

移動一般座標系での水深積分モデルを用いた円筒水槽のスロッシング解析

Sloshing Analysis in a Circular Tank using a Depth Averaged Flow model
in Generalized Curvilinear Moving Coordinate System三浦 成久¹・音田 慎一郎²・細田 尚³

Naruhisa MIURA, Shinichiro ONDA and Takashi HOSODA

¹五洋建設株式会社 (〒112-8576 東京都文京区後楽 2-2-8)²博(工) 京都大学大学院 助教 工学研究科都市社会工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)³工博 京都大学大学院 教授 工学研究科都市社会工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

In this study, the sloshing characteristics in a circular tank on an oscillation table are investigated. Firstly, laboratory experiments were conducted under the various hydraulic conditions, and the characteristics of water surface oscillation were examined. To simulate the flow fields in experiments, a shallow water equation in generalized curvilinear moving coordinate system was used, in which a pressure distribution was assumed to be hydrostatic, and linear and nonlinear solutions were derived. In addition, a Boussinesq equation is also applied. The sloshing characteristics obtained from the theoretical and numerical solutions were verified by comparing with the experimental results.

Key Words: sloshing, circular tank, depth averaged flow model, nonlinear analysis

1. はじめに

本研究は、移動一般座標系での水理解析手法について考察するため、振動台上に置かれた円筒水槽のスロッシングについて検討したものである。

円筒水槽のスロッシングにおいて、最大波高を予測することは、施設の耐震設計等の観点から、工学的に重要な問題であり、従来より実験的、理論的研究が数多く行われてきた。例えば、Hutton¹⁾は水理実験を行い、(1) 最大波高一定で水面振動する (stable planar)、(2) 最大波高一定で水面が壁面に沿って一定速度で回転する (stable nonplanar (rotary))、(3) 定常状態には到達せず、波高や回転速度が変化しながら回転する (unstable (swirling)) の3つの水面形状を確認するとともに、ポテンシャル流れの基礎式から理論的に説明している。

また、数値解析的研究も数多く行われており、ポテンシャル流れの基礎式による2次元^{2), 3)}、3次元解析⁴⁾、及びNavier-Stokes式、Reynolds方程式を用いた3次元解析^{5), 6)}が検討されている。例えば、米山ら⁹⁾は、VOF法を用いて遮蔽板を設置した場合の3次元数値解析を行い、スロッシング防止ダンパーの有効性について考察している。

一方、著者ら⁸⁾は、静水圧を仮定した移動一般座標系での1次元浅水流方程式を基礎式として線形解を導出し、実験結果と比較することで、長周期の場合には上記のような複雑なポテンシャル理論を用いなくても、簡便なモデルで

現象をある程度再現できることを示した。しかし、静水圧を仮定した浅水流方程式から線形解を導いていることから、静水圧仮定の適用性や非線形性の影響、及び1次元解析の適用範囲について考察していない。また、線形解の表現が適切ではなかったため、水面形の対称性を満足していない。

そこで本研究では、前報に引き続き、簡易な積分型モデルでスロッシング現象を再現することを目的とし、移動一般座標系での浅水流方程式、及び鉛直加速度を考慮した水深積分モデル(Boussinesq方程式)を基礎式として線形解、非線形解を導出するとともに、数値解析についても検討する。得られた結果と実験結果を比較し、静水圧仮定の適用性や非線形性の影響について考察を行うことで、モデルの妥当性を検証する。

2. 円筒水槽スロッシングに関する水理実験

2.1 水理実験の概要

実験装置の概要を図-1に示す。振動台((株)振研「低周波水平振動試験装置」)の上に、アクリル製の円筒形水槽(直径 $L=0.4\text{m}$ 、高さ 0.4m)を置き、初期水深 $h_0(\text{m})$ 、振動振幅 $d(\text{m})$ 、周波数 $f(\text{Hz})$ (周期 $T(\text{s})=1/f$)を変化させて水理実験を行った。実験条件の一部を表-1に示す。表中の X は、後述の理論解析で導かれる無次元パラメータ(無次元角振動数)である。本研究では、様々な水面形状

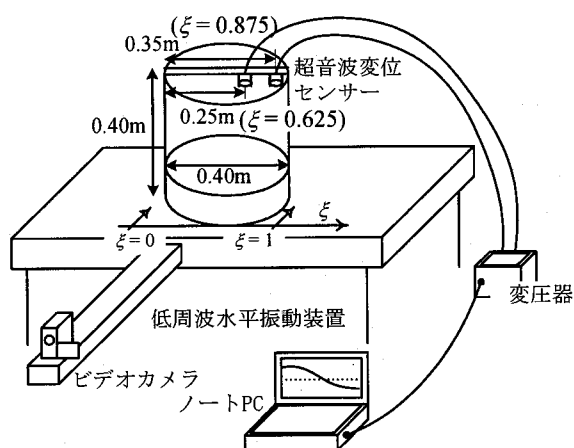


図-1 実験装置の概要

表-1 実験の水理条件

Case	h_0 (m)	f (Hz)	d (m)	$\sqrt{X}$
03	0.05	0.5	0.030	1.79
08	0.05	1.2	0.003	4.31
26	0.10	1.8	0.005	4.57
28	0.10	2.0	0.0095	5.08
36	0.15	1.0	0.012	2.07

h_0 : 初期水深, f : 周波数, T : 振動の周期,

d : 振動振幅, $\sqrt{X}$: 無次元パラメータ



(a) $t/T = 0.2$

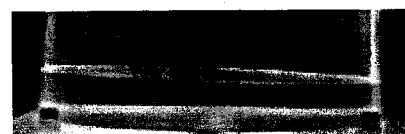


(b) $t/T = 0.4$

図-2 水面形の時間変化 (Case03)



(a) $t/T = 0.16$

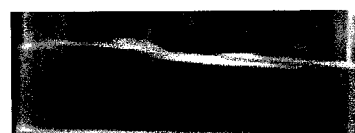


(b) $t/T = 0.32$

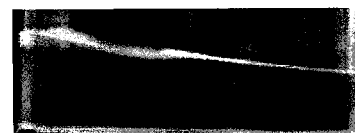
図-3 水面形の時間変化 (Case08)

におけるモデルの適用性について考察するため、無次元角振動数の値が広範囲に分布するよう実験条件を設定した。

振動台上には、デジタルビデオカメラ (Canon IXYDVM) を設置し、水槽内全体の流況を撮影すると同時に、超音波変位センサー (キーエンス製) を円筒水槽中央部の2点に設置し、 ξ 軸 (振動台と共に移動する座標系) 上の固定点における水位の時間変化を0.01(s)ごとに記録した。設置したセンサーの位置は、左端壁 ($\xi = 0$) からそれぞれ0.35(m),



