

シェル要素を用いた鋼板腐食に伴う体積欠損過程の有限要素解析法について

A study on finite element analysis based on shell element considering a process of volume being decrease by corrosion

玉川 新悟*・三好 崇夫**・奈良 敬***

Shingo TAMAGAWA, Takao MIYOSHI and Satoshi NARA

*学生員 大阪大学大学院博士前期課程 工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)

**正会員 博(工) 大阪大学大学院助教 工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)

***正会員 工博 大阪大学大学院教授 工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)

Damages of steel bridges from corrosion are the major factor in their replacement. From a view point of rational maintenance, it is necessary for the damage to be assessed by use of their ultimate strength. Therefore, this study develops a finite element method that estimate the ultimate strength of steel structures, and proposes a shell element that take into consideration with a process of volume being decreased by corrosion. With numerical example, the proposed method is demonstrated.

Key Words: Shell element, Finite element method, corrosion, process of volume loss

1. はじめに

現在、高度成長期に建設された多くの橋梁が高齢化を迎えており、長年の併用中に損傷を生じたものも少なくない。このため、老朽化した橋梁の補修・補強、架け替えの必要性を診断する技術や、損傷した鋼部材の補修・補強方法を検討するための技術の確立は重要である。中でも、鋼橋における腐食損傷は、架け替え理由の大きな要因を占めており¹⁾、維持管理の合理化を促進するためにも、このような技術の果たす役割は大きいと考える。

これまでに、このような腐食損傷を有する鋼橋の健全性を評価するための基準の一つとして、平均板厚や有効板厚を用いて、腐食損傷した鋼板要素の残存耐荷力に関する評価式が提案されている^{2), 3)}。これらの評価式は実験的に確立されたものであるが、実橋に生ずる腐食形状は多種多様であり、数少ない実験結果をもとに、腐食損傷が生じた鋼板要素や鋼部材の残存耐荷力を予測するのは適切でなく、有限要素解析などの数値解析法を用いることにより、既設鋼橋の腐食損傷を生じた鋼板要素や鋼部材で計測した板厚に基づいて、残存耐荷力を正確に予測するのが適切であると考えられる。このような観点から、数値解析法を用いて、腐食損傷を有する鋼板や鋼部材などの残存耐荷力を評価した研究が報告されているものの、その多くは、腐食をモデル化する際に、腐食による体積欠損後の形状を初期状態としている^{4)~6)}。しかしながら、実際の橋梁における腐食は、死荷重下において徐々に進行するため、体積欠損に伴う残留応力の再分配や構造物

が受ける変形履歴の影響が生じる。後藤ら^{7)~9)}は、この点に着目し、体積欠損過程を考慮した解析法をはり要素、ソリッド要素について提案している。ソリッド要素を用いて腐食損傷を有する鋼板をモデル化すると、複雑な表面形状を有する鋼板の応力状態を表現するためには有効であるが、板厚方向に多くの要素分割が必要となる。そこで、差し当たり板要素の残存耐荷力に影響を及ぼすと考えられる、腐食による体積欠損形状を比較的滑らかに与えた場合を想定し、シェル要素を用いてこれをモデル化することにより、要素数を低減させて計算効率を向上させることが考えられる。本研究では、シェル要素を用いることにより、腐食に伴う体積欠損過程でもたらされる力学挙動の変化を考慮できる有限要素解析法の開発を目的とした。シェル要素は、定式化の容易さや信頼性の高さ、さらに腐食表面を滑らかに表現することが可能なことから 8 節点アイソパラメトリックシェル要素を採用した。本論文では、この解析法の概要を述べるとともに、数値計算例を通して弾性有限変位範囲内における妥当性を検証した結果を報告する。

2. 体積欠損過程を考慮した有限要素解析法

本章では、8 節点アイソパラメトリックシェル要素を用いて、腐食に伴う体積欠損過程で鋼板にもたらされる力学挙動の変化を考慮できる解析法を説明する。本解析法は、幾何学的非線形問題に対する定式化として、更新 Lagrange 法を用いた。なお、定式化にあたり、諸量を記

述するのに参照する擬似的な時刻を左下符号, その諸量を生ずる時刻を左肩符号, および増分間の反復回数を右肩(0)を付して示すことにする. また, 左下符号のみが付される諸量は増分, および参照する時刻とその量を生ずる時刻が同一の諸量は左肩符号のみを付して示す.

2. 1 仮想仕事式と有限要素式への離散化

本節では, 一般的な連続体に対する仮想仕事式に基づいた有限要素式への離散化の過程を示す.

図-1 に示すように, 初期状態を時刻 t_0 , 既知の釣り合い状態を時刻 t , また時刻 t から体積が変化することによる新たな釣り合い状態を時刻 $t + \Delta t$ とする.

いま, 時刻 t における体積欠損量を $'\Delta v$, 表面積欠損量を $'\Delta s$ としたとき, 時刻 t を基準とした時刻 $t + \Delta t$ における仮想仕事の原理式は次式で与えられる¹⁰⁾.

$$\int_{t_v - t_{\Delta v}}^{t + \Delta t} \mathbf{S} : \delta \mathbf{t}^{t + \Delta t} \mathbf{E} dv = \int_{t_s - t_{\Delta s}}^{t + \Delta t} \mathbf{i} \cdot \delta \mathbf{u} ds + \int_{t_v - t_{\Delta v}}^{t + \Delta t} \rho' \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dv \quad (1)$$

ここに, $\mathbf{S}$: 第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル, $\mathbf{E}$: Green-Lagrange ひずみテンソル, $\mathbf{i}$: 表面力ベクトル, $\rho \mathbf{g}$: 物体力ベクトル, $\delta \mathbf{u}$: 仮想変位ベクトルである.

また, 上式は時刻 t から $t + \Delta t$ の間に外力が変化しない場合を取り扱っているが, 外力の変化を考慮する場合は ${}^{t + \Delta t} \mathbf{i}$, ${}^{t + \Delta t} \mathbf{g}$ として定式化すればよい.

