \quad (22)$$

$$\phi_{Iij}^+ = \frac{1}{2}(\gamma_{ij}^+ + \gamma_{ji}^+) \frac{\cosh k^+(z+h)}{\cosh k^+ h} e^{i(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j) \cdot \mathbf{x}} \quad (23)$$

$$\phi_{Iij}^- = \frac{1}{2}(\gamma_{ij}^- + \gamma_{ji}^*) \frac{\cosh k^-(z+h)}{\cosh k^- h} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j) \cdot \mathbf{x}} \quad (24)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^+ &= \frac{igA_i A_j}{2\omega_i} \frac{1}{\nu^+ - k^+ \tanh k^+ h} \left[k_i^2 (1 - \tanh^2 k_i h) \right. \\ &\quad \left. + 2k_i k_j \{ \cos(\beta_i - \beta_j) - \tanh k_i h \tanh k_j h \} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^- &= \frac{igA_i A_j^*}{2\omega_i} \frac{1}{\nu^- - k^- \tanh k^- h} \left[k_i^2 (1 - \tanh^2 k_i h) \right. \\ &\quad \left. - 2k_i k_j \{ \cos(\beta_i - \beta_j) + \tanh k_i h \tanh k_j h \} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\nu^\pm = \frac{\omega^{\pm 2}}{g} \quad (27)$$

$$k^\pm = |\mathbf{k}_i \pm \mathbf{k}_j| = \sqrt{k_i^2 + k_j^2 \pm 2k_i k_j \cos(\beta_i - \beta_j)} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_i \pm \mathbf{k}_j) \cdot \mathbf{x} &= x(k_i \cos \beta_i \pm k_j \cos \beta_j) \\ &\quad + y(k_i \sin \beta_i \pm k_j \sin \beta_j) \\ &= k_i(x \cos \beta_i + y \sin \beta_i) \\ &\quad \pm k_j(x \cos \beta_j + y \sin \beta_j) \end{aligned} \quad (29)$$

である。

また、深海波に対しては、式 (23) と式 (24) は次のように表すことができる。

$$\phi_{Iij}^+ = \frac{igA_i A_j (\omega_j + \omega_i)}{2\omega_i \omega_j} \frac{k_i k_j \{1 - \cos(\beta_i - \beta_j)\}}{\nu^+ - k^+} e^{k^+ z} e^{i(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j) \cdot \mathbf{x}} \quad (30)$$

$$\phi_{Iij}^- = \frac{igA_i A_j^* (\omega_j - \omega_i)}{2\omega_i \omega_j} \frac{k_i k_j \{1 + \cos(\beta_i - \beta_j)\}}{\nu^- - k^-} e^{k^- z} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j) \cdot \mathbf{x}} \quad (31)$$

(2) 回折波ポテンシャル

2 次オーダー回折波ポテンシャルは以下の支配方程式と境界条件式を満たす。

$$\nabla^2 \phi_D^\pm = 0 \quad \text{in } V \quad (32)$$

$$-\omega^{\pm 2} \phi_D^\pm + g \frac{\partial \phi_D^\pm}{\partial z} = Q_F^\pm \quad \text{on } S_F \quad (33)$$

$$\frac{\partial \phi_D^\pm}{\partial n} = Q_B^\pm \quad \text{on } S_B \quad (34)$$

$$\frac{\partial \phi_D^\pm}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_{B_0} \quad (35)$$

ただし、 V は流体領域を、 S_F は自由表面を、 S_B は物体表面を、 S_{B_0} は海底面を表す。また、物体が固定されている場合、

$$Q_B^\pm = -\frac{\partial \phi_I^\pm}{\partial n} \quad (36)$$

上記において、 $Q_F^\pm$ は、自由表面における forcing term とよばれる項で、式 (33) で $Q_F^\pm = 0$ の斉次解に対応した波を Free Wave、非斉次解に対応した波を Locked Wave と称することもある²⁾。なお、この際、式 (34) の物体表面条件は、斉次解、非斉次解の和により満足される必要がある。

本研究では、2 次オーダー回折波ポテンシャルを Teng & Eatock Taylor⁸⁾ によって提案された以下の積分方程式を用いることで求める。

$$\begin{aligned} &\left(4\pi - \int_{S_I} \frac{\partial G_2}{\partial z} dx dy \right) \phi_D^\pm(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{S_B} \left(\phi_D^\pm(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}; \mathbf{x}')}{\partial n} - \phi_D^\pm(\mathbf{x}) \frac{\partial G_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}')}{\partial n} \right) dS \\ &= \int_{S_B} Q_B^\pm(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}; \mathbf{x}') dS \\ &+ \frac{1}{g} \int_{S_F} Q_F^\pm(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}; \mathbf{x}') dS \end{aligned} \quad (37)$$