(a) $t/T = 0.12$



(b) $t/T = 0.36$

図-4 水面形の時間変化 (Case26)

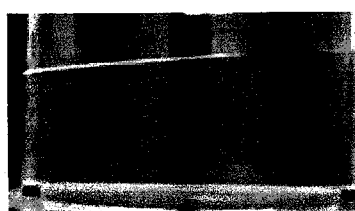


(a) $t/T = 0.267$

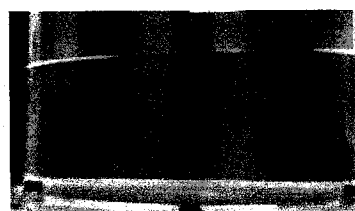


(b) $t/T = 0.400$

図-5 水面形の時間変化 (Case28)



(a) $t/T = 0.2$



(b) $t/T = 0.4$

図-6 水面形の時間変化 (Case36)

0.25(m)の位置であり、その地点では $\xi = 0.875, 0.625$ となる。座標系の設定については後述する。なお、周波数が高い場合、即ち振動の周期が短い場合には、センサー直下の水面勾配が大きくなる場合やセンサーの反応が水面変動に追いつかない場合があり、水面変動を記録できないケースがあった。また、水深の時系列のデータ処理については、明らかにノイズであると考えられるものを除去し、0.01秒ごとのデータの移動平均をとり、0.05秒ごとのデータに変換した。

2.2 実験結果の考察

実験結果の例として、Case03, 08, 26, 28, 36における水面形の時間変化を図-2~6に示す。但し、水面振動が定

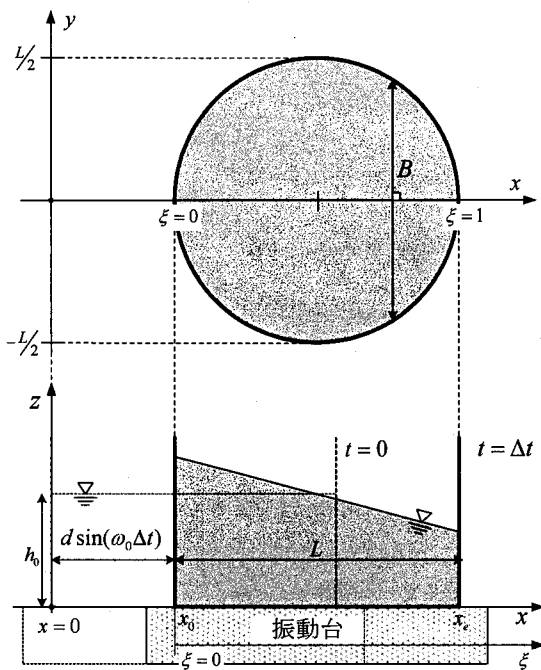


図-7 座標系の説明

常状態に達し、振動の中心を図に対して右方向に通過する時刻を $t/T=0.0$ とした。図をみると、Case03, 08, 36 では加振方向と垂直の方向（横断方向）に一樣の水深分布であり、1 次モードの平面的な水面形を示している。一方、Case26, 28 では加振方向に対して水面の凹凸が確認され、また水深が横断方向において変化しているのがわかる。

次に、振動台の振動に対する波形の位相について考察する。図をみると、 t/T が大きくなるにしたがって、右端壁での水深が増加→減少→増加を繰り返す場合と、減少→増加→減少を繰り返す場合に分類され、Case03, 36 は前者、Case08, 26, 28 は後者に相当する。

3. 静水圧仮定の浅水流方程式を用いた 1 次元解析

本研究では、水面形が 1 次モードで表され、横断方向に水深が変化しない場合を主として対象としており、以下では、1 次元解析について検討する。

3.1 基礎式⁹⁾

基礎式として移動一般座標系での浅水流方程式を用いる。1 次元での連続式、運動量方程式を記述すれば、以下のようになる。なお、圧力分布には静水圧を仮定する。

[連続式]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_i + U) \frac{A}{J} \right) = 0 \quad (1)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_i + U) \frac{Q}{J} \right) + g A \frac{\xi_x}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad (2)$$

ここに、 t : 時間、 ξ : 一般座標、 ξ_i , ξ_x : 変換のメトリックス、 h : 水深、 U : 流速ベクトルの反変成分 ($=u\xi_x$)、 u :

x 方向の水深平均流速、 A : 断面積、 Q : 流量 ($=uA$)、 g : 重力加速度、 J : 座標変換のヤコビアン (1 次元解析の場合は ξ_x となる)。

図-7 のように一定周期で振動する振動台上に置かれた水槽と一緒に動く座標系を考え、式(1), (2)をその運動に対応するよう、移動一般座標系への基礎式に書き換えると、座標変換のメトリックスは下記ようになる。

$$x_0 = d \sin(\omega_0 t), \quad x_e = L + d \sin(\omega_0 t) \\ \xi = \frac{x - x_0(t)}{L}, \quad \xi_x = \frac{1}{L}, \quad \xi_t = -\frac{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)}{L}$$

ここに、 x_0 , x_e : 水槽の左端、右端の座標、 L : 水槽の直径、 d : 水槽の振動振幅、 ω_0 : 角振動数である。また、断面積 A は水深 h と水槽の幅 B から次のように表される。

$$A = Bh, \quad B = L\sqrt{1 - (2\xi - 1)^2}$$

上記の関係式を式(1), (2)に代入すると以下のようになる。

$$L\sqrt{1 - (2\xi - 1)^2} \frac{\partial}{\partial t} (Lh) \quad (3)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (u - d\omega_0 \cos(\omega_0 t)) Lh\sqrt{1 - (2\xi - 1)^2} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{L} (u - d\omega_0 \cos(\omega_0 t)) \frac{\partial u}{\partial \xi} + g \frac{1}{L} \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad (4)$$

3.2 線形解

(1) 基礎式の無次元化

水槽の振動振幅 d が水槽の直径に比べて十分小さく、角振動数 ω_0 も小さい場合について線形解を求める。まず、以下に示す無次元変数

$$t' \equiv t\omega_0, \quad h' \equiv h/h_0, \quad u' \equiv u/(d\omega_0),$$

$$\delta \equiv d/L, \quad X \equiv (L^2\omega_0^2)/(gh_0)$$

を用いて基礎式の無次元化を行う。ここに、 h_0 : 初期水深ある。

$$\sqrt{1 - (2\xi - 1)^2} \frac{\partial h'}{\partial t'} \quad (5)$$

$$+ \delta \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (u' - \cos t') h' \sqrt{1 - (2\xi - 1)^2} \right\} = 0$$

$$\delta \frac{\partial u'}{\partial t'} + \delta^2 (u' - \cos t') \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{1}{X} \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad (6)$$