式(1)の Green-Lagrange ひずみテンソルを線形項 $\mathbf{E}_L$ と非線形項 $\mathbf{E}_{NL}$ に分離し, それぞれの変分を $\delta \mathbf{E}_L$, $\delta \mathbf{E}_{NL}$ とすると, Green-Lagrange ひずみテンソルの変分は次式で表すことができる.

$$\delta \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}_L + \delta \mathbf{E}_{NL} \quad (2)$$

一方, Cauchy 応力テンソルを $\mathbf{T}$ と表したとき, 第2Piola-Kirchhoff 応力テンソルは以下のように表される.

$${}^{t + \Delta t} \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{S} = \mathbf{T} + \mathbf{S} \quad (3)$$

ここで, 式(2)と(3)を式(1)に代入し, $\mathbf{u}$ に関する高次項を消去して整理すると次式を得る.

$$\begin{aligned} & \int_{t_v - t_{\Delta v}}^{t + \Delta t} (\mathbf{T} : \delta \mathbf{E}_{NL} + \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}_L) dv \\ &= \int_{t_s - t_{\Delta s}}^{t + \Delta t} \mathbf{i} \cdot \delta \mathbf{u} ds + \int_{t_v - t_{\Delta v}}^{t + \Delta t} \rho' \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_{t_v - t_{\Delta v}}^{t + \Delta t} \mathbf{T} : \delta \mathbf{E}_L dv \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)は, 体積欠損を考慮した非線形方程式を表しており, これを解くことにより, 体積欠損過程での力学挙動の変化を考慮した解析が可能となる.

次に, 有限要素法における接線剛性マトリックスを求めるため, 式(4)の左辺を時間増分 Δt で割り, $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとることで次式を得る.

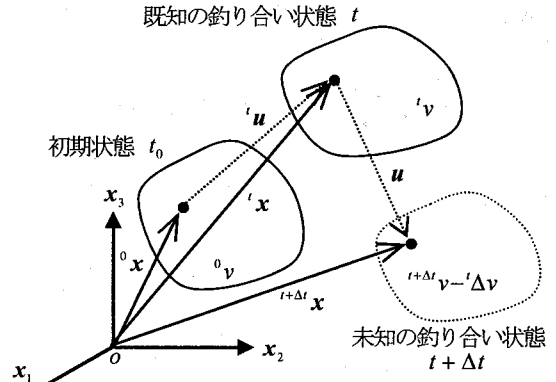


図-1 諸量とその参照時刻

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \int_{t_v - t_{\Delta v}}^{t + \Delta t} (\mathbf{T} : \delta \mathbf{E}_{NL} + \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}_L) dv \right\} / \Delta t \\ &= \int_{t_v - t_{\Delta v}}^t \mathbf{T} : (\delta \mathbf{E}_{NL})' dv + \int_{t_v - t_{\Delta v}}^t \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}_L dv \end{aligned} \quad (5)$$

ただし式(5)右辺の誘導において次の関係を用いた.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{S}}{\Delta t} \right) = \mathbf{S}' \quad (6)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{u}}{\Delta t} \right) = \mathbf{u}' \quad (7)$$

$$(\delta \mathbf{E}_{NL})' = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial' \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial' \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} \quad (8)$$

式(5)に応力とひずみの関係式を代入し, 有限要素式に離散化すると, 次式で表される接線剛性マトリックス $\mathbf{K}$ が得られる.

$$\begin{aligned} & \int_{t_v - t_{\Delta v}}^t \mathbf{T} : (\delta \mathbf{E}_{NL})' dv + \int_{t_v - t_{\Delta v}}^t \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}_L dv \\ &= \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{NL} \mathbf{U} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_L \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \end{aligned} \quad (9)$$

ここに, $\delta \mathbf{U}$: 節点の仮想変位ベクトル, $\mathbf{U}$: 節点速度ベクトルである. また $\mathbf{K}_{NL}$ と $\mathbf{K}_L$: 幾何剛性マトリックス, 弾性剛性マトリックスであり, それぞれ次式で表される.

$$\mathbf{K}_{NL} = \sum_e \int_{t_{v_e} - t_{\Delta v_e}}^t \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{T} \mathbf{B}_{NL} dv \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_L = \sum_e \int_{t_{v_e} - t_{\Delta v_e}}^t \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dv \quad (11)$$

ここに, v_e : 各要素の体積, $\sum$: 構造全体系へのアセンブリ, $\mathbf{T}$: Cauchy 応力テンソルのベクトル表示, $\mathbf{B}_L$ と $\mathbf{B}_{NL}$: 変位とひずみを関係づけるマトリックスである. また $\mathbf{D}$ は, 構成マトリックスであり, 式(6)のベクトル表示を $\mathbf{S}'$, Green-Lagrange ひずみ速度のベクトル表示を $\mathbf{E}'$ としたとき次式が成り立つ.

$$\mathbf{S}' = \mathbf{D} \mathbf{E}' \quad (12)$$

また, 式(4)の右辺は次式のように有限要素式へ離散化できる.

$$\int_{t_s-t_{\Delta t}}^{t_s} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} ds + \int_{t_v-t_{\Delta v}}^{t_v} \rho' \bar{\mathbf{g}} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_{t_v-t_{\Delta v}}^{t_v} \mathbf{T} : \delta \mathbf{E}_L dv \quad (13)$$

$$= \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{H}$$

式中の ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ と ${}^t\mathbf{H}$ は、形状関数を N 、各要素の表面積を s_e で表せば、次式で与えられ、それぞれ残存体積に載荷されている外力と残存体積における内力を表す。

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \sum_e \int_{t_{s_e}-t_{\Delta s_e}}^{t_{s_e}} N^T \bar{\mathbf{t}} ds + \sum_e \int_{t_{v_e}-t_{\Delta v_e}}^{t_{v_e}} \rho N^T \bar{\mathbf{g}} dv \quad (14)$$

$${}^t\mathbf{H} = \sum_e \int_{t_{v_e}-t_{\Delta v_e}}^{t_{v_e}} \mathbf{B}_L^T \mathbf{T} dv \quad (15)$$