ただし、 G および G_2 は Green 関数である。また本研究では、8 節点 2 次要素を用いた境界要素法により上記積分方程式の離散化をおこなった。

(3) 自由表面境界条件の展開

ここで、式 (37) に含まれる Q_F については渡邊ら⁹⁾を参考にして以下のように式展開を行なう。

$\Phi^{(2)}$ に関する自由表面での条件式 (11) に式 (16) を代入して、2 次オーダー回折波ポテンシャル $\Phi_D^{(2)}$ に関

する自由表面条件式が以下のように導かれる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi_D^{(2)} = Q \quad \text{on } S_F \quad (38)$$

$$Q \equiv \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 - \frac{\partial^2 \Phi_I^{(2)}}{\partial t^2} - g \frac{\partial \Phi_I^{(2)}}{\partial z} \quad (39)$$

ここで、 Q を和周波数と差周波数に関して定義すると、

$$Q = \Re \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\{ Q_{Fij}^+ e^{i(\omega_i + \omega_j)t} + Q_{Fij}^- e^{i(\omega_i - \omega_j)t} \right\} \right] \quad (40)$$

となる。式 (13) を代入し、各周波数ごとの項で整理する。このとき式の対称性を考慮して、 $Q_{ij}^\pm$ を以下のように置き換える。

$$Q_{Fij}^+ = \frac{1}{2}(q_{ij}^+ + q_{ji}^+) - Q_{IIij}^+ \quad (41)$$

$$Q_{Fij}^- = \frac{1}{2}(q_{ij}^- + q_{ji}^-) - Q_{IIij}^- \quad (42)$$

ただし、 $Q_{IIij}^\pm$ は 1 次オーダー入射波ポテンシャル同士の積による成分であり、これが式 (39) 右辺の 2 次オーダー入射波ポテンシャル部分と相殺される為、式 (41) および式 (42) の中から差し引いている。(より具体的には、式 (39) に式 (15) を代入すると、 $\Phi_I^{(2)}$ の満たす自由表面条件式から、 $\Phi_I^{(1)}$ 同士の積による項と $\Phi_I^{(2)}$ の項は相殺しあい消えてしまう。従って、式 (39) から $\Phi_I^{(2)}$ および $\Phi_I^{(1)}$ 同士の積の項をはじめから取り除いた式 (41) および式 (42) のような形であらわすのが合理的となる。)

これまでの展開により式 (41)、式 (42) における和周波数に関する項 q_{ij}^+ 、差周波数に関する項 q_{ij}^- は以下のように表すことができる。

$$q_{ij}^+ = \frac{i\omega_j}{2g} \phi_j^{(1)} \left(-\omega_i^2 \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial z} + g \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial z^2} \right) - i\omega_j \nabla \phi_i^{(1)} \cdot \nabla \phi_j^{(1)} \quad (43)$$

$$q_{ij}^- = -\frac{i\omega_j}{2g} \phi_j^{(1)*} \left(-\omega_i^2 \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial z} + g \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial z^2} \right) + i\omega_j \nabla \phi_i^{(1)} \cdot \nabla \phi_j^{(1)*} \quad (44)$$

さらに式 (41) に式 (43) を、式 (42) に式 (44) を代入し、

$$\phi^{(1)} = \phi_I^{(1)} + \phi_D^{(1)} \quad (45)$$

$$\frac{\partial \phi_{Ii}^{(1)}}{\partial z} = \frac{\omega_i^2}{g} \phi_{Ii}^{(1)} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \phi_{Di}^{(1)}}{\partial z} = \frac{\omega_i^2}{g} \phi_{Di}^{(1)} \quad (47)$$

を利用して 1 次の入射波ポテンシャル同士の積の項を除くと、

$$Q_{Fij}^+ = \frac{i\omega_j}{4} \left(\phi_{Ij}^{(1)} \frac{\partial^2 \phi_{Di}^{(1)}}{\partial z^2} + \phi_{Dj}^{(1)} \frac{\partial^2 \phi_{Ii}^{(1)}}{\partial z^2} + \phi_{Dj}^{(1)} \frac{\partial^2 \phi_{Di}^{(1)}}{\partial z^2} \right)$$