(2) 線形方程式の誘導

次式のように物理量を平均値とそれからの微小な偏差の和

$$h' = 1 + \delta h_1, \quad u' = \cos t' + u_1 \quad (7)$$

として表し、式(5), (6)を線形化すると、以下のようになる。

$$\{1 - (2\xi - 1)^2\} \frac{\partial h_1}{\partial t'}$$

$$+ \left\{ 1 - (2\xi - 1)^2 \right\} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - 2(2\xi - 1)u_1 = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t'} + \frac{1}{X} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} - \sin t' = 0 \quad (9)$$

(3) 境界条件

左壁 ($\xi=0$), 右壁 ($\xi=1$) での境界条件は,

$$u_1 = 0 \quad (10)$$

のように与えられる. この流速に関する境界条件を用いて水深変動の境界条件を求める. 式(10)を運動量方程式(9)に代入すると, h_1 に関する以下の境界条件式が求められる.

$$\frac{1}{X} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} = \sin t' \quad (11)$$

(4) 線形解の誘導

前報⁸⁾では, h_1 の解の表現を ξ のべき乗型として表し, 線形解を導出したが, 水面形の対称性が満足されなかった. そこで本研究では, h_1, u_1 の表現を以下のように $(\xi-1/2)$ のべき乗型として線形解を誘導する.

$$\begin{aligned} h_1(t, \xi) = & C_{10}(t) + C_{11}(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right) + C_{12}(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \\ & + C_{13}(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^3 + C_{14}(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^4 \\ & + C_{15}(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^5 + C_{16}(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^6 \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} u_1(t, \xi) = & D_{10}(t) + D_{11}(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right) + D_{12}(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \\ & + D_{13}(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^3 + D_{14}(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^4 + D_{15}(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^5 \end{aligned} \quad (12b)$$

ここで, 係数 C_{1j}, D_{1j} を次のように表す.

$$C_{1j} = \alpha_{1j} \sin t', \quad D_{1j} = \beta_{1j} \cos t' \quad (13)$$

h_1, u_1 を式(8), (9)に代入し, $(\xi-1/2)$ の各オーダーで整理すると以下の連立方程式が得られる. 式(8)より

$$(\xi-1/2)^0: \quad \alpha_{10} + \beta_{11} = 0 \quad (14a)$$

$$(\xi-1/2)^1: \quad \alpha_{11} + 2\beta_{12} - 4\beta_{10} = 0 \quad (14b)$$

$$(\xi-1/2)^2: \quad \alpha_{12} - 4\alpha_{10} + 3\beta_{13} - 8\beta_{11} = 0 \quad (14c)$$

$$(\xi-1/2)^3: \quad \alpha_{13} - 4\alpha_{11} + 4\beta_{14} - 12\beta_{12} = 0 \quad (14d)$$

$$(\xi-1/2)^4: \quad \alpha_{14} - 4\alpha_{12} + 5\beta_{15} - 16\beta_{13} = 0 \quad (14e)$$

また, 式(9)より

$$(\xi-1/2)^0: \quad -\beta_{10} + \frac{1}{X} \alpha_{11} = 1 \quad (15a)$$

$$(\xi-1/2)^1: \quad -\beta_{11} + \frac{2}{X} \alpha_{12} = 0 \quad (15b)$$

$$(\xi-1/2)^2: \quad -\beta_{12} + \frac{3}{X} \alpha_{13} = 0 \quad (15c)$$

$$(\xi-1/2)^3: \quad -\beta_{13} + \frac{4}{X} \alpha_{14} = 0 \quad (15d)$$

$$(\xi-1/2)^4: \quad -\beta_{14} + \frac{5}{X} \alpha_{15} = 0 \quad (15e)$$

$$(\xi-1/2)^5: \quad -\beta_{15} + \frac{6}{X} \alpha_{16} = 0 \quad (15f)$$

境界条件式についても同様に, 左壁 ($\xi=0$), 右壁 ($\xi=1$) についてそれぞれ以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\alpha_{12} + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\alpha_{13} \\ + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3\alpha_{14} + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^4\alpha_{15} + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^5\alpha_{16} = X \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + 2\left(\frac{1}{2}\right)\alpha_{12} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha_{13} \\ + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3\alpha_{14} + 5\left(\frac{1}{2}\right)^4\alpha_{15} + 6\left(\frac{1}{2}\right)^5\alpha_{16} = X \end{aligned} \quad (16b)$$

上記の連立方程式を解くことで, 線形解が求められる. 例えば, 係数 α_{11} は以下ようになる.

$$\alpha_{11} = \frac{720X - 4X^2}{720 - 64X + X^2} \quad (17)$$

その他の係数については, 紙面の都合上省略する.

3.3 非線形解析

(1) 非線形方程式の誘導

本節では, 非線形性による影響を考察するため, 非線形解析を行う. h', u' を以下のように表す.

$$h' = 1 + h_1 \quad (18a)$$

$$u' = \cos t' + u_1 \quad (18b)$$

ここで, h_1, u_1 を線形解と同様に $(\xi-1/2)$ のべき乗型として表す.

$$\begin{aligned} h_1(t, \xi) = & C_0(t) + C_1(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right) + C_2(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \\ & + C_3(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^3 + C_4(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^4 \\ & + C_5(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^5 + C_6(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^6 \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} u_1(t, \xi) = & D_1(t) + D_2(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right) + D_3(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \\ & + D_4(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^3 + D_5(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^4 + D_6(t)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^5 \end{aligned} \quad (19b)$$

この解の表現式(19)を基礎式(5), (6)に代入し, $(\xi-1/2)$ の各オーダーで整理すると, 以下ようになる. 式(5)より,

$$(\xi-1/2)^0: \quad \frac{\partial C_0}{\partial t'} = -\delta(D_1 + C_1 D_0 + C_0 D_1) \quad (20a)$$

$$(\xi-1/2)^1: \quad \frac{\partial C_1}{\partial t'} = -2\delta(D_2 + C_2 D_0 + C_1 D_1 + C_0 D_2) \\ + 4\delta(D_0 + C_0 D_0) \quad (20b)$$

$$(\xi-1/2)^2: \quad \frac{\partial C_2}{\partial t'} = -3\delta(D_3 + C_3 D_0 + C_2 D_1 + C_1 D_2 + C_0 D_3) \\ + 4\delta(D_1 + C_1 D_0 + C_0 D_1) \quad (20c)$$

$$(\xi-1/2)^3: \quad \frac{\partial C_3}{\partial t'} = -4\delta(D_4 + C_4 D_0 + C_3 D_1 + C_2 D_2 + C_1 D_3 + C_0 D_4) \\ + 4\delta(D_2 + C_2 D_0 + C_1 D_1 + C_0 D_2) + 16\delta(D_0 + C_0 D_0) \quad (20d)$$

