

河川流-浸透流間の安定性について

On stability between river flow and seepage flow

大友裕隆*・泉 典洋**

Hirotaka OHTOMO and Norihiro IZUMI

*正会員 東北電力株式会社 新潟技術センター

**正会員 PhD 北海道大学教授 大学院工学研究科環境フィールド工学専攻

The instability of water flow has been studied by a large number of researchers from a variety of points of view for a long time. In this study, a linear stability analysis is performed with the use of the Reynolds averaged Navier-Stokes equations and Darcy's law extended to more general cases in order to investigate the instability of flow on permeable river beds, and resulting water exchange between flowing water in rivers and seepage water beneath flat river beds. The spectral collocation method incorporated with the Chebyshev polynomials is employed in order to perform numerical solution of perturbed equations. It is found from the analysis that, in the case of permeable beds, flow becomes unstable in the range of small Froude numbers where flow is stable in the case of impermeable beds.

Key Words : *instability, river flow, seepage flow, Darcy's law, linear stability analysis*

1. はじめに

急勾配斜面上の流れには転波列と呼ばれる波列が形成されることが知られている。この転波列については流体力学の分野において古くから研究されており、発生初期における線形安定性や十分発達した準定常状態に関する研究などが数多くなされている^{1),2),3)}。

一方、境界面を境にして上層と下層に流れが存在している状況下では、流速分布に不連続が存在すると、流れは微小擾乱に対して不安定となることが知られている⁴⁾。礫床河川等の流れのように、底面に浸透層が存在しているような場合も、河川流と浸透流の境界面において流速の位相差が生じて、流れは不安定となることが予想される。同時に、フルード数が比較的大きい場合、河川流は不安定となり、水面に転波列が発生する。これら水面における不安定現象と河川流-浸透流間における不安定現象は相互に影響を及ぼし合うことが予想される。

また、河床上における流れの不安定現象は、河川流-浸透流間に流水交換が発生することを意味している。デューン等の河床形態を有する場所においては、実際に流水交換現象が確認されており、その影響を大きく受ける hyporheic zone (河床間隙水域) と呼ばれる浸透層内の領域は、河川の生物環境を考える上で重要な水域であることが知られている⁵⁾。河川流-浸透流間に上述のような不安定現象が存在するとすれば、流水交換現象はデューン河床だけでなく平坦床の状態においても発生することが考えられる。このように、河川流-浸透流間における不安定現象を明らかにすることは、流体力学的な興味のみならず河川環境の観点からも重要

な課題である。

筆者らはこれまでも河川流-浸透流間の不安定現象を説明するための線形安定解析を提案している^{6),7)}。解析には河川流および浸透流を水深および浸透層厚方向に平均した浅水流近似や⁶⁾、渦動粘性係数を断面内で一定とし、河床面での流速をスリップさせる定剪断層近似を用いてきた⁷⁾。浅水流近似および定剪断層近似は、それぞれ転波列の発生^{1),2),3)}およびデューンの形成^{9),10)}に関する解析において有用であることが知られており、解析がある程度容易になることから、現象解明の第一歩としてこれまで解析に用いてきた。しかし、河川流と浸透流間に生じる不安定現象では卓越波長が水深の数倍程度となるが、水平方向スケールが水深スケールに卓越して大きい現象しか表現できない浅水流近似では、このような現象を適切に表現することは不可能である。さらに、河川流と浸透流の間に生じる不安定現象では河床近傍の詳細な流れの構造を再現することが重要となるが、定剪断層近似では河床近傍の流速分布を近似的にしか表現できていない。

そこで本研究では、開水路乱流をより適切に再現できるといわれている混合距離理論を用い、河川層-浸透層間における流れの不安定現象についての線形安定解析を試みる。なおここで考えているのはあくまで平坦な透水性の河床上に生じる流れの不安定性であり、デューンなどの河床形態は伴わない。