$$+ \frac{i\omega_i}{4} \left(\phi_{Ii}^{(1)} \frac{\partial^2 \phi_{Dj}^{(1)}}{\partial z^2} + \phi_{Di}^{(1)} \frac{\partial^2 \phi_{Ij}^{(1)}}{\partial z^2} + \phi_{Di}^{(1)} \frac{\partial^2 \phi_{Dj}^{(1)}}{\partial z^2} \right) - \frac{i(\omega_i + \omega_j)}{2} \left(\frac{\partial \phi_{Ii}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{Dj}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{Ii}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{Dj}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{Di}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{Ij}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{Di}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{Ij}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{Di}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{Dj}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{Di}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{Dj}^{(1)}}{\partial y} \right) + \lambda_{ij}^+ \left(\phi_{Ii}^{(1)} \phi_{Dj}^{(1)} + \phi_{Di}^{(1)} \phi_{Ij}^{(1)} + \phi_{Di}^{(1)} \phi_{Dj}^{(1)} \right) \quad (48)$$

$$Q_{Fij}^- = -\frac{i\omega_j}{4} \left(\phi_{Ij}^{(1)*} \frac{\partial^2 \phi_{Di}^{(1)}}{\partial z^2} + \phi_{Dj}^{(1)*} \frac{\partial^2 \phi_{Ii}^{(1)}}{\partial z^2} + \phi_{Dj}^{(1)*} \frac{\partial^2 \phi_{Di}^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \frac{i\omega_i}{4} \left(\phi_{Ii}^{(1)*} \frac{\partial^2 \phi_{Dj}^{(1)}}{\partial z^2} + \phi_{Di}^{(1)*} \frac{\partial^2 \phi_{Ij}^{(1)}}{\partial z^2} + \phi_{Di}^{(1)*} \frac{\partial^2 \phi_{Dj}^{(1)}}{\partial z^2} \right) - \frac{i(\omega_i - \omega_j)}{2} \left(\frac{\partial \phi_{Ii}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{Dj}^{(1)*}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{Ii}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{Dj}^{(1)*}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{Di}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{Ij}^{(1)*}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{Di}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{Ij}^{(1)*}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{Di}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{Dj}^{(1)*}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{Di}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{Dj}^{(1)*}}{\partial y} \right) + \lambda_{ij}^- \left(\phi_{Ii}^{(1)} \phi_{Dj}^{(1)*} + \phi_{Di}^{(1)} \phi_{Ij}^{(1)*} + \phi_{Di}^{(1)} \phi_{Dj}^{(1)*} \right) \quad (49)$$

と表すことができる。ここで、

$$\lambda_{ij}^\pm = -\frac{i}{4} \left\{ \omega_i \nu_j^2 \pm \omega_i \nu_i^2 + 2(\omega_i \pm \omega_j) \nu_i \nu_j \right\} \quad (50)$$

$$\nu^\pm = \frac{\omega^{\pm 2}}{g} \quad (51)$$

である。

2.3 自由表面積分

2 次オーダー回折波ポテンシャルを求める積分方程式として式 (37) では、無限領域の自由表面積分が加わるため積分値の収束が困難となる。そこで、本節では図-2 のように積分領域を近傍場と遠方場とに分割し、遠方場では収束性のよい級数展開による式変形を行ない、解析的に積分計算をおこなう¹⁰⁾。

(1) 近傍場

近傍場領域では Q_F に含まれる 1 次ポテンシャルの 2 回微分を回避するために、Gauss theorem を用いた次の式を利用した式展開を行なう。

$$\iint_{S_F} \phi_i \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} G dS = - \iint_{W_L + P_C} \phi_i (\nabla \phi_j \cdot \mathbf{n}) G d\Omega + \iint_{S_F} [(\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j) G + \phi_i (\nabla \phi_j \cdot \nabla G)] dS \quad (52)$$

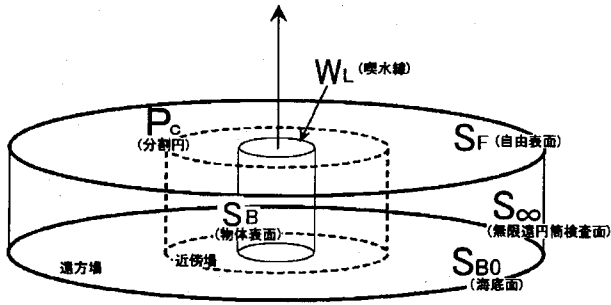


図-2 積分領域区分および分割円

ただし、ここでの ∇ や $\mathbf{n}$ は 2 次元で定義されていることに注意する。つまり、式 (52) は以下のように展開される。

$$\begin{aligned} & \int \int_{S_F} \phi_i \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} G dS \\ &= - \int \int_{W_L + P_C} \phi_i \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} n_y \right) G dl \\ &+ \int \int_{S_F} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) G dS \\ &+ \int \int_{S_F} \phi_i \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} \right) dS \quad (53) \end{aligned}$$