反復法に Newton-Raphson 法を用いると、時刻 t から $t+\Delta t$ 間の反復 r 回目における剛性方程式は、式(9)と(13)から $\delta \mathbf{U}$ を消去し、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(r-1)} \Delta \mathbf{U}^{(r)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{(r-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(r)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(r-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(r)} \\ \mathbf{R}^{(r-1)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{(r-1)} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに、諸量の右肩括弧内の r は、反復計算回数を表すもので、($r=1,2,3,\dots$)とする。また ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(r)}$ 、 $\Delta \mathbf{U}^{(r)}$ ：それぞれ時刻 t から $t+\Delta t$ 間の反復 r 回目における変位ベクトル、直前の反復点からの増分変位ベクトル、 $\mathbf{R}^{(r)}$ ：不平衡力ベクトルである。

ただし、 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{NL}^{(0)} = \mathbf{B}_{NL}$ 、 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_L^{(0)} = \mathbf{B}_L$ 、 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(0)} = \mathbf{T}$ 、 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{D}$ 、 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{H}$ 、また ${}^{t+\Delta t}v_e^{(0)} = v_e$ として、式(16)における諸量は次式で表される。

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \mathbf{F} - \sum_e \int_{t_{\Delta s_e}}^{t_{s_e}} N^T \bar{\mathbf{t}} ds - \sum_e \int_{t_{\Delta v_e}}^{t_{v_e}} \rho N^T \bar{\mathbf{g}} dv \quad (17)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(r-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{NL}^{(r-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_L^{(r-1)} \quad (18)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{NL}^{(r-1)} = \sum_e \int_{t_{\Delta v_e}^{(r-1)}-t_{\Delta v_e}}^{t_{\Delta v_e}^{(r-1)}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{NL}^{(r-1)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(r-1)} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{NL}^{(r-1)} dv \quad (19)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_L^{(r-1)} = \sum_e \int_{t_{\Delta v_e}^{(r-1)}-t_{\Delta v_e}}^{t_{\Delta v_e}^{(r-1)}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_L^{(r-1)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(r-1)} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_L^{(r-1)} dv \quad (20)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{(r-1)} = \sum_e \int_{t_{\Delta v_e}^{(r-1)}-t_{\Delta v_e}}^{t_{\Delta v_e}^{(r-1)}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_L^{(r-1)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(r-1)} dv \quad (21)$$

2. 2 8節点シェル要素を用いた体積欠損解析

本節では、体積欠損を表すパラメータを導入することで、8節点アイソパラメトリックシェル要素を用いた体積欠損解析について説明する。

(1) 体積欠損パラメータ

本解析法で使用する8節点アイソパラメトリック要素は、面外せん断変形を許容する Mindlin-Reissner の仮定に基づいたものであり、時刻 t における要素内の任意点での位置ベクトル $\mathbf{x}$ は次式で表される。

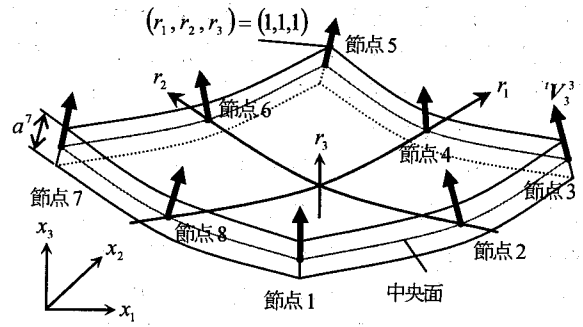


図-2 8節点アイソパラメトリック要素

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^8 N^n(r_1, r_2) \mathbf{x}^n + \frac{r_3}{2} \sum_{n=1}^8 a^n N^n(r_1, r_2) \mathbf{V}_3^n \quad (22)$$

ここに、図-2に示すように、 $N^n(r_1, r_2)$ ：節点 n ($n=1,2,\dots,8$)における形状関数、 $\mathbf{x}^n$ ：全体系座標値、 a^n ：板厚および $\mathbf{V}_3^n$ は板厚の方向を示すベクトルである。

ここで、8節点アイソパラメトリック要素を用いた本解析法では、時刻 t における体積欠損量を各節点の板厚の減少量で表現する。即ち、体積欠損直後の時刻 t における任意点での位置ベクトル $\hat{\mathbf{x}}$ は次式で表される。

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{n=1}^8 N^n(r_1, r_2) \mathbf{x}^n + \frac{r_3}{2} \sum_{n=1}^8 {}^{t+\Delta t}a^n N^n(r_1, r_2) \mathbf{V}_3^n \quad (23)$$

ここに、 ${}^{t+\Delta t}a^n$ は体積欠損後の板厚であり、時刻 t における板厚の減少量を Δa^n として次式で表され、本解析法では、体積欠損を表す重要なパラメータとなる。

$${}^{t+\Delta t}a^n = a^n - \Delta a^n \quad (24)$$

時刻 t の収束点から $t+\Delta t$ 間の反復 r 回目における更新後の位置ベクトル ${}^{t+\Delta t}\mathbf{x}^{(r)}$ は次式で表される。

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{x}^{(r)} = \sum_{n=1}^8 N^n(r_1, r_2) {}^{t+\Delta t}\mathbf{x}^n + \frac{r_3}{2} \sum_{n=1}^8 {}^{t+\Delta t}a^n N^n(r_1, r_2) {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_3^n \quad (25)$$

また式(25)の板厚の方向を示すベクトル ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_3^n$ は、有限回転の影響を考慮するため、次式で表されるように、有限回転行列 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^n$ を用いて更新する¹⁰⁾。

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_3^n = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^n {}^t\mathbf{V}_3^n \quad (26)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^n = \mathbf{I} + \frac{\sin \omega}{\omega} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\Phi}^n + 2 \left(\frac{\sin \omega/2}{\omega} \right)^2 ({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\Phi}^n)^2 \quad (27)$$

ここに、 ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\Phi}^n$ ：回転軸を表すベクトルを成分に持つ反対称マトリックス、 ω ：板厚の方向を表すベクトルの回転角である。

(2) 体積欠損に起因した不平衡力の算定

体積欠損過程を考慮した本解析法では、反復1回目($r=1$)において、式(24)で示した体積欠損パラメータが与えられ、この体積欠損パラメータを用いて式(16)で計算される不平衡力 $\mathbf{R}^{(r)}$ を算定する必要がある。この反

復1回目における不平衡力は、通常の構造解析で与える外力増分に相当するものと考えることができ、これを正確に算定する必要がある。ここでは、この不平衡力の算定方法について説明する。