2. 概念的モデル

透水性の高い浸透層上には河川流、浸透層内には浸透流が生じており、流下方向に等流状態で流れている

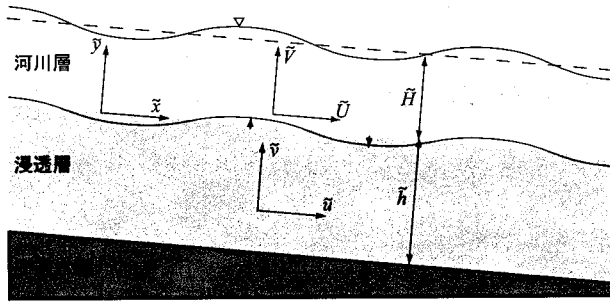


図-1 モデルの概念図

とする。この等流状態が安定的に維持されるとすれば、水深方向流速はゼロとなり河川流-浸透流間に不安定は生じない。

河川流および浸透流に、流速が速いところと遅いところが発生したとする。すると流量保存から、河床上の圧力に空間的な分布が生じて、水深が浅いところでは浸透層から河川層に、水深が深いところでは河川層から浸透層に向かって流れが発生する。その河川流-浸透流間の境界面を通過する流れにより、河川流および浸透流はそれぞれ加速（減速）および減速（加速）されることになる。このような現象では、流れの慣性力によりさらに加速および減速を続けていく場合がある。このとき流れは不安定となり、河川流-浸透流間の流水交換は増大していくことになる。

図-1 に示すような一様勾配斜面の二層流モデルを考える。流量は流下方向に一定とし、浸透層は水深とほぼ同程度から数倍程度の厚さを有するものと仮定する。河川流および浸透流の運動方程式はそれぞれレイノルズ平均を取った Navier-Stokes 方程式およびダルシー則を用いる。等流状態にある河川流および浸透流に対し微小な擾乱を与え、その擾乱が発達するか減衰するかを線形安定解析を用いて調べることにする。

3. 定式化

3.1 支配方程式

図-1 に示した河川層の流れは、レイノルズ平均を取り粘性項を無視した二次元の Navier-Stokes 方程式を用いて、次のように表される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + 1 + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{S} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで t は時間、 x および y はそれぞれ流下方向および水深方向の座標、 U および V はそれぞれ x および y 方向の流速成分、 P は圧力、 S は河床勾配、 $T_{ij}(i, j = x, y)$

はレイノルズ応力テンソルである。上式ではすでに次のような無次元化が行われている。

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{H}_n(x, y), \quad (\tilde{U}, \tilde{V}) = \tilde{U}_f(U, V) \quad (4a, b)$$

$$(\tilde{P}, \tilde{T}_{ij}) = \rho \tilde{U}_f^2(P, T_{ij}), \quad \tilde{t} = \frac{\tilde{H}_n}{\tilde{U}_f} t \quad (4c, d)$$

ここで $\tilde{U}_f = (g \tilde{H}_n S)^{1/2}$ および $\tilde{H}_n$ はそれぞれ等流状態における河川流の摩擦速度および水深、 ρ は水の密度、 g は重力加速度である。開水路乱流モデルとして混合距離モデルを用いるとレイノルズ応力テンソルは次のように表すことができる⁸⁾。

$$T_{xx} = 2\nu_T \frac{\partial U}{\partial x}, \quad T_{yy} = 2\nu_T \frac{\partial V}{\partial y} \quad (5a, b)$$

$$T_{xy} = \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (5c)$$

$$\nu_T = l^2 \frac{\partial U}{\partial y}, \quad l = \kappa(y + R) \left(\frac{H - y}{H} \right)^{1/2} \quad (5d, e)$$

ここで ν_T は $\tilde{U}_f \tilde{H}_n$ で無次元化した渦動粘性係数、 l および H は $\tilde{H}_n$ で無次元化した混合距離および水深、 κ はカルマン定数 (= 0.4) である。 R は対数則分布において流速がゼロとなる高さ（以降、基準高さと呼ぶ）であり、河床上の相当粗度によって決定されるパラメータである。

河床浸透層内の流れは、河床近傍から十分離れたところではダルシー則で表されると考えられる。しかし流速勾配が無視できない、河川流との運動量交換が活発な河床近傍においてはレイノルズ応力を考慮しなければならない。レイノルズ応力に比べ粘性項は小さいと考えて無視する（ただし抗力としての粘性の影響はダルシー則の形で考慮されていることに注意）と浸透流は次のように表される⁴⁾。

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 1 + \frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{u}{\phi S^{1/2}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{S} + \frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{v}{\phi S^{1/2}} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