2.4 遠方場

遠方場においては収束性のよい級数展開による式変形を行なっていくことにする。なお、以下の式展開において H_n は n 次の第 1 種 Hankel 関数、 J_n は n 次の第 1 種 Bessel 関数を表す。また κ は入射波 i, j の波数 κ_i, κ_j や 2 次オーダーポテンシャルによる波数 $\kappa_k^\pm$ を表している。ここで、 κ_k は以下の式で求める値である。

$$\frac{\omega^{\pm 2}}{g} = \kappa_k^\pm \tanh \kappa_k^\pm h \quad (54)$$

(1) Green 関数の級数表示

まず、遠方場におけるグリーン関数を Graf's additional theorem を用いて Fourier-Bessel 級数に展開すると、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}; \mathbf{x}') &\simeq 2\pi i c Z(\kappa z) Z(\kappa z') \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n H_n(\kappa r) J_n(\kappa r') \cos n(\theta - \theta') \quad (55) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} c &= \frac{\nu^2 - \kappa^2}{\kappa^2 h - \nu^2 h + \nu} \cosh^2(\kappa h) = \frac{-\kappa^2}{\kappa^2 h - \nu^2 h + \nu} \\ Z(\kappa z) &= \frac{\cosh \kappa(z + h)}{\cosh(\kappa h)} \quad (56) \end{aligned}$$

次に、各 1 次オーダーポテンシャルを級数形に展開する。

(2) 入射波ポテンシャルの級数表示

入射波ポテンシャルは以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \phi_{Ii}^{(1)} &= \frac{igA_i}{\omega_i} Z(\kappa_i z) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n J_n(\kappa_i r) \cos n(\theta - \beta_i) \\ &= Z(\kappa_i z) \sum_{n=0}^{\infty} J_n(\kappa_i r) [A_{in}^c \cos n\theta + A_{in}^s \sin n\theta] \quad (57) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} A_{in}^c \\ A_{in}^s \end{pmatrix} = \frac{igA_i}{\omega_i} \epsilon_n i^n \begin{pmatrix} \cos n\beta_i \\ \sin n\beta_i \end{pmatrix} \quad (58)$$

(3) 回折波ポテンシャルの級数表示

さらに回折波ポテンシャルを級数表示すると、

$$\phi_{Di}^{(1)} \simeq Z(\kappa_i z) \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\kappa_i r) [B_{in}^c \cos n\theta + B_{in}^s \sin n\theta] \quad (59)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_{in}^c \\ B_{in}^s \end{pmatrix} &= \frac{i}{2} c_0 \epsilon_n \cosh \kappa_i h \\ &\int \int_{S_B} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \phi_{Di}^{(1)}(\mathbf{x}') - \phi_{Di}^{(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n} \right\} \\ &\cosh \kappa_i(z' + h) J_n(\kappa_i r') \begin{pmatrix} \cos n\theta' \\ \sin n\theta' \end{pmatrix} dS \quad (60) \end{aligned}$$

$$c_0 = \frac{\nu_i^2 - \kappa_i^2}{\kappa_i^2 h - \nu_i^2 h + \nu_i} \quad (61)$$

3. 2 次オーダー波力・圧力・波高

3.1 2 次オーダー波力

一般に 2 次オーダー波力は、

$$F^{(2)} = \Re \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[f_{ij}^+ e^{i\omega^+ t} + f_{ij}^- e^{i\omega^- t} \right] \quad (62)$$

と表現できる。また右辺に含まれる $f_{ij}^\pm$ は 1 次オーダーポテンシャルの積による項 $f_{qij}^\pm$ と 2 次オーダーポテンシャルによる項 $f_{pij}^\pm$ との和で表現できる。つまり、

$$f_{ij}^\pm = f_{qij}^\pm + f_{pij}^\pm \quad (63)$$

さらに $f_{qij}^\pm, f_{pij}^\pm$ は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} f_{qij}^+ &= -\frac{\rho}{4} \int \int_{S_B} (\nabla \phi_i^{(1)} \nabla \phi_j^{(1)}) n_k dS \\ &- \frac{\rho \omega_j \omega_l}{4g} \int_{W_L} \phi_i^{(1)} \phi_j^{(1)} n_k dl \quad (64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{qij}^- &= -\frac{\rho}{4} \int \int_{S_B} (\nabla \phi_i^{(1)} \nabla \phi_j^{(1)*}) n_k dS \\ &+ \frac{\rho \omega_i \omega_j}{4g} \int_{W_L} \phi_i^{(1)} \phi_j^{(1)*} n_k dl \quad (65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{pij}^{\pm} &= -\rho i \omega^{\pm} \int \int_{S_B} (\phi_{Iij}^{\pm} + \phi_{Dij}^{\pm}) n_k dS \\
&= -\rho i \omega^{\pm} \int \int_{S_B} \phi_{Iij}^{\pm} n_k dS \\
&\quad - \rho i \omega^{\pm} \int \int_{S_B} \phi_{Dij}^{\pm} n_k dS
\end{aligned} \quad (66)$$