まず、内力について考える。反復1回目では ${}^{t+\Delta t} \mathbf{H}^{(0)} = {}^t \mathbf{H}$ となるので式(15)より、直前の収束点のCauchy 応力 ${}^t \mathbf{T}$ と変位とひずみを関係づけるマトリックス ${}^t \mathbf{B}_L$ を体積欠損後の積分範囲で積分しなければならない。本解析法では、積分方法として自然座標系3方向すべてに Gauss 積分を用いた。Gauss 積分を用いると、 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{H}^{(0)}$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{H}^{(0)} &= \sum_g \int_{V_g} ({}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{T}) dV \\ &= \sum_g \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{T} \det \mathbf{J} dr_1 dr_2 dr_3 \\ &= \sum_g \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{m_g} \sum_{h=1}^{l_g} w_i w_j w_h ({}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{T} \det \mathbf{J})_{\eta_{1i}, \eta_{2j}, \eta_{3h}} \end{aligned} \quad (28)$$

ここに、 n_g ：自然座標系 r_1 方向の積分点数、 m_g ：自然座標系 r_2 方向の積分点数、 l_g ：自然座標系 r_3 方向の積分点数であり、 w_i 、 w_j 、また w_h はそれぞれ各積分点での Gauss 積分の重み係数である。

式(28)において、Jacobian マトリックス $\mathbf{J}$ は次式で表され、位置ベクトル $\mathbf{x}$ の関数、即ち、体積欠損パラメータ ${}^{t+\Delta t} a^n$ の関数となっている。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial r_1} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial r_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial r_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial r_2} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial r_3} & \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial r_3} & \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial r_3} \end{bmatrix} \quad (29)$$

さらには、 ${}^t \mathbf{T}$ 、 ${}^t \mathbf{B}_L$ は、式(28)よりそれぞれ体積欠損後の積分点の位置における値でなくてはならないが、 ${}^t \mathbf{T}$ 、 ${}^t \mathbf{B}_L$ ともに体積欠損前の積分点における値が既知であるため、これらを体積欠損後の積分点での値に計算し直す必要がある。

体積欠損後の積分点位置における ${}^t \mathbf{B}_L$ は、位置ベクトル $\mathbf{x}$ に関して展開できるため容易に求めることができる。しかしながら、非線形解析において、任意点における Cauchy 応力を厳密に求めることは困難であるため、体積欠損後の積分点位置の Cauchy 応力を体積欠損前に既知であった Cauchy 応力成分から線形補間により内挿することで近似した。この際、補間の精度を上げるため、積分点とは別に応力評価点を設け、体積欠損前の応力評価点における Cauchy 応力の値を用いることで、体積欠損後の積分点と応力評価点での Cauchy 応力を求めた。ここで応力評価点は、面内方向の自然座標値が他の積分点のそれと同値であり、面外方向の自然座標値を任意に設定した点として定義する。

図-3 は、面内方向に等しい自然座標値を有する積分

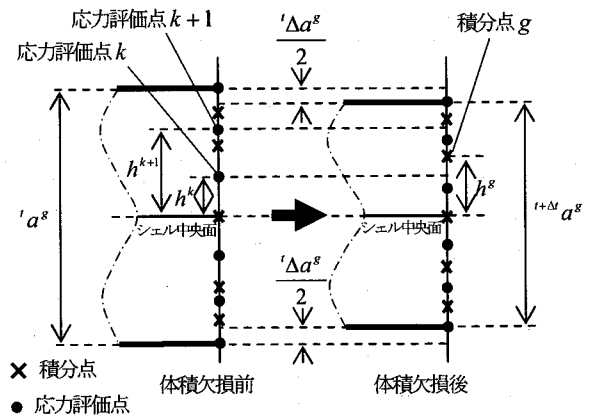


図-3 積分点、応力評価点での体積欠損前後の関係

点と応力評価点を体積欠損前と体積欠損後に対して示したものである。図中に示された積分点 g 、応力評価点 k と $k+1$ は、面外方向の自然座標値がそれぞれ、 r_3^g 、 r_3^k と r_3^{k+1} 、また面内2方向の自然座標値が r_1^m 、 r_2^n として定義された点である。ただし、シエル中央面と積分点 g 、応力評価点 k 、 $k+1$ の距離をそれぞれ h^g 、 h^k また h^{k+1} と表したとき、 $h^k \leq h^g < h^{k+1}$ が成り立つものとする。

以下では、図-3に示される体積欠損後の積分点 g における Cauchy 応力を体積欠損前の応力評価点 k と $k+1$ における Cauchy 応力を用いて求めることで、本解析法で用いた線形補間方法を説明する。

面内2方向の自然座標値が r_1^m 、 r_2^n を満たす積分点、応力評価点の体積欠損前と欠損後における板厚をそれぞれ ${}^t a^g$ 、 ${}^{t+\Delta t} a^g$ で表すと、式(23)、(25)より次式が成り立つ。

$${}^t a^g = \left| \sum_{n=1}^8 {}^t a^n N^n(r_1^m, r_2^n) V_3^n \right| \quad (30)$$

$${}^{t+\Delta t} a^g = \left| \sum_{n=1}^8 {}^{t+\Delta t} a^n N^n(r_1^m, r_2^n) V_3^n \right| \quad (31)$$

また、 h^g 、 h^k と h^{k+1} はそれぞれ次式で表される。

$$h^g = \left| \frac{r_3^g}{2} \sum_{n=1}^8 {}^{t+\Delta t} a^n N^n(r_1^m, r_2^n) V_3^n \right| \quad (32)$$

$$h^k = \left| \frac{r_3^k}{2} \sum_{n=1}^8 {}^t a^n N^n(r_1^m, r_2^n) V_3^n \right| \quad (33)$$

$$h^{k+1} = \left| \frac{r_3^{k+1}}{2} \sum_{n=1}^8 {}^t a^n N^n(r_1^m, r_2^n) V_3^n \right| \quad (34)$$