ここで u および v は $\tilde{U}_f$ で無次元化した浸透層内における見かけの流速のそれぞれ x 方向および y 方向成分、 p は $\rho \tilde{U}_f^2$ で無次元化した浸透層内の圧力、 λ は空隙率である。また γ および ϕ はそれぞれ浸透層渦動粘性係数および透水係数に関する無次元パラメータであり、次のように表される。

$$\gamma = \frac{\epsilon_s \tilde{B}}{\tilde{H}_n}, \quad \phi = \frac{\tilde{k}_p}{(g \tilde{H}_n)^{1/2}} \quad (9a, b)$$

ここで ϵ_s および $\bar{B}$, $\bar{k}_p$ はそれぞれ浸透層無次元渦動粘性係数 (定数) および空隙スケール, 透水係数であり, 浸透層内の渦動粘性係数 ($\bar{\epsilon}_s = \epsilon_s \bar{U}_f \bar{B}$) は断面一定と仮定する. ϵ_s については正確な値が不明なことから, ここでは山田ら¹¹⁾に倣って 1 と仮定した. また, 浸透層を構成する河床材料粒径は 5-20cm 程度を考えており, $\bar{B}$ および $\bar{k}_p$ を決定している¹¹⁾.

3.2 境界条件

水面では, 水面に対して接線方向および接線方向の応力がどちらもゼロとなり, それぞれ次式で表される.

$$e_{1s} \cdot T \cdot e_{ns} = 0 \quad \text{at } y = H \quad (10)$$

$$e_{ns} \cdot T \cdot e_{ns} = 0 \quad \text{at } y = H \quad (11)$$

ここで e_{1s} および e_{ns} はそれぞれ水面における接線および法線方向の単位ベクトルであり, 次式で表される.

$$e_{1s} = \frac{(1, \partial H / \partial x)}{\sqrt{1 + (\partial H / \partial x)^2}}, \quad e_{ns} = \frac{(-\partial H / \partial x, 1)}{\sqrt{1 + (\partial H / \partial x)^2}} \quad (12a, b)$$

また T は応力テンソルであり, 次のように表される.

$$T = \begin{bmatrix} -P + T_{xx} & T_{xy} \\ T_{xy} & -P + T_{yy} \end{bmatrix} \quad (13)$$

水面における運動学的境界条件は次のように表される.

$$V = \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{at } y = H \quad (14)$$

浸透層上では, 接線方向のせん断力および浸透層内外の境界面を通過する流量, 接線方向流速, 圧力がそれぞれ連続となり, 次のように表される.

$$\nu_T \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\gamma}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{at } y = 0 \quad (15)$$

$$V = v \quad \text{at } y = 0 \quad (16)$$

$$U = \frac{u}{\lambda} \quad \text{at } y = 0 \quad (17)$$

$$P = p \quad \text{at } y = 0 \quad (18)$$

浸透層底面では水深方向流速およびせん断力がゼロとなる条件を仮定し, 次の境界条件が成立するとする.

$$v = 0 \quad \text{at } y = -h \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = -h \quad (20)$$

3.3 基本解

ここで擾乱を与える前の基本状態における解を求める. 流れは定常等流状態にあるから, 式 (1) および (6) で t 微分項および x 微分項, V , v を落とすと次式が得られる.

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = -1 \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{\gamma \phi S^{\frac{1}{2}}} u = -\frac{\lambda}{\gamma} \quad (22)$$

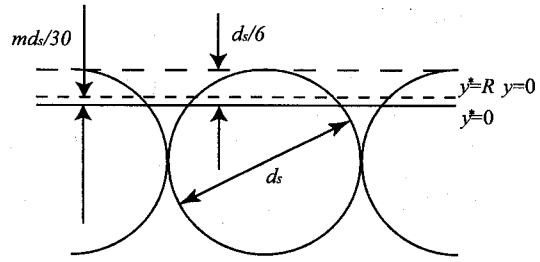


図-2 R の物理的大きさについて

また式 (5) は, 次のように表される.

$$T_{xy} = \nu_T \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \nu_T = l^2 \frac{\partial U}{\partial y}, \quad l = \kappa (y + R) (1 - y)^{\frac{1}{2}} \quad (23a-c)$$