また、式(6)より

$$(\xi-1/2)^0: \quad \delta \frac{\partial D_0}{\partial t'} = -\delta^2 D_0 D_1 - \frac{1}{X} C_1 + \delta \sin(t') \quad (21a)$$

$$(\xi-1/2)^1: \quad \delta \frac{\partial D_1}{\partial t'} = -\delta^2 \{D_1^2 + 2(D_0 D_2)\} - \frac{2}{X} C_2 \quad (21b)$$

$$(\xi-1/2)^2: \quad \delta \frac{\partial D_2}{\partial t'} = -\delta^2 3(D_1 D_2 + D_0 D_3) - \frac{3}{X} C_3 \quad (21c)$$

$$(\xi-1/2)^3: \quad \delta \frac{\partial D_3}{\partial t'} = -\delta^2 \{2D_2^2 + 4(D_1 D_3 + D_0 D_4)\} - \frac{4}{X} C_4 \quad (21d)$$

$$(\xi-1/2)^4: \quad \delta \frac{\partial D_4}{\partial t'} = -\delta^2 5(D_2 D_3 + D_1 D_4 + D_0 D_5) - \frac{5}{X} C_5 \quad (21e)$$

$$(\xi-1/2)^5: \quad \delta \frac{\partial D_5}{\partial t'} = -\delta^2 \{3D_3^2 + 6(D_2 D_4 + D_1 D_5)\} - \frac{6}{X} C_6 \quad (21f)$$

左壁 ($\xi=0$) , 右壁 ($\xi=1$) における境界条件式は以下のように与えられる。

$$C_1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)C_2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 C_3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 C_4 \\ + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^4 C_5 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^5 C_6 = X \sin(t') \quad (22a)$$

$$C_1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)C_2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 C_3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 C_4 \\ + 5\left(\frac{1}{2}\right)^4 C_5 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^5 C_6 = X \sin(t') \quad (22b)$$

(2) 非線形解の数値解析

前項で導出した連立方程式から理論解を求めることは困難であるため、常微分方程式の数値解析法である4次のルンゲ・クッタ法を用いて解を求める。ここで、非線形解では、非線形性の影響が強く、数値振動が生じやすかったため、ここでは円筒水槽内の体積を一定とする条件を付加

し、数値振動の抑制を図った。体積一定の条件は次式で与えられる。

$$V_0 = \pi \left(\frac{L}{2}\right)^2 h_0 = \int_0^1 B h_0 (1 + h_1) d\xi \quad (23)$$

ここに、 V_0 : 初期状態の体積である。

上式に式(19a)を代入すると、体積一定の条件式として次式が導かれる。

$$\frac{1}{2}C_0 + \frac{1}{32}C_2 + \frac{1}{256}C_4 + \frac{5}{8192}C_6 = 0 \quad (24)$$

以上の常微分方程式をルンゲ・クッタ法によって時間積分を行い、 $C_1 \sim C_3$ 、及び $D_0 \sim D_5$ を求める。また、 $C_4 \sim C_6$ については境界条件式(22)と体積一定の条件式(24)から求め、非線形解を導いた。但し、 $C_0 \neq 0$ とした場合には、数値振動が発生し、解が得られなかったため、 $C_0 = 0$ と仮定している。また、 C_i 、 D_i の初期値は0としている。

3.4 数値解析

数値解析法には有限体積法を用い、変数の配置にはスタガード格子を用いている。また、移流項には1次精度の風上差分を用いて離散化している。但し、数値粘性項を付加している。また、計算格子は100メッシュである。

4. 鉛直加速度を考慮した積分モデルによる1次元解析

前章では、圧力分布に静水圧を仮定した浅水流方程式による1次元解析を行ったが、波の波長が水深に対して短くなる(無次元波数が大きくなる)と静水圧の仮定は成立しなくなる。そこで、本章では鉛直加速度を考慮した積分モデル(Boussinesq方程式)を基礎式として1次元解析を行う。Boussinesq方程式は、波と流れの共存場の水面挙動を予測できる積分型モデルであり、一般に、波浪などの数値解析ではデカルト座標系が用いられる。本研究では、Boussinesq方程式の移動一般座標系への応用を考え、円筒水槽のスロッシング解析に適用することを試みる。なお、Boussinesq方程式には、流速分布、圧力分布の取り扱いから様々な改良モデル^{例えば10)}が提案されているが、ここでは最も簡単な原形Boussinesq方程式を用いる。

4.1 基礎式

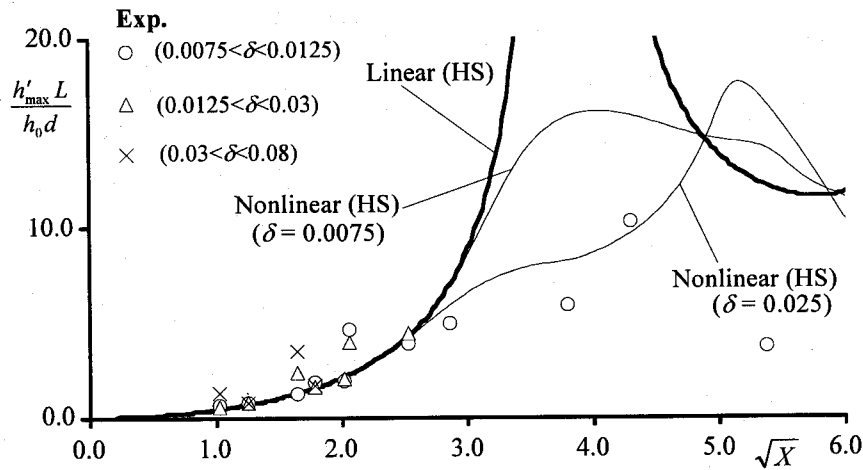
鉛直加速度を考慮した場合のデカルト座標系での基礎式は以下になる。

[連続式]

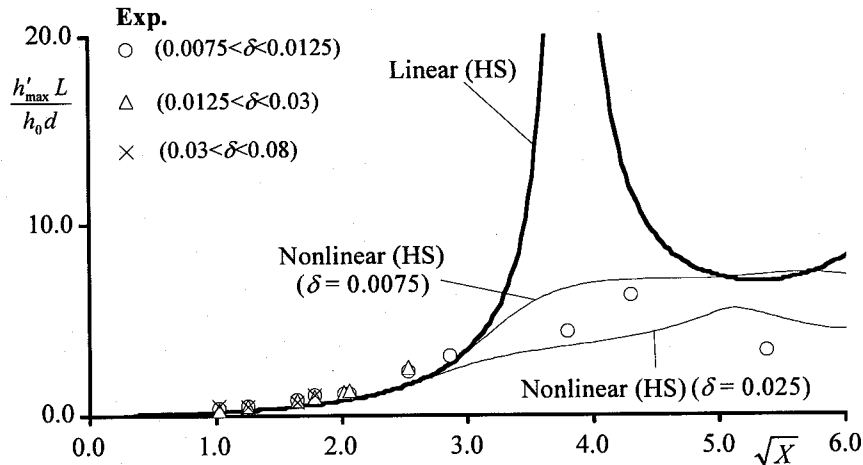
$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial uQ}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} \\ = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{2}{3} h^2 u \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial x} + \frac{1}{3} h^2 u^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) \quad (26)$$