体積欠損後の積分点 g における Cauchy 応力 ${}^t \mathbf{T}(r_3^g)$ は、欠損前の応力評価点 k と $k+1$ での Cauchy 応力 ${}^t \mathbf{T}(r_3^k)$ 、 ${}^t \mathbf{T}(r_3^{k+1})$ から次式で示される線形補間式を用いることで近似することができる。

$${}^t \mathbf{T}(r_3^g) = {}^t \mathbf{T}(r_3^k) + \frac{{}^t \mathbf{T}(r_3^{k+1}) - {}^t \mathbf{T}(r_3^k)}{h^{k+1} - h^k} \cdot (h^k - h^g) \quad (35)$$

同様に、体積欠損後の応力評価点における Cauchy 応力も欠損前の応力評価点における Cauchy 応力から線形補間して求めることができる。

式(35)より求めた Cauchy 応力を式(28)に用いることで、体積欠損直後の内力 ${}^{t+\Delta t}_i\mathbf{H}^{(0)}$ を求めることができる。この内力と外力の差が体積欠損により生じた不平衡力となる。

以上で示した体積欠損に起因した不平衡力の算定方法は、弾性問題に限ったものではなく、弾塑性問題への拡張を考慮したものである。ただし、図-3 で示したような線形補間は、板厚が上下対称に減厚した場合のみを考慮したものであり、非対称に減厚させる場合は、シェル中央面の節点が減厚に伴い移動するため適用できないという問題を有する。

2. 3 本解析法のフローチャート

2. 1, および2. 2節で示した解析法を導入した解析コードのフローチャートを図-4 に示す。

3. 数値解析例と妥当性の検証

本章では、前章で説明した体積欠損過程での力学挙動の変化が考慮できる8節点アイソパラメトリックシェル要素を用いた解析コードの妥当性について、数値解析を通して検証する。検証においては、理論値やソリッド要素を用いた解体計算コードによる数値解析結果と比較した。ここで解体計算とは、有限要素法を用いた場合、消去したい要素の剛性を0にし、どの要素にも属さなくなった節点自由度を拘束することで、所定の形状まで要素を取り除いていく方法であり、長大橋梁の架設時の安全照査や部材の製作長さの計算に用いられる。以下の例題において、ソリッド要素を用いた解体計算結果は、板厚方向に多くの要素分割を施し、その要素を徐々に消去していくことで得られたものである。

3. 1 等曲げを受ける鋼板の体積欠損解析

板の面外変位を生ずる基本的な例題として、自由端の先端に集中モーメントが作用する等曲げ状態にある鋼板を表裏面から対称に欠損させる弾性有限変位解析を行った。解析モデルと物理定数を図-5 に示す。要素分割は、板の長さ方向に5分割、幅方向に2分割とした。ここではまず、体積欠損過程が最終的な変形に及ぼす影響を調べるために、次のような2つの解析ケースを設定した。解析ケース Case-1 では、板厚 $t_0 = 5\text{mm}$ の鋼板に集中モーメントを載荷した後に集中モーメントを一定に保った状態で全要素に対して板厚 $t = 2.5\text{mm}$ まで体積欠損させる解析を行った。一方、解析ケース Case-2 は、板厚