式 (21) を解くにあたっては次の境界条件を用いる.

$$U = \frac{u_b}{\lambda}, \quad T_{xy} = 1 \quad \text{at } y = 0 \quad (24a, b)$$

ここで $u_b (= u(0))$ は浸透層上での浸透流の見かけの流速である. 式 (21)–(24) を解いて次式が得られる.

$$U = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y + R}{R} \right) + \frac{u_b}{\lambda} \quad (25)$$

従来より表現されてきた乱流の対数分布則を書き表すと次のようになる.

$$U = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y^*}{k_s} \right) + 8.5 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{30y^*}{md_s} \right) \quad (26)$$

ここで y^* および k_s , d_s は $\bar{H}_n$ で無次元化したそれぞれ水深方向座標および粗度高さ, 河床材料の粒径, m は k_s/d_s である. 式 (25) の y は y^* より R だけ上に原点をとった水深方向座標であり, 式 (26) を $y^* = R$ にて評価すると, $R = md_s/30$ が得られる (ここでは u_b の項は考えないものとする). 粗度高さは粒径の 1-3 倍 ($m=1-3$) (本解析においては $m=2$ を用いている) と言われていることから, R は d_s の 1/30 から 1/10 程度の値となることからわかる. 通常の混合距離モデルでは, 原点近傍における特異性のために流速が急激に減少し負に発散してしまうため, 実際の流速分布を適切に表すことは出来ない. ところが, $y^* = 0$ を粒子の最上点より $d_s/6$ だけ下 (体積平均をとった場合の河床面) に取れば, 基準高さ R は粒子の最上点よりもさらに下に位置することになる (図-2 参照). すなわち, 図-2 のように原点 ($y = 0$) を取ることによって, 原点において矛盾無く河川流と浸透流を接続することが可能となる.

式 (25) を水深方向に積分することで河川流の平均流速が得られ, 等流状態時におけるフルード数 F_r は次のように表される.

$$F_r = S^{1/2} \left[\frac{1}{\kappa} \left((1 + R) \ln \left(\frac{1 + R}{R} \right) - 1 \right) + \frac{u_b}{\lambda} \right] \quad (27)$$

基本状態における浸透流速 u は, 式 (22) を式 (15)–(20) の境界条件の下で解くことによって導かれる. u の具体的な表現についてはスペースの都合上省略する.

4. 線形安定解析

線形安定解析を行う前に次の流関数を導入する。

$$(U, V) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (u, v) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (28a, b)$$

式(28)を式(1)–(3)および式(6)–(8)に代入し、 P および p を消去すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial y} - 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(v_T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right) \\ + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[v_T \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} \right) \\ - \frac{\gamma}{\lambda} \nabla^2 \nabla^2 \psi + \frac{\nabla^2 \psi}{\phi S^{\frac{1}{2}}} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

次のような摂動展開を導入する。

$$\begin{aligned} (\Psi, \psi, P, p, H) = (\Psi_0, \psi_0, P_0, p_0, 1) \\ + A (\hat{\Psi}_1, \hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{p}_1, \hat{H}_1) \end{aligned} \quad (31)$$

ここで A は擾乱の振幅であり、微小と仮定する。式(31)を支配方程式(29)および(30)に代入して A のオーダーで整理すると、 $O(A)$ では次式が導かれる。

$$\hat{\mathcal{R}}^\Psi \hat{\Psi}_1 + \hat{\mathcal{R}}^H \hat{H}_1 = 0 \quad (32)$$

$$\hat{\mathcal{L}}^\psi \hat{\psi}_1 = 0 \quad (33)$$

ここで $\hat{\mathcal{R}}^\theta (\theta = \Psi, H)$ および $\hat{\mathcal{L}}^\psi$ は線形演算子であり、具体的な形については省略する。

摂動はフーリエ級数で表されるとして、次のような形で与える。

$$\begin{aligned} (\hat{\Psi}_1, \hat{\psi}_1, \hat{P}_1, \hat{p}_1, \hat{H}_1) \\ = [\Psi_1(y), \psi_1(y), P_1(y), p_1(y), H_1] e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (34)$$