3.2 圧力の計算

2次オーダー圧力は、

$$P^{(2)} = \Re \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(A_i A_j p_{ij}^{+} e^{-i\omega^{+}t} + A_i A_j^{*} p_{ij}^{-} e^{-i\omega^{-}t} \right) \right] \quad (67)$$

2次オーダー波力と同様にして、

$$p_{ij}^{\pm} = p_{qij}^{\pm} + p_{pij}^{\pm} \quad (68)$$

として、

$$p_{qij}^{+} = \frac{1}{A_i A_j} \left[-\frac{1}{4} \rho \nabla \phi_i^{(1)} \cdot \nabla \phi_j^{(1)} \right] \quad (69)$$

$$p_{qij}^{-} = \frac{1}{A_i A_j^{*}} \left[-\frac{1}{4} \rho \nabla \phi_i^{(1)} \cdot \nabla \phi_j^{(1)*} \right] \quad (70)$$

$$p_{pij}^{+} = -\rho \frac{i\omega^{+}}{A_i A_j} \phi^{+} \quad (71)$$

$$p_{pij}^{-} = -\rho \frac{i\omega^{-}}{A_i A_j^{*}} \phi^{-} \quad (72)$$

と表すことができる。

3.3 波高の計算

次に、波高分布についての定式化を行なっていく。

$$\zeta^{(2)} = \Re \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[A_i A_j \eta_{ij}^{+} e^{i\omega^{+}t} + A_i A_j^{*} \eta_{ij}^{-} e^{i\omega^{-}t} \right] \quad (73)$$

であり、

$$\eta_{ij}^{\pm} = \eta_{qij}^{\pm} + \eta_{pij}^{\pm} \quad (74)$$

として、

$$\begin{aligned}
\eta_{qij}^{+} &= \frac{1}{A_i A_j} \left[-\frac{1}{4g} \nabla \phi_i^{(1)} \cdot \nabla \phi_j^{(1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega_i \omega_j (\nu_i + \nu_j)}{4g^2} \phi_i^{(1)} \phi_j^{(1)} \right]
\end{aligned} \quad (75)$$

$$\eta_{pij}^{+} = -\frac{i\omega^{+}}{g A_i A_j} \phi^{+} \quad (76)$$

と表すことができる。

4. 解析結果の検証

4.1 2次オーダー波力の検証

ここでは、本研究で開発した直接法によるプログラムから算出される2次オーダー波力を、間接法により算出される2次オーダー波力と比較・検討することによ

り、プログラムの2次オーダー波力算出部分に関する検討を行なう。解析モデルは $h/a = 1$ の着底円筒(ただし、水線面から上方へは解析上は無限の鉛直壁を有するものとする。以下、同様な仮定をおこなう)であり、これに同じ周波数の波が異なる2方向から入射する場合、2方向からそれぞれ異なる周波数をもつ波が入射する場合、および、同じ方向から異なる2周波数をもつ波が入射する場合のそれぞれに対して計算する。なお、間接法プログラムとしては、山崎ら¹¹⁾によるものを使用する。

(1) 2方向1周波数の入射波に対する検証(和周波数)

$\beta_1 = 0, \nu_1 a = \nu_2 a = 1.0$ に固定して $\beta_2 = 0 \sim 180^\circ$ とした結果を図-3に示す。

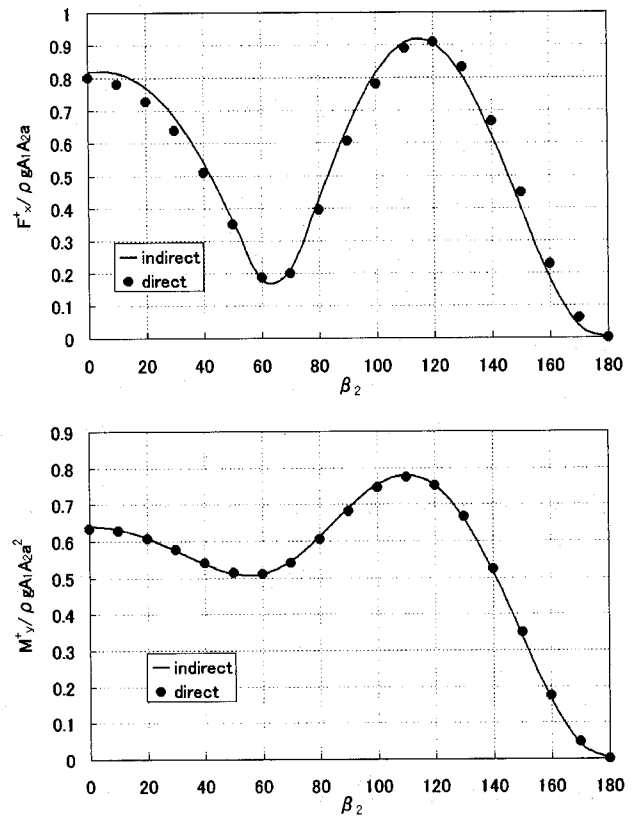


図-3 2方向1周波数に対する2次オーダー波力(上: x 方向2次オーダー波力(和周波数)の無次元化振幅、下: y 軸まわりの2次オーダーモーメント(和周波数)の無次元化振幅)