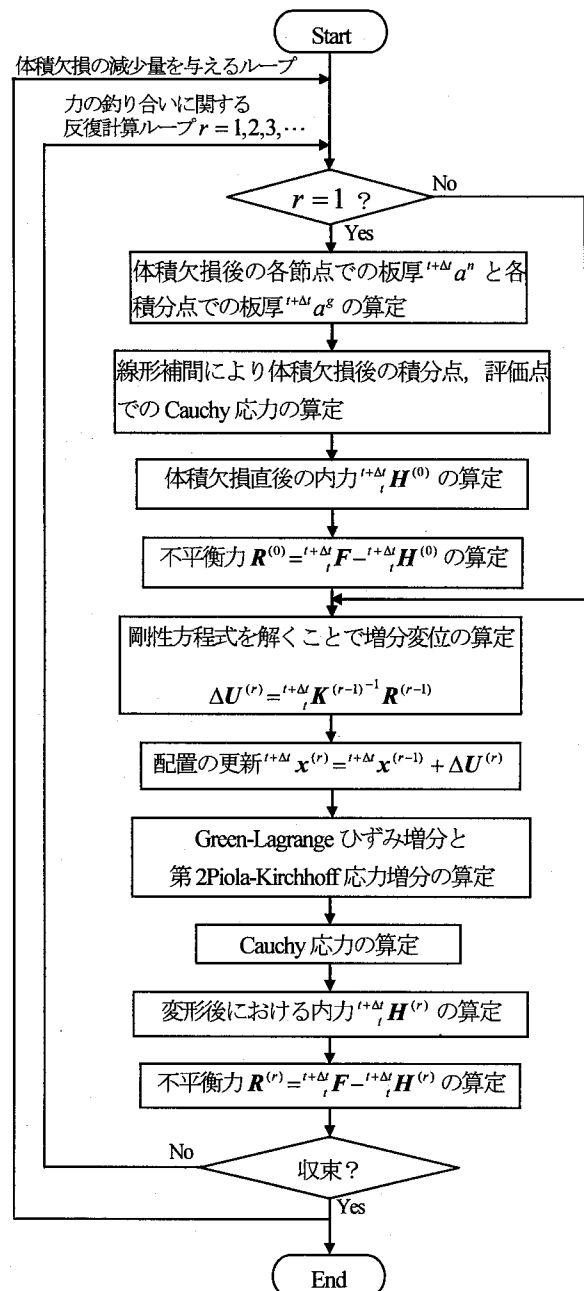


図-4 フローチャート

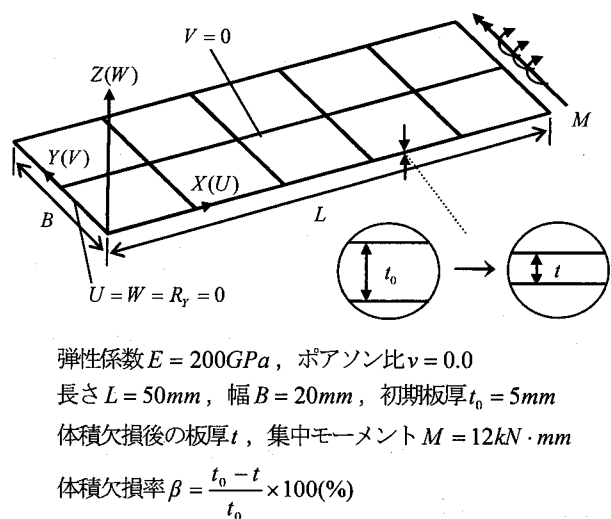


図-5 等曲げを受ける鋼板の解析モデル

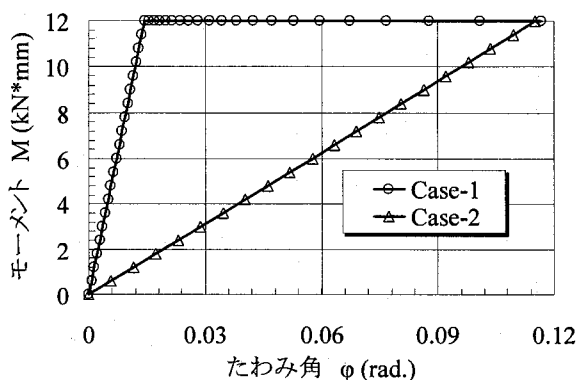


図-6 たわみ角とモーメントの関係

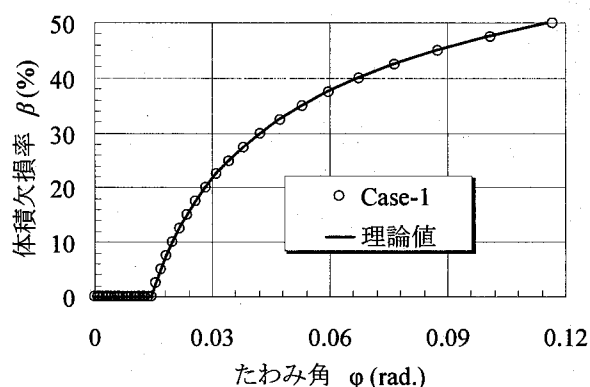


図-7 たわみ角と体積欠損率の関係

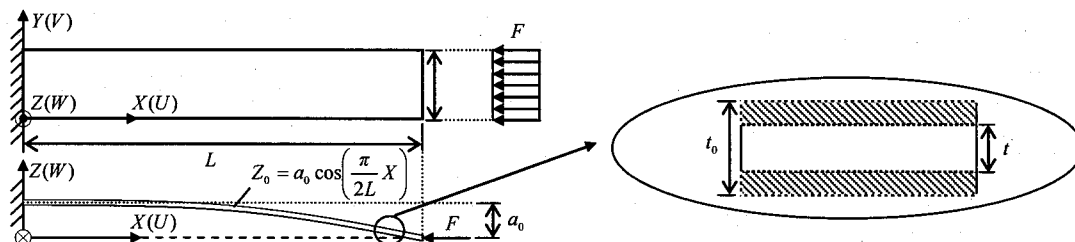


図-8 初期たわみを有する鋼板の体積欠損

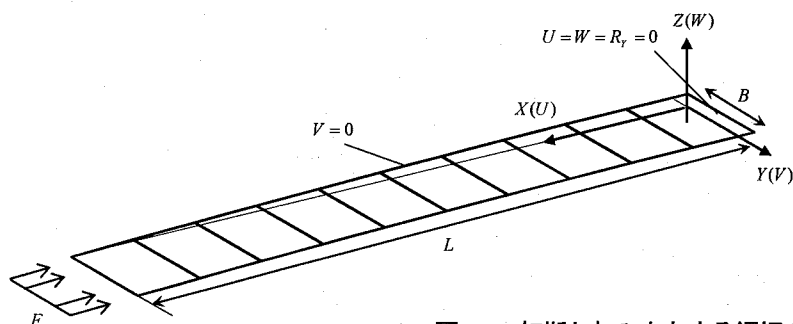


図-9 初期たわみを有する鋼板の解析モデル

弾性係数 $E = 200 \text{ GPa}$, ポアソン比 $\nu = 0.0$
 長さ $L = 50 \text{ mm}$, 幅 $B = 10 \text{ mm}$
 初期板厚 $t_0 = 0.2 \text{ mm}$, 体積欠損後の板厚 t
 圧縮力 $F = 0.5 \text{ N}$
 体積欠損率 $\beta = \frac{t}{t_0} \times 100(\%)$

$t = 2.5 \text{ mm}$ の鋼板に集中モーメントを載荷させる解析を行った。図-6 にそれぞれのケースのモーメントと自由端におけるたわみ角の関係を示すが、両ケースの解析終了時の変形が一致しているため、この例題においては体積欠損過程の影響が小さいことがわかる。次に、解析ケース Case-1 における体積欠損率とたわみ角の関係を次式で示される初等はり理論による理論値とともに図-7 に示す。

$$\varphi = \frac{ML}{E} \left\{ \frac{B}{12} \left(\frac{100 - \beta}{100} t_0 \right)^3 \right\}^{-1} \quad (36)$$

ここで、 M : 集中モーメント、 E : 弾性係数、 L : 鋼板の長さ、 B : 鋼板の幅および、 t_0 : 初期板厚である。

これより、本解析法による解析結果は理論値と良好に一致することがわかる。

3. 2 初期たわみを有する鋼板の体積欠損解析

不安定問題に対する本解析法の妥当性を検証するため、

図-8 に示すような初期たわみを有する片持ち支持された鋼板の先端に一樣な圧縮力を載荷した後、板の全断面を表裏面から対称に体積欠損させる弾性有限変位解析を行った。図-9 に示すように、鋼板は、長さ方向に10分割、幅方向に1分割してモデル化した。解析結果として載荷辺中央点での Z 方向の変位と荷重の関係を図-10 と 11 に、 X 方向の変位と荷重の関係を図-12 と 13 に示す。なお、比較のため、図-10 と 11 には本解析法を用いた解析結果 (FEA-Shell) の他、次式で示される理論値¹¹⁾をあわせて示している。