ここでc.c.は直前の項の複素共役、 k は擾乱の無次元波数である。式(34)を支配方程式(32)および(33)に代入すると、次式が得られる。

$$\mathcal{R}^\Psi(y) \Psi_1(y) + \mathcal{R}^H(y) H_1 = 0 \quad (35)$$

$$\mathcal{L}^\psi(y) \psi_1(y) = 0 \quad (36)$$

ここで $\mathcal{R}^\theta (\theta = \Psi, H)$ および $\mathcal{L}^\psi$ は、 $\hat{\mathcal{R}}^\theta (\theta = \Psi, H)$ および $\hat{\mathcal{L}}^\psi$ の $\partial/\partial t$ および $\partial/\partial x$ をそれぞれ $-i\omega$ および ik で、 $\partial/\partial y$ を d/dy で置き換えたものである。

また境界条件(11)および(14)–(20) ((10)は常に成立するため不要)は次のように表される。

$$\mathcal{W}^\Psi(1) \Psi_1(1) + \mathcal{W}^H(1) H_1 = 0 \quad (37)$$

$$\mathcal{P}^\Psi(1) \Psi_1(1) + \mathcal{P}^H(1) H_1 = 0 \quad (38)$$

$$\mathcal{B}^\Psi(0) \Psi_1(0) + \mathcal{B}^H(0) H_1 + \mathcal{B}^\psi(0) \psi_1(0) = 0 \quad (39)$$

$$\Psi_1(0) - \psi_1(0) = 0 \quad (40)$$

$$\Psi_1'(0) - \psi_1'(0) = 0 \quad (41)$$

$$\mathcal{H}^\Psi(0) \Psi_1(0) + \mathcal{H}^H(0) H_1 + \mathcal{H}^\psi(0) \psi_1(0) = 0 \quad (42)$$

$$\psi_1(-h) = 0 \quad (43)$$

$$\psi_1''(-h) = 0 \quad (44)$$

ここで $\mathcal{W}^\theta$ および $\mathcal{P}^\theta$ 、 $\mathcal{B}^\theta$ 、 $\mathcal{H}^\theta (\theta = \Psi, H, \psi)$ は線形演算子である。

方程式(35)および(36)を境界条件(37)–(44)の下で、Chebyshev多項式展開を用いたスペクトルコロケーション法を用いて解く。

Ψ_1 および ψ_1 をChebyshev多項式展開を用いて次のように展開する。

$$\Psi_1 = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\xi), \quad \psi_1 = \sum_{n=0}^N b_n T_n(\xi) \quad (45a, b)$$

ここで T_n は n 次のChebyshev多項式、 ξ は範囲 $[-1 \leq \xi \leq 1]$ で定義されるChebyshev多項式の変数である。河川層 $(0 \leq y \leq 1)$ および浸透層 $(-h \leq y \leq 0)$ は次式を用いて領域 $[-1 \leq \xi \leq 1]$ に変換される。

$$\xi = 2 \left[\frac{\ln(y+R)/R}{\ln(1+R)/R} \right] - 1 \quad (0 \leq y \leq 1) \quad (46a)$$

$$\xi = 2 \frac{y}{h} + 1 \quad (-h \leq y \leq 0) \quad (46b)$$

これらを支配方程式に代入した後、次のGauss-Labatt点において評価する。

$$\xi_i = \cos \left(\frac{i\pi}{N} \right) \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (47)$$

上式を用いて支配方程式および境界条件を a_i ($i = 0, 1, \dots, N$)および H_i 、 b_i ($i = 0, 1, \dots, N$)について整理すると次式が得られる。

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \omega \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (48)$$

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_N, H_1, b_0, b_1, \dots, b_N]^T \quad (49)$$

$\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ は $(2N+3) \times (2N+3)$ の行列である。ここで式(37)および(38)は1-2行目、式(39)–(42)は $(N+1)$ – $(N+4)$ 行目、式(43)および(44)は $2N+2$ – $2N+3$ 行目に用いられている。上式は ω を固有値とする一般化固有値問題を構成している。ここで求められた ω の虚部が擾乱の発達率 Ω に相当し、次のように表される。

$$\Omega = \Omega(k; S(F_r), h, \lambda, \gamma, \phi, R) \quad (50)$$

発達率 Ω を決定する無次元パラメータは、擾乱の無次元波数 k 、河床勾配 S (フルード数 F_r)、浸透層厚 h 、空隙率 λ 、浸透層の渦動粘性係数および透水係数に関するパラメータ γ および ϕ 、基準高さ R である。また本解析においては式(45)中の N は30とした。