(2) 2方向2周波数の入射波に対する検証(和周波数)

$\beta_1 = 0, \beta_2 = 45^\circ, \nu_1 a = 1.0$ に固定して $\nu_2 a = 1.0 \sim 2.0$ とした結果を図-4に示す。

(3) 1方向2周波数の入射波に対する検証(差周波数)

$\beta_1 = \beta_2 = 0, \nu_1 a = 1.0$ に固定して $\nu_2 a = 1.0 \sim 2.0$ とした結果を図-5に示す。

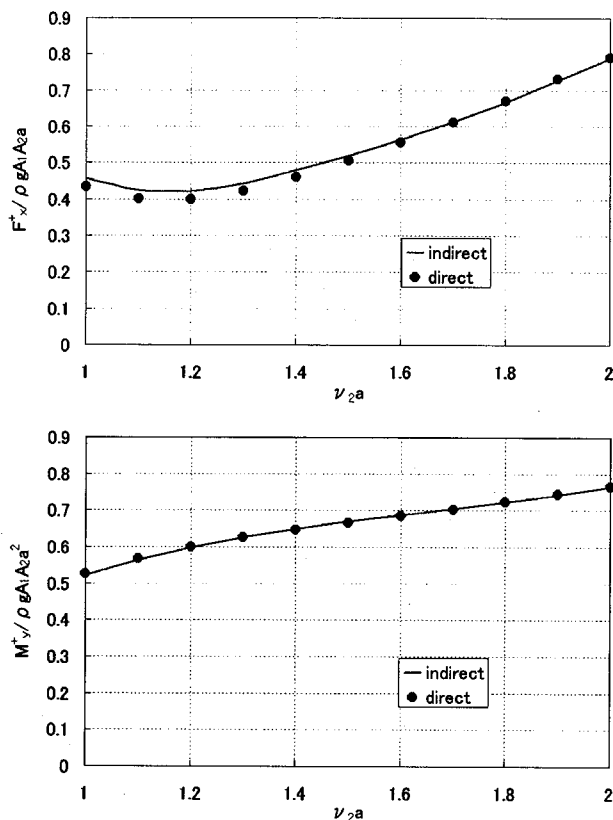


図-4 2方向2周波数に対する2次オーダー波力(上: x 方向2次オーダー波力(和周波数)の無次元化振幅、下: y 軸まわりの2次オーダーモーメント(和周波数)の無次元化振幅)

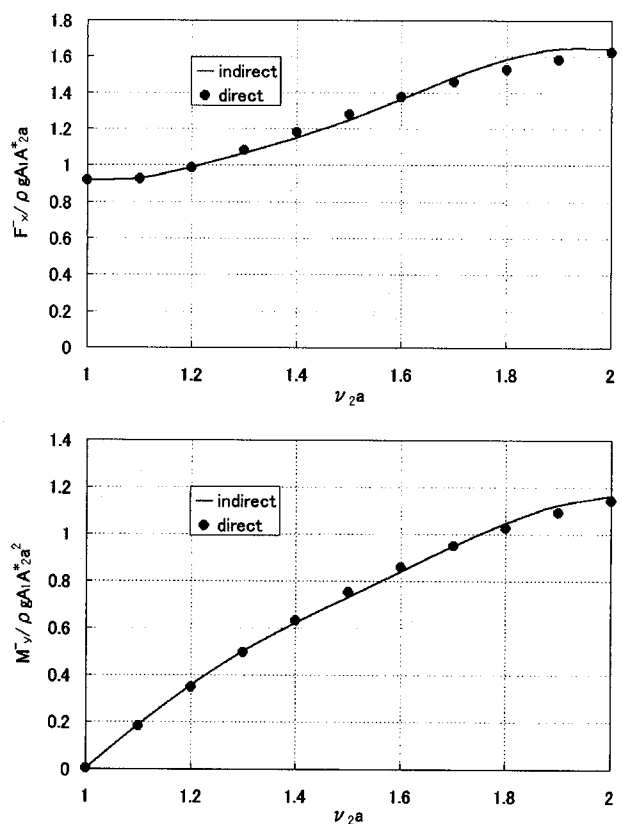


図-5 1方向2周波数に対する2次オーダー波力(上: x 方向2次オーダー波力(差周波数)の無次元化振幅、下: y 軸まわりの2次オーダーモーメント(差周波数)の無次元化振幅)