(a) センサー1 ($\xi=0.875$)



(b) センサー2 ($\xi=0.625$)

図-8 振動台の振動数と水面振動振幅の応答関係 (静水圧仮定の浅水方程式を用いた場合)

式(26)中の右边が鉛直加速度を考慮することで付加される項であり、無視すると静水圧を仮定した運動量方程式と一致する。既往の研究より、式(26)中の第1項 (鉛直加速度の非定常項) のみを考慮することで、波状段波のような非定常性が卓越する現象を再現できることが報告されており¹¹⁾、また解析上の簡便さから、本研究でも第1項のみを付加項として考慮する。但し、連続式(25)を用いて付加項を書き換え、運動量方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial uQ}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} \right) \quad (27)$$

次に、基礎式を移動一般座標系に変換すると、運動量方程式は次式となる。また、連続式は式(1)と一致する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left(\xi_t + U \right) \frac{Q}{J} \right\} + gA \frac{\xi_x}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{3} h^2 \xi_x \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t \partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} Q \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \xi_t \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} Q \right) \right\} \right\} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

4.2 線形解

(1) 基礎式の無次元化と線形化

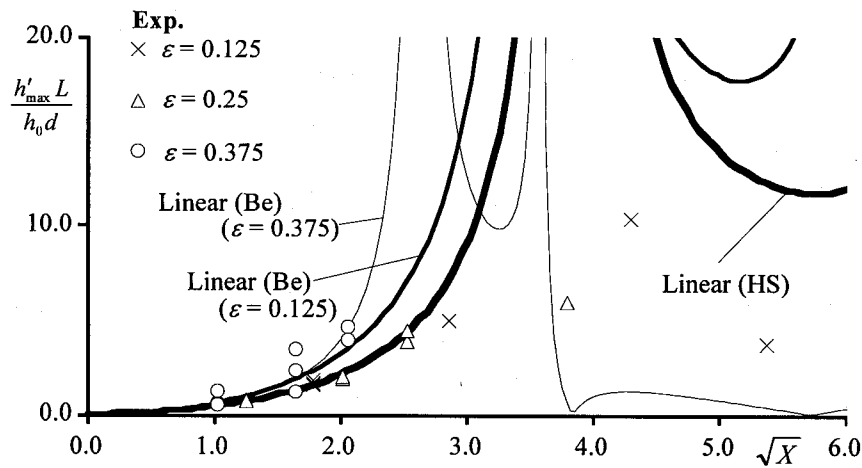
鉛直加速度を考慮した場合についても、線形解を求める。前節と同様に、円筒水槽のスロッシングに対応するよう、メトリックスの関係式を代入し、さらに基礎式の無次元化、線形化を行うと、線形方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & B' \frac{\partial u_1}{\partial t'} + \frac{1}{X} B' \frac{\partial h_1}{\partial \xi} - B' \sin t' \\ &= \frac{1}{3} \varepsilon^2 \left[B' \frac{\partial^3 u_1}{\partial t' \partial \xi^2} + 2 \frac{\partial B'}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t' \partial \xi} + \frac{\partial^2 B'}{\partial \xi^2} \frac{\partial u_1}{\partial t'} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial^2 B'}{\partial \xi^2} \sin t' - \delta^2 \cos^2 t' \left\{ B' \frac{\partial^3 h_1}{\partial \xi^3} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 3 \frac{\partial B'}{\partial \xi} \frac{\partial^2 h_1}{\partial \xi^2} + 5 \frac{\partial^2 B'}{\partial \xi^2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + 2 h_1 \frac{\partial^3 B'}{\partial \xi^3} \right\} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

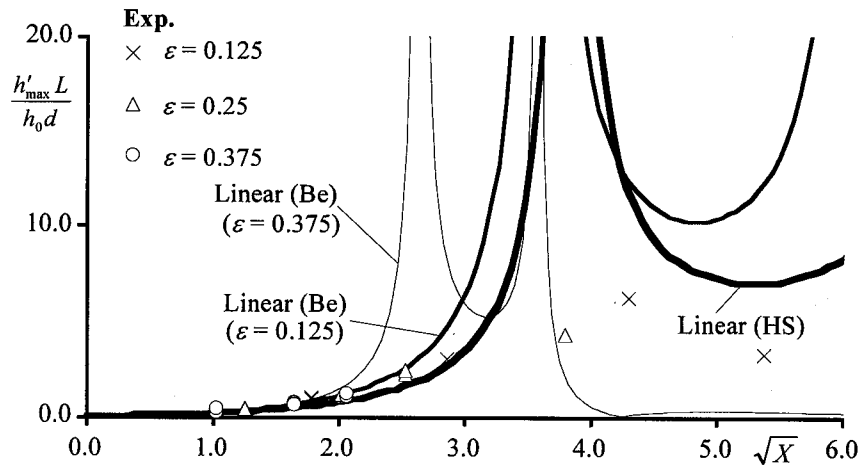
ここに、 $B' = \sqrt{1 - (2\xi - 1)^2}$ 、 $\varepsilon \equiv h_0/L$ である。また、以下の線形解では非線形性の影響を無視するため、式(29)式中の δ を0として解の誘導を行った。

(2) 境界条件

静水圧を仮定した浅水方程式の場合と同様に、式(29)に $u_1=0$ を代入すると、左壁 ($\xi=0$)、右壁 ($\xi=1$) での境界条件として、式(11)が得られる。但し、



(a) センサー1 ($\xi=0.875$)



(b) センサー2 ($\xi=0.625$)

図-9 振動台の振動数と水面振動振幅の応答関係 (Boussinesq 方程式を用いた場合)

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} = 0$$

の関係を用いている。

(3) 線形解の誘導

式(8), (29), 及び境界条件式(11)の h_1 , u_1 に式(12), (13) を代入し, 前章と同様に α_j , β_j に関する連立方程式を解くことで, 鉛直加速度を考慮した場合の線形解が導かれる。例えば, 係数 α_{11} は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & (34560 - 3072X + 48X^2 - 32544\epsilon^2 X \\ & + 1352\epsilon^2 X^2 + 7483\epsilon^4 X^2) \alpha_{11} \\ & = 16(3312 - 6336\epsilon^2 - 12X - 1497\epsilon^2 X \\ & + 2340\epsilon^4 X + 128\epsilon^4 X^2) \end{aligned}$$