$$W = a_0 \left(\frac{P/P_E}{1 - P/P_E} \right) \quad (37)$$

ここに、 a_0 : 自由端における初期たわみであり、 P_E は次式で表される Euler 荷重である。

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (38)$$

式(38)において、 E : 弾性係数、 I : 面外方向の断面二次モーメント、および L : 片持ち鋼板の長さである。

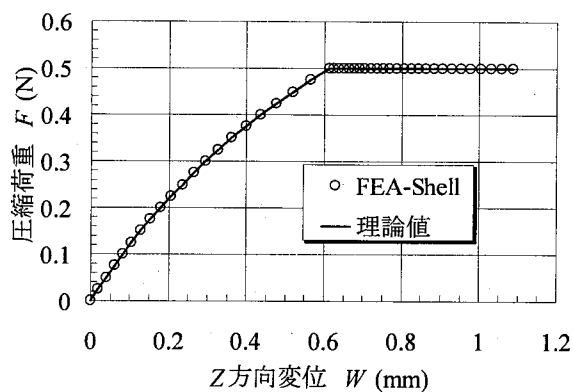


図-10 Z方向変位と荷重の関係

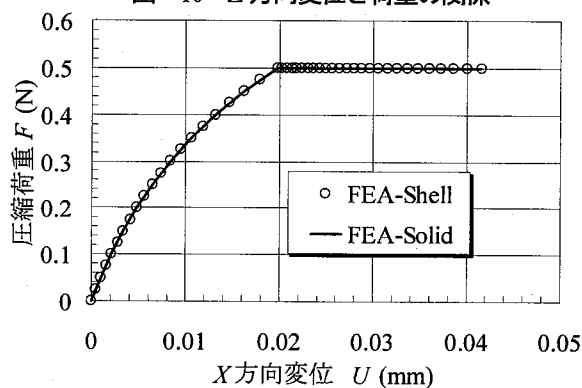


図-12 X方向変位と荷重の関係

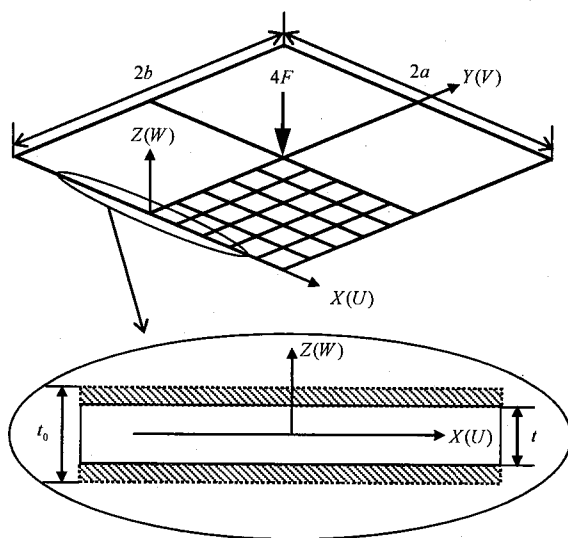


図-14 集中荷重を受ける周辺固定支持板の体積欠損

また、図-12 と 13 には、20 節点ソリッド要素を用いた解体計算結果 (FEA-Solid) もあわせて示すことで、本解析結果と比較した。

これより、本解析法は理論値および解体計算結果と良好に一致することが分かる。

3.3 面外集中荷重を受ける周辺固定支持板の体積欠損解析

幾何学的非線形性の影響の強い問題に対する本解析法の妥当性の検証と、体積欠損過程でもたらされる力学挙

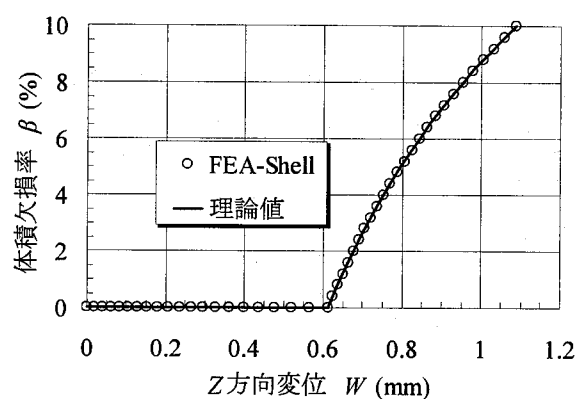


図-11 Z方向変位と体積欠損率の関係

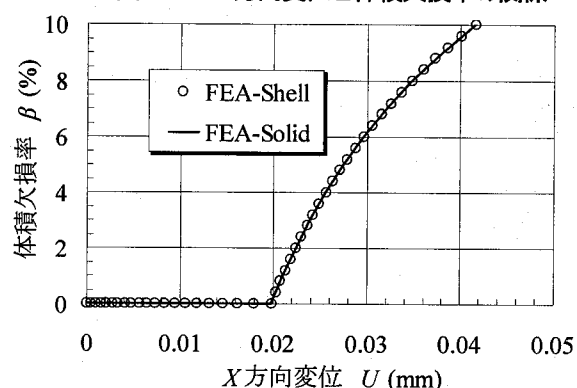


図-13 X方向変位と体積欠損率の関係

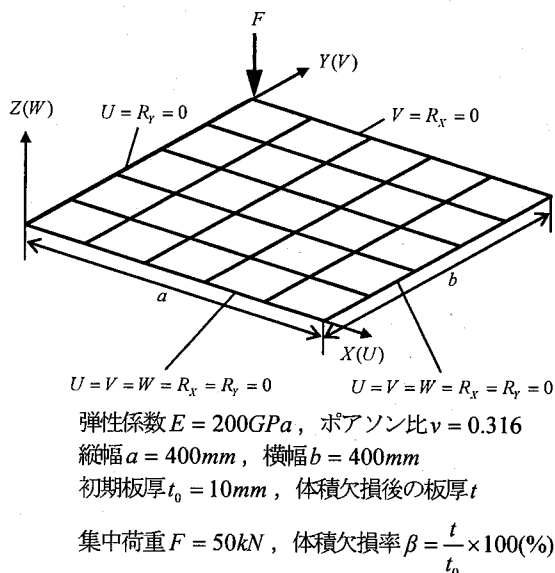


図-15 周辺固定支持板の解析モデル

動の変化の影響を調べるため、図-14 に示すような周辺固定支持された鋼板の中央に面外方向の集中荷重を載荷した後に、荷重を一定に保った状態で、板全面における板厚を表裏対称に体積欠損させる弾性有限変位解析を行った。解析モデルは、図-15 に示すように対称性を利用した 1/4 モデルとし、周辺をそれぞれ 5 等分割した。体積欠損過程が変形に及ぼす影響を調べるため、3.1 節と同様に解析ケース Case-1 と Case-2 を設定した。解析ケース Case-1 では、本解析法を用いて、初期板厚 $t_0 = 10\text{mm}$ の周辺固定支持板に集中荷重を載荷した後に、荷重を一