4.2 圧力分布の検証

ここでは圧力分布の検証を2次オーダーによる項: p_p^+ の比較を行なう。解析モデルは $h/a = 1$ の着底円筒であり、比較対象は Kim & Yue³⁾ による解析結果である。なお、Kim & Yue³⁾ は、軸対称構造物を対象として、その対称軸 (z 軸) 上にリングソースを配置することで積分方程式を解く手法により数値解を求めている。

なお、解析条件は、同じ方向から $\nu_1 a = 1.0$ 、 $\nu_2 a = 2.0$ の2周波数を有する波が入射する場合において、 $\theta = 0$ (波下側)、 $\theta = 1/2\pi$ 、 $\theta = \pi$ (波上側) それぞれの位置における圧力分布を算出したものである。その結果を図-6に示す。

4.3 波高分布の検証

ここでは円筒周辺の波高分布の検証を2次オーダーによる項: η_p^+ について行なう。解析モデルは $h/a = 4$ の着底円筒であり、比較対象は Eatock Taylor ら¹⁰⁾ による解析結果である。なお、Eatock Taylor ら¹⁰⁾ は、軸対称構造物を対象として、積分方程式を経由することなく、偏微分方程式の解を直接構成することにより半解析解を求めている。

結果を図-7に示す。

4.4 考察

まずは2次オーダー波力について和周波数、差周波数ともにより結果が得られたといえる。

つぎに圧力分布についてもほぼ妥当な値が得られた。しかし水線上(一般には、水線は静水面と構造物表面が交差する線をあらわす。着底円筒を対象とした本研究では、 $z = 0, r = a$ の円周となる)についての値は従来の解析解と一致していない。これは水線上についての2次オーダーポテンシャルが精度よく求められていないためであると考えられる。特に、 ∇G の項が強い特異性を有しており、2次オーダーポテンシャルを求める際に影響を与えていると考えられる。しかし、水線上での圧力のみをカットすることで、実用上は十分に精度のある解が得られていると考えられる。実際、圧力分布においては水線上において誤差がみられるものの、これを物体表面にわたって積分して得られる波力においては、間接法との良好な一致が見られたのは、影響が限定的であるためと考えられる。また、図-7に物体周辺の波高分布について示したが、こちらも、水線上のポテンシャルの誤差の影響を受けている(式(74)～式(76)より、波高分布はその点でのポテンシャルと直接関連している)が、水線上での値を外挿により求め

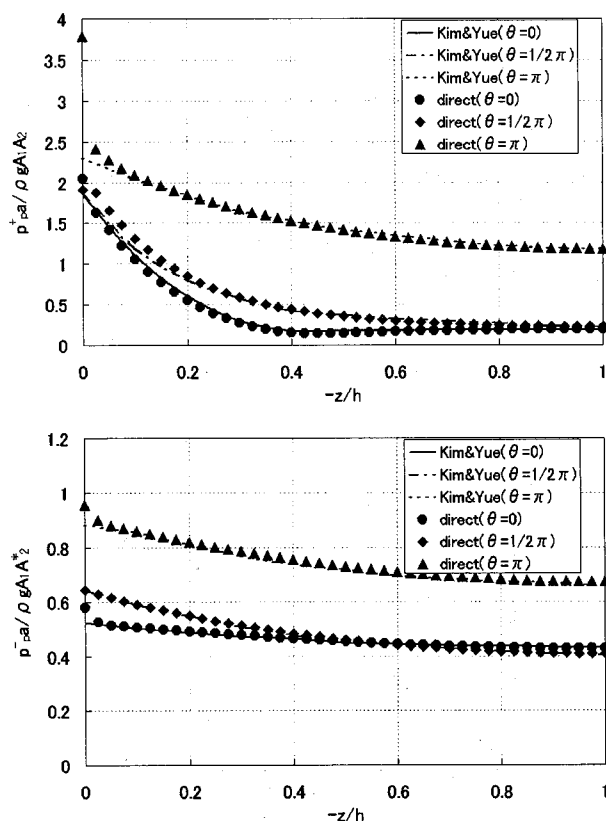


図-6 1方向2周波数に対する圧力分布 (上: 和周波数、下: 差周波数)