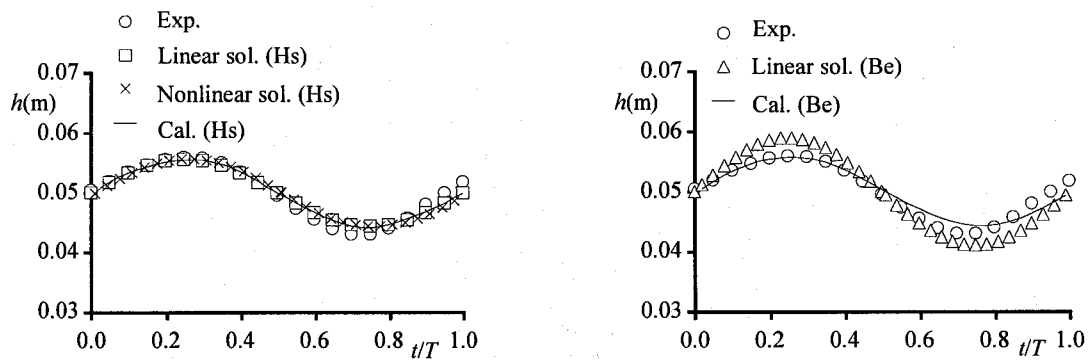
4.4 数値解析

鉛直加速度を考慮した場合についても, 数値解析を行った。前章と同様に, 数値解析法には有限体積法を用い, 移流項には1次精度の風上差分を適用する。また, 数値粘性項を付加しており, 計算格子は100メッシュである。

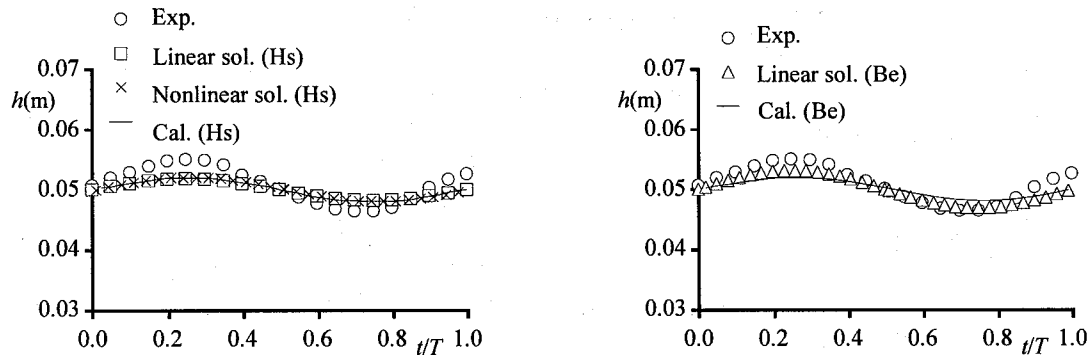
5. 考察

まず, 静水圧を仮定した浅水流方程式による線形, 非線形解析結果について考察を行う。図-8は, 振動台の振動数と水面振動の応答関係について, 線形解 (Linear(HS)), 非線形解 (Nonlinear(HS)) と実験結果を比較したものである。図の横軸は, 無次元角振動数 $\sqrt{X}$ であり, 縦軸は最大水深振幅 $h'_{\max}$ を無次元化した無次元水深振幅である。また, 上, 下図は, それぞれセンサー1 ($\xi = 0.875$), 及びセンサー2 ($\xi = 0.625$) の測定位置における結果を示したものであり, 実験結果については無次元振幅 δ の値から3つに分類した。線形解では, 無次元振幅 $\delta (=d/L)$ を変化させても結果は同じであるが, 非線形解の場合, 式(20), (21)をみるとわかるように無次元振幅 δ の値によって, 非線形性の影響が異なる。そこで, 参考値として, $\delta = 0.0075$ ($d = 0.003\text{m}$) と $\delta = 0.025$ ($d = 0.01\text{m}$) の場合について比較を行った。

はじめに, 線形, 非線形解析結果の比較を行う。図をみると, $\sqrt{X} \leq 3.0$ では線形解と非線形解は一致しているが, 3.0より大きくなると, 線形解では $\sqrt{X} = 3.8$ で分母が0と

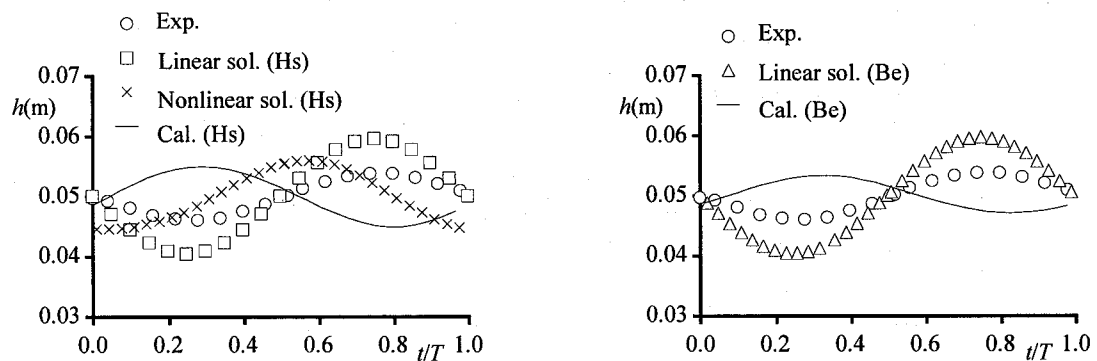


(a) センサー1 ($\xi=0.875$)

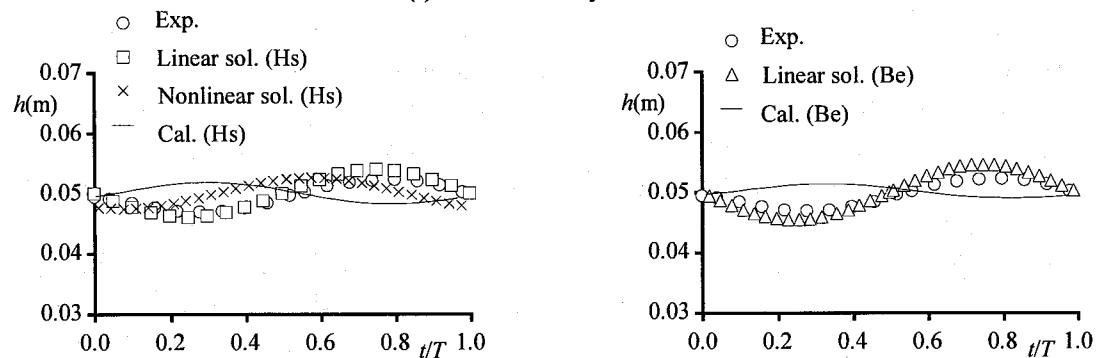


(b) センサー2 ($\xi=0.625$)