5. 結果及び考察

5.1 浸透層厚による安定性の変化

フルード数 F_r および無次元波数 k による発達率 Ω の等高線図を示したのが図-3である。図は縦軸をフルード数 F_r 、横軸を無次元波数 k に取ってある。また太い

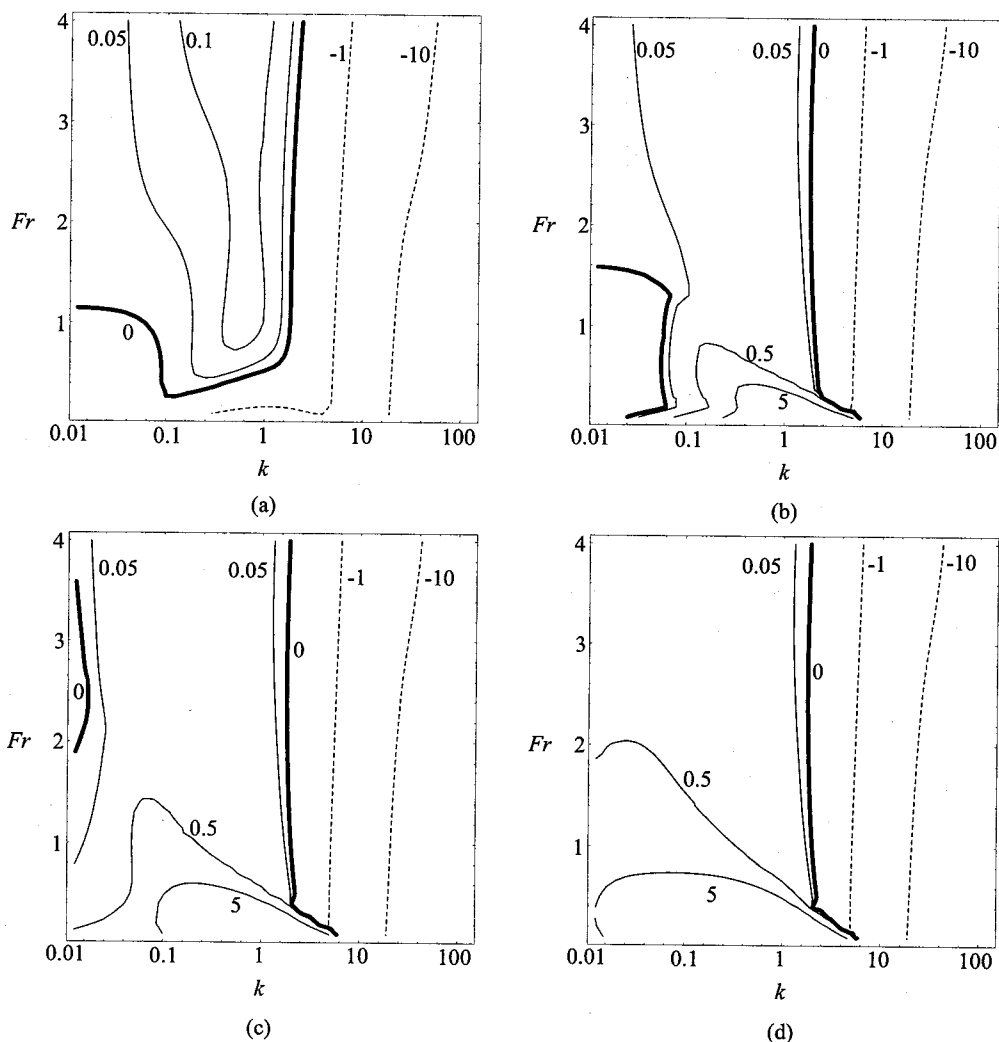


図-3 フルード数 Fr および擾乱の無次元波数 k による発達率 Ω の等高線図。太実線は中立曲線 ($\Omega = 0$) を表し、実線および破線はそれぞれ正および負の発達率を示す。(a) $h = 0$ (浸透層が存在しない場合), $R = 0.003$, (b)–(d) 浸透層厚による発達率の変化。 $\lambda = 0.3$, $\gamma = 0.001$, $\phi = 0.03$, $R = 0.003$, (b) $h = 1$, (c) $h = 2$, (d) $h = 5$ 。