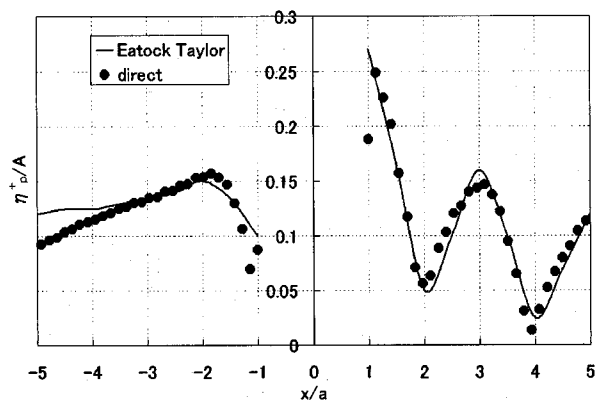
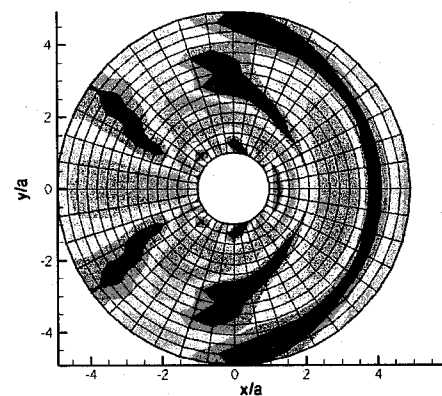


図-7 1方向2周波数に対する波高分布 (上: 物体周辺の波高分布、下: $y/a = 0$ における波高分布)

る等の手段を採用することで、実用上はほぼ満足のいく結果が得られたといえる。また、本研究では、着底円筒に対して検証をおこなったが、本プログラムは任意形状の着底物体、浮体いずれにも適用可能であり、これらに対する検証の後、実用的な解析に適用していきたい。

5. 結論

本研究ではこれまでの間接法とは違い2次オーダー回折波ポテンシャルを直接求めることで波力のみでなく、圧力分布や波高分布についても算出できる直接法による高精度な数値解析プログラムの開発を目的とした。また、多方向不規則波に対応するために、2方向から異なる2周波数を有する波が入射する場合における2次オーダー回折波についての解析を行なった。以下に本研究の結論を述べる。

- 2次オーダー回折波力について、2方向2周波数に対応する直接法を用いたプログラムを開発し、これまでに開発された間接法によるプログラムによる結果との比較により、その妥当性を確認した。
- 2次オーダーの圧力分布、波高分布についても定式化、プログラミングをおこない、着底円筒における解析解との比較の結果、水線上における値を

除けば妥当な値の得られていることを確認した。

- 水線上での2次回折波ポテンシャルにおける誤差を小さくするための改良をおこない、さらに解析精度を上げることが今後の課題である。

参考文献

- 1) Molin, B.: Second-order diffraction loads upon three-dimensional bodies, *Appl. Ocean Res.*, Vol.1, pp.197-202, 1979.
- 2) Kim, M.-H. and Yue, D.K.P.: The complete second-order diffraction solution for an axisymmetric body. Part 1. Monochromatic incident waves, *J. Fluid Mech.*, Vol.200, pp.235-264, 1989.
- 3) Kim, M.-H. and Yue, D.K.P.: The complete second-order diffraction solution for an axisymmetric body. Part 2. Bichromatic incident waves and body motions, *J. Fluid Mech.*, Vol.211, pp.557-593, 1990.
- 4) Ogilvie, T.F.: Second order hydrodynamic effects on ocean platforms, *Intl Workshop Ship & Platform Motions, Berkeley*, pp.205-265, 1990.
- 5) Matsui, T., Sakoh, Y. and Nozu, T.: Second-order sum-frequency oscillations of tension-leg platforms: prediction and measurement, *Appl. Ocean Res.*, Vol.15 pp.107-118, 1993.
- 6) Faltinsen, O.M. and Loken, A.E.: Slow drift oscillations of a ship in irregular waves, *Appl. Ocean Res.*, Vol.1 pp.21-31, 1978.
- 7) WAMIT, Inc.: WAMIT User Manual, available at <http://www.wamit.com/>, 2006.
- 8) Teng, B. and Eatock Taylor, R.: New higher or-

der boundary element method for wave diffraction/radition, *Appl. Ocean Res.*, Vol.17, pp.71-77, 1995.

- 9) 渡邊英一, 宇都宮智昭, 佐藤宏樹: 任意形状浮体に作用する2次回折波力の高精度計算プログラムの開発, 第17回海洋工学シンポジウム論文集, pp.305-319, 2003.
- 10) Eatock Taylor, R. and Huang, J.B.: Second-order wave-diffraction by an axisymmetric body in monochromatic waves, *Proc. R. Soc. Lond. A*. Vol.453, pp.1515-1541, 1997.
- 11) 山崎紀子: 海洋構造物に作用する二次オーダー回折波の解析, 京都大学大学院修士論文, 2005.

(2007年4月13日 受付)