図-10 Case03 での水深の時間変化の比較



(a) センサー1 ($\xi=0.875$)



(b) センサー2 ($\xi=0.625$)

図-11 Case08 での水深の時間変化の比較

なり、共鳴関係が存在するため、発散している。一方、非線形解では発散せず、非線形性の影響によって有限値を示していることがわかる。

また、センサー1における実験結果と線形解、非線形解析結果を比べると、 $\sqrt{X} \leq 1.8$ ではほぼ一致しているが、

$\sqrt{X} \approx 2.0$ 付近で実験結果のほうが大きな値を示しており、また $\sqrt{X} \geq 4.0$ では、非線形解のほうが大きな値を示しているため、線形・非線形解と実験結果は適合していない。 $\sqrt{X} \approx 2.0$ 付近で適合しない理由については後述するが、 $\sqrt{X} \geq 4.0$ の場合については次のように考えられる。今回

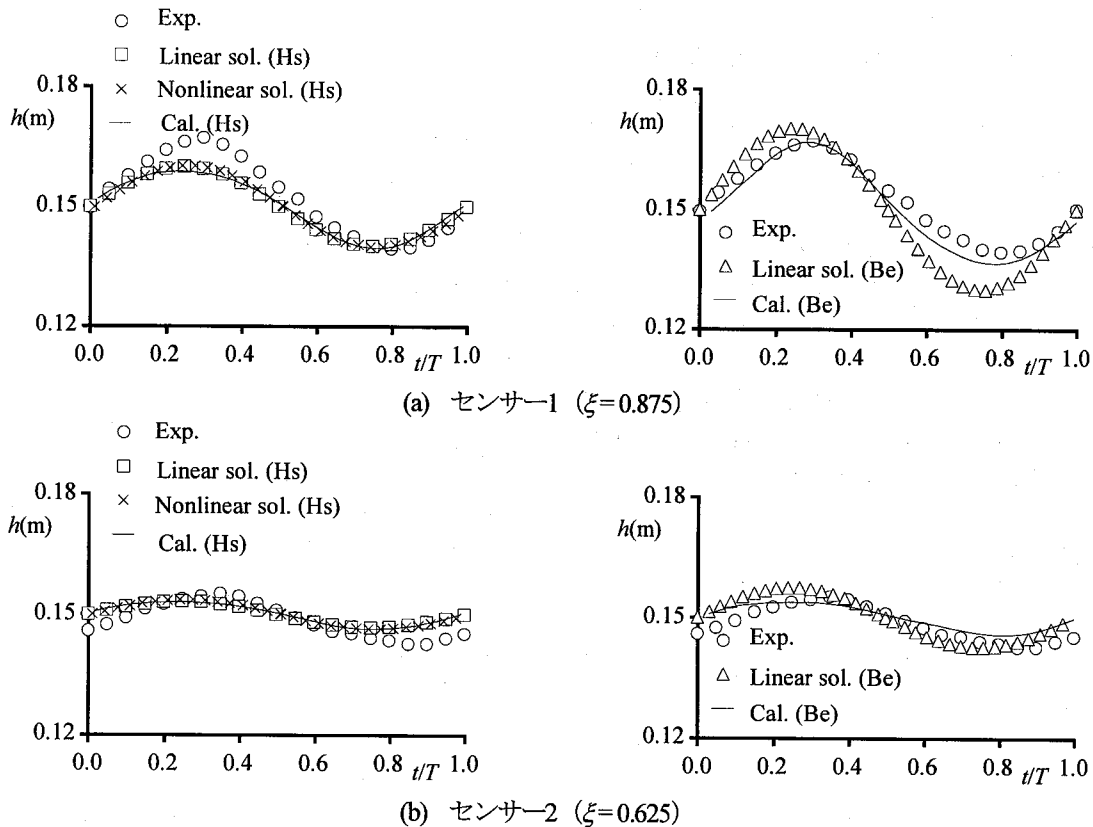


図-12 Case36での水深の時間変化の比較

用いている基礎式では、底面せん断応力等の粘性の影響を無視して線形解、非線形解を求めている。しかし、無次元角振動数 $\sqrt{X}$ が大きくなると、振動の周期が短くなるため、周期が長い場合に比べて流速が速くなり、底面せん断応力が無視できなくなると考えられる。従って、底面せん断応力を考慮しなかったことが実験結果と一致しなかった理由の1つとして考えられる。また、無次元角振動数 $\sqrt{X}$ が大きい場合、図-4、5 のビデオ画像をみてもわかるように、2次元性の影響も考えられることから、今後、底面せん断応力を考慮するとともに、平面2次元モデルを用いた数値解析も検討することで、無次元角振動数が大きい場合($\sqrt{X} \geq 3.0$)について考察したい。

次に、Boussinesq 方程式を用いた場合について考察する。図-9は、振動台の振動数と水面振動の応答関係について、静水圧を仮定した場合 (Linear(HS))、鉛直加速度を考慮した場合 (Linear(Be)) の線形解と実験結果を比較したものである。まず、静水圧を仮定した場合と鉛直加速度を考慮した場合の線形解について比較を行う。Boussinesq 方程式では、式(30)からわかるように、無次元波長 $\varepsilon (=h_0/L)$ の影響が含まれる。そこで、参考値として無次元波長 $\varepsilon=0.125$ ($h_0=0.05\text{m}$) と $\varepsilon=0.375$ ($h_0=0.15\text{m}$) の場合について結果を示す。図をみると、静水圧を仮定した場合には、共鳴点を示す無次元角振動数 $\sqrt{X}$ が3.8で一定であるのに対し、鉛直加速度を考慮した場合には、無次元波長が大きくなるにしたがって、共鳴点を示す無次元角振動数が小さくなっていることがわかる。これは、同じ水理条件でも無次

元波長の増大とともに鉛直加速度の影響が大きくなり、水面変動も大きくなったためであると考えられる。なお、本研究では、簡単のため Boussinesq 方程式(26)中の右辺第1項だけを考慮して解の導出を行っているが、無視した項が共鳴点に関して影響を及ぼす可能性があると考えられるため、この点については今後検討する必要がある。