実線が $\Omega = 0$ の中立曲線、実線が正のコンタ、破線が負のコンタを示している。中立曲線から正の領域では等流状態の流れは不安定となることを意味している。

図-3(a) は浸透層が存在しない場合に相当している。解析手法は前章で述べたものと同様であるが、浸透流の式は考慮せず、式(1)–(5)および(10)–(14)に加えて、次の境界条件を用いている。

$$U = V = 0 \quad \text{at} \quad y = 0 \quad (51)$$

図-3(a) を見ると、無次元波数 k がある程度小さい範囲において、擾乱の発達率はフルード数が 0.3 程度（臨界フルード数）より大きい場合に正の値をとり、流れは不安定となることがわかる。また、発達率 Ω が最大になる無次元卓越波数は 0.1–1 程度に現れ、 Fr が大きくなるにつれて大きくなる傾向にあることがわかる。

図-3(b)–(d) は浸透層厚による発達率の変化を示している。 λ および γ , ϕ , R は、比較的透水性の高い河床材料粒径 5cm と仮定した場合における値とし、0.3 および 0.001, 0.03, 0.003 を用いた。(b) $h = 1$ および (c)

$h = 2$, (d) $h = 5$ は、浸透層厚が等流水深のそれぞれ 1 倍および 2 倍, 5 倍の場合における結果である。(b) を見ると、 Fr が大きい範囲における不安定領域は (a) と同様であるが、 Fr が小さい範囲において Ω が正となる領域が現れているのが見て取れる。さらに (c) および (d) をみると、浸透層厚 h が大きくなるにつれてその領域は Fr – k 平面に広がっていく様子がわかる。また、 Fr の小さい範囲において、卓越波数は h が大きくなるにつれて小さくなり、 $h = 5$ の場合においては 0.01 程度の値を取るようになることがわかる。

5.2 透水性パラメータによる安定性の変化

図-4 は $h = 1$ および $\lambda = 0.5$ の下で、 γ および ϕ , R の値を変化させたときの Fr – k 平面における不安定領域の変化を示したものである。図-4(a) および (b) はそれぞれ $\gamma = 0.01$, $\phi = 0.3$, $R = 0.006$ および $\gamma = 0.02$, $\phi = 3$, $R = 0.01$ の場合における結果であり、河床材料粒径がそれぞれ 10 および 20cm に相当する場合となっている。