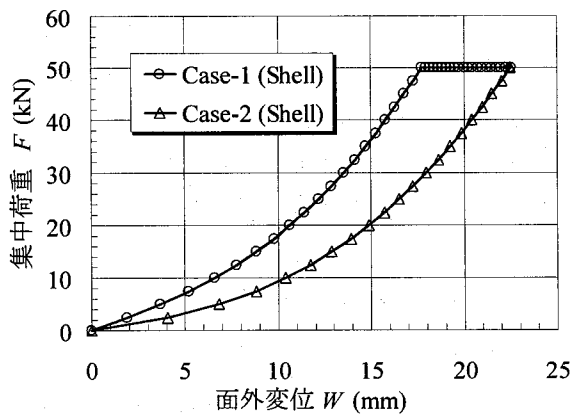


図-16 集中荷重と面外変位の関係

定に保って板厚を表裏面から対称に $t = 7.5\text{mm}$ となるまで体積欠損させる解析 (Case-1 Shell) を行った。一方、解析ケース Case-2 では、当初から板厚 $t = 7.5\text{mm}$ の周辺固定支持板としてモデル化し、集中荷重を載荷させる解析 (Case-2 Shell) を行った。この結果として、集中荷重と荷重載荷点における面外方向変位の関係を図-16 に示す。図-16 より最終的に変形状態が一致するため、この例題においても体積欠損過程が変形に及ぼす影響は小さいことがわかる。

次に、解析ケース Case-1 における体積欠損率と荷重載荷点での面外方向変位の関係を図-17 に示す。図-17 には、20 節点ソリッド要素を用いた解体計算コードによる、解析ケース Case-1 と同様の解析結果 (Case-1 Solid) もあわせて示している。図-17 より、本解析結果は解体計算結果と良好に一致しており、体積欠損過程の変形が適切に評価できていることが分かる。

4. まとめ

本論文では、腐食に伴う体積欠損過程における力学挙動の変化が考慮できる解析法をシェル要素に対して提案し、その解析法の定式化を示すとともに、その妥当性を弾性範囲内で検証した。本研究で得られた結論を要約すると次の通りである。

- ① 体積欠損過程での力学挙動の変化を考慮できるシェル要素を用いた解析法は、応力を線形補間して、体積欠損後の積分範囲での積分を実施することにより、腐食に伴う体積欠損を各節点における板厚の変化量で表現できる。
- ② 数値計算例を通して、理論値やソリッド要素を用いた解体計算結果と比較することにより、弾性有限変位の範囲内での本解析法の妥当性が示された。
- ③ 今回の例題で示した弾性有限変位解析においては、体積欠損過程の影響が小さいことが示された。

本論文で提案した定式化は、シェルが上下非対称に減厚する場合には適用できない。また、Cauchy 応力の線形補間による方法は、弾塑性問題に対しても適用可能であ

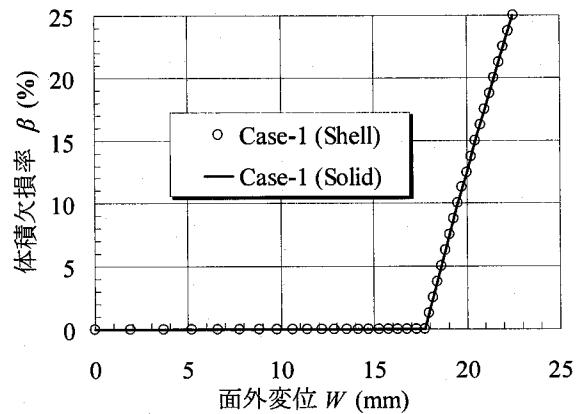


図-17 体積欠損率と面外変位の関係

ると考えているが、その妥当性の検証は行っており、これらは今後の課題とする。

参考文献

- 1) 名取 暢, 西川 和廣, 村越 潤, 大野 崇: 鋼橋の腐食事例調査とその分析, 土木学会論文集, 第 668 号/I-54, pp.299-311, 2001.
- 2) 羽島 克利, 藤井 堅: 腐食した鋼板の残存耐荷力評価, 土木学会第 49 回年次学術講演会, pp.524-525, 1994.
- 3) 山沢 哲也, 野上 邦栄, 森 猛, 塚田 祥久: 腐食鋼部材の腐食形状計測と曲げ耐荷力実験, 構造工学論文集, Vol.52A, pp.711-720, 2006.
- 4) ボー タン フン, 佐々木 栄一, 市川 篤司: 腐食を模擬した模型桁のせん断耐力に関する実験および解析, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.1099-1105, 2002.
- 5) 森 猛, 渡 邊一, 正井 資之: 腐食した鋼板の表面形状シミュレーションと腐食鋼桁の曲げ耐力, 構造工学論文集, Vol.49A, pp.675-686, 2003.
- 6) 海田 辰将, 藤井 堅, 中村 秀治: 腐食したフランジの簡易な圧縮強度評価法, 土木学会論文集, 第 766 号/I-68, 59-71, 2004.
- 7) 後藤 芳顕, 川西 直樹: 腐食や補修の影響を考慮した長期間の力学性能評価のための構造解析法の開発, 土木学会論文集, 第 689 号/I-57, pp.85-100, 2000.
- 8) 後藤 芳顕, 川西 直樹: 腐食と補修履歴を考慮した鋼構造物の耐震性能評価のための解析手法, 土木学会論文集, 第 738 号/I-64, pp.233-244, 2003.
- 9) 後藤 芳顕, 川西 直樹: 腐食などの体積欠損による鋼構造物の残留応力・残留たわみの変化の解析と圧縮板の残存耐荷力評価, 構造工学論文集, Vol.51A, pp.127-138, 2005.
- 10) 久田 俊明, 野口 裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 2004.
- 11) Timoshenko, S. and Gere, J.: Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 1961.

(2007 年 4 月 12 日 受付)