また、静水圧を仮定した場合、及び鉛直加速度を考慮した場合の線形解と実験結果との比較について考察する。実験結果については、初期水深 h_0 の値によって3つに分類した。実験結果の無次元波長 ε が0.125、及び0.25の場合、 $\sqrt{X} \leq 3.0$ の範囲では静水圧を仮定した線形解と概ね一致しているが、無次元波長 $\varepsilon=0.375$ ($h_0=0.15\text{m}$) の場合には、実験結果は静水圧を仮定した浅水流方程式より大きな値を示しており、Boussinesq 方程式による結果に近づいている様子が確認される。特に、 $\sqrt{X}=2.0$ 付近ではほぼ一致していることがわかる。

以上の考察より、モデルの適用範囲について次のようなことがわかる。即ち、無次元波長が小さく($\varepsilon \leq 0.25$)、かつ無次元角振動数が小さい($\sqrt{X} \leq 3.0$)場合には、静水圧仮定の浅水流方程式による線形解で現象を再現することができる。一方、無次元角振動数が小さい場合でも無次元波長が大きい場合($\varepsilon > 0.25$)には鉛直加速度を考慮する必要がある。また、無次元角振動数が大きい($\sqrt{X} \geq 3.0$)場合、本研究での結果では適合性が十分ではないが、共鳴関係における解の発散を抑制できることから、非線形性の影響を考慮する必要があると考えられる。

最後に、各 Case での水深の時間変化について、実験結果と線形解、非線形解、数値解析結果の比較を行う。結果を図-10~12に示す。無次元波長が比較的短く、無次元角振動数 $\sqrt{X}$ が3.0より小さいCase03(図-10)では、静水圧仮定の浅水流方程式を用いた場合、すべての手法において実験結果を再現していることがわかる。Boussinesq 方程式を用いた場合、数値解析結果は実験結果と一致しているが、線形解の振幅は若干大きくなっている。図-12でも同様の結果が得られているため、この点については、今後の検討課題としたい。

一方、無次元波長が大きく、無次元角振動数 $\sqrt{X}$ が3.0より小さいCase36(図-12)をみると、静水圧仮定の解析結果では適合性が低く、Boussinesq 方程式の数値解析結果のみが実験結果を再現している。

無次元角振動数 $\sqrt{X}$ が大きい場合(Case08, 図-11), 非線形解、数値解析結果では位相がずれており、実験結果と一致していない。ここで、非線形解と数値解析結果で位相のずれが異なっているが、Case08は $\sqrt{X}$ が大きい場合であり、数値解析では数値振動が発生しやすく、数値粘性項の係数に大きな値を設定した。また、非線形解においてはべき乗の次数の違いが結果に影響していると考えられるため、数値粘性、解の次数の影響については、今後検討したい。一方、線形解では、共鳴点を越える度に位相が π だけずれ、逆転するため、結果的に位相が同じであるが、振幅が大きくなっており、再現できなかった。

本研究では、静水圧仮定での浅水流方程式と Boussinesq 方程式を用いて線形・非線形解析、数値解析を行い、無次元波長が大きい場合には鉛直加速度を考慮する必要性を指摘した。また、線形解析では共鳴関係が存在するため、振幅が無限大になってしまうが、非線形性を考慮することで、解の発散が回避され、有限値になることを示した。しかし、無次元角振動数 $\sqrt{X}$ が大きい場合、非線形解析、及び数値解析結果による振動振幅は実験結果より大きな値を示しており、現象を十分に再現することができなかった。今後、底面せん断応力を考慮した1次元解析を行うとともに、平面2次元解析へ拡張させ、無次元角振動数が大きい場合の振動特性について考察したい。

6. おわりに

本研究では、移動一般座標系での水深積分モデルを用い、振動台上の円筒水槽スロッシングについて考察した。静水圧仮定での浅水流方程式と Boussinesq 方程式による線形・非線形解を導出するとともに数値解析を行い、実験結果との比較を行った。その結果、無次元角振動数が3.0より小さい領域において、無次元波長が小さい場合には、静水圧仮定の浅水流方程式により実験結果を再現できることを示した。また、無次元波長が大きい場合には、鉛直加速度を考慮する必要性を指摘した。今後、粘性や2次元性の影響を考察することで、無次元角振動数が大きい場合の

振動特性について検討したい。

謝辞

最後に、本研究を遂行するにあたり、実験装置を提供してくださいました構造ダイナミクス分野の皆様に深く御礼申し上げます。また、水理実験、データ整理、図面作製に多大な協力を頂いた京都大学工学部・技官、仙波秀治氏に謝意を表します。

参考文献

- 1) Hutton R. E. : An investigation of resonant, nonlinear, nonplanar free surface oscillations of a fluid, NASA TECHNICAL NOTE, D-1870, 1963.
- 2) 清水 隆, 葉山眞治: 浅水波理論を応用したスロッシングの非線形応答(第1報, 基礎式の導出と長方形容器における非線形応答), 日本機械学会論文集(C 編), 53 巻, 486 号, pp.357-363, 1982.
- 3) 清水 隆, 葉山眞治: 浅水波理論を応用したスロッシングの非線形応答(第2報, 長方形容器と円筒容器における非線形応答), 日本機械学会論文集(C 編), 55 巻, 511 号, pp.663-670, 1982.
- 4) 大山 巧: 円筒容器内の非線形スロッシング現象の解析, 土木学会論文集, 第417号/II-34, pp.255-264, 1990.
- 5) 牛島 省: 3次元移動座標系を用いた非線形スロッシング現象の数値解析, 水工学論文集, 第41巻, pp.617-622, 1997.
- 6) 米山 望, 澤田純男, 高島大輔, 三浦正博: 円筒タンクのスロッシング防止に関する実験と数値解析, 京都大学防止研究所年報, vol.50, 2007 (印刷中)。
- 7) 音田慎一郎, 細田 尚, 三浦倫秀: 移動一般座標系での水深積分モデルを用いた水槽内流体振動解析, 応用力学論文集, vol.7, pp.1023-1032, 2004.
- 8) 三浦成久, 細田 尚, 音田慎一郎: 移動一般座標系での浅水流方程式を用いた円筒水槽のスロッシング解析, 応用力学論文集 vol.8, pp.839-846, 2005.
- 9) 細田 尚, 長田信寿, 村本嘉雄: 移動一般座標系による開水路非定常流の数値解析, 土木学会論文集 No.553/II-34, pp.267-272, 1996.
- 10) 音田慎一郎, 細田 尚, 木村一郎: 鉛直加速度を考慮した開水路流れの水深積分モデルの改良とその検証について, 土木学会論文集, No.761/II-67, pp.31-43, 2004.
- 11) Peregrine, D.H. : Calculation of the development of an undular bore, *J. Fluid Mech.*, Vol.25, pp.321-330, 1966.

(2007年4月12日 受付)