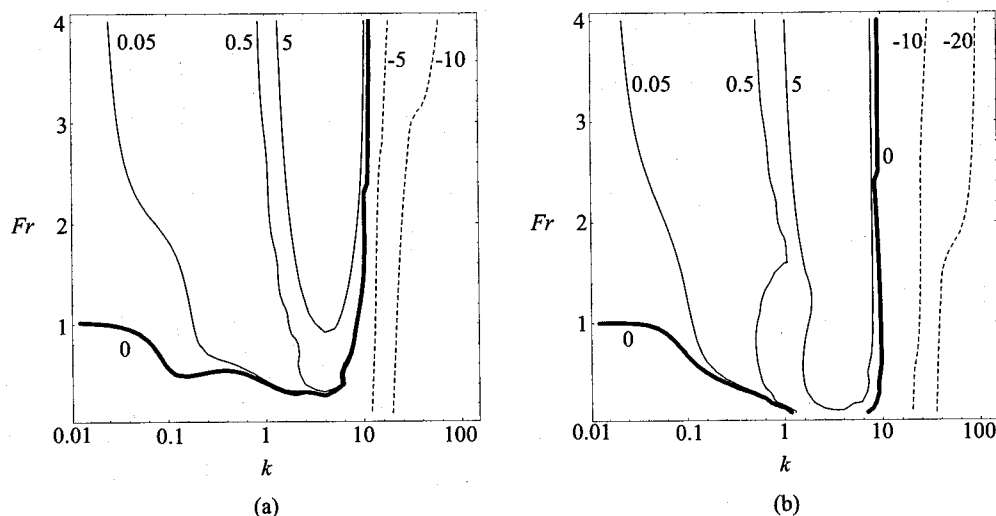


図-4 フルード数 Fr および擾乱の無次元波数 k ，浸透層の透水性パラメータ γ ， ϕ ， R の変化による発達率 Ω の等高線図。太実線は中立曲線 ($\Omega = 0$) を表し，実線および破線はそれぞれ正および負の発達率を示す。 $h = 1$ ， $\lambda = 0.5$ ，(a) $\gamma = 0.01$ ， $\phi = 0.3$ ， $R = 0.006$ ，(b) $\gamma = 0.02$ ， $\phi = 3$ ， $R = 0.01$ 。

透水性パラメータの影響を明瞭にするために，極端に透水性の大きい，巨礫の場合を想定している。

図-4(a)を見ると， Ω が正の領域が k が 10 程度までの範囲に広がっている様子が判る。また (b) になると，その不安定領域は Fr の小さい範囲に広がることがわかる。すなわち透水性が大きい浸透層を有する場合，卓越波数は大きくなることわかる。また Ω は Fr が大きくなるにつれて大きくなり，図-3(a)と同様の傾向を示すが， $k = 1-10$ 程度の範囲における Ω の値は $k = 0.01-0.1$ のそれより 100 倍程度の大きさを有している。

図-4 ではいずれの図にも等高線に不自然な凹凸が見られる。これらのケースでは水表面の不安定性と，河川流-浸透流間の不安定性が重なって現れるため，このような形状になるものと考えられる。

5.3 解析結果の妥当性と今後の課題

本解析によって得られた結果を検証できるような実験や観測データは，著者らの知る限り存在していない。そのため解析結果は検証されておらず，その妥当性について不明な点があるのは否定できない。ただし，河川流と浸透流の間に不安定現象が存在することは予想されていたにも関わらず，これまで理論的に取り扱った例は著者らの知る限り存在しない。現状で可能な限り合理的な理論を初めて提案した本論文の意義は大きいと考えられる。実験や観測データを用いた解析結果の妥当性の検証については今後の課題である。

6. 結論

河川流-浸透流間における流れの安定性を明らかにするために線形安定解析を行った。その際，河川流には混

合距離理論を用いて，乱流を精度よく現すことを試みた。解析によって以下のようなことが明らかとなった。

底面が不透水層である場合，フルード数が 0.3 より小さい領域では等流状態は安定であるが，底面に浸透層が存在すると，河床材料の粒径がそれほど小さくなく，透水性が比較的小さい条件の下では，フルード数が 0.3 より小さい領域においても等流状態は不安定となる。

参考文献

- 1) Jeffreys, H.: The flow of water in an inclined channel of rectangular section, Phil. Mag., Ser. 6, Vol. 49, 1925.
- 2) Keulegan, G. H. and G. W. Patterson: A criterion for instability of flow in steep channels, Trans. Amer. Geophys. Union, 1940.
- 3) Dressler, R. F.: Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels, Commun. Pure Appl. Maths 2, 149-194, 1949.
- 4) 日本流体力学会: 流体力学ハンドブック, 丸善, 1987.
- 5) Boulton, A. J., Findlay, S., Marmonier, P., Stanley, A. H., Valett, H. M.: The functional significance of the hyporheic zone in streams and rivers, Annual Review of Ecology and Systematics, 29, pp. 59-81, 1998.
- 6) 大友裕隆, 泉 典洋: 浸透層上における浅水流の安定性について, 応用力学論文集, Vol. 8, pp. 813-820, 2005.
- 7) 大友裕隆, 泉 典洋: 浸透層上における流れの不安定性理論, 応用力学論文集, Vol. 9, pp. 893-900, 2006.
- 8) Colombini, M.: Revisiting the linear theory of sand dune formation, J. Fluid Mech., Vol. 502, 1-16, 2004.
- 9) Engelund, F.: Instability of erodible beds, J. Fluid Mech., Vol. 42, 225-244, 1971.
- 10) Fredsøe, J.: On the development of dunes in erodible channels, J. Fluid Mech., Vol. 64, 1-16, 1974.
- 11) 山田 正, 川端規之: 浸透層上の流れの抵抗則に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, 第 325 号, 1982.

(2007 年 4 月 12 日 受付)