

地震波形の時間周波数特性に基づく類似性の評価におけるウィグナー分布とウェーブレット表現の有用性の比較

Performance of Wigner Distribution and Wavelet Representation in the Waveform Misfit Estimation in Time-Frequency Domain

本田利器*・岡本良輔**・澤田純男***

Riki Honda, Ryosuke Okamoto and Sumio Sawada

*正会員 工博 東京大学大学院 (〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

**工修 出光興産 (株) (〒 100-8321 東京都千代田区丸の内 3-1-1)

***正会員 工博 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

This paper proposes two indices to measure the similarity of seismic waves based on the time-frequency characteristics. One index uses Wigner distribution and it can represent energy misfit of seismic waves on the time-frequency region. The other uses wavelet transform and it allows us to discuss envelope misfit and phase misfit of seismic waves. The performance of the two proposed indices are compared based on the numerical examples. The results indicate that the index using wavelet transform is suitable for similarity estimation of seismic waves in the time frequency domain.

Key Words : Time frequency characteristics, Wavelet transform, Wigner distribution

1. はじめに

我が国では 1995 年の兵庫県南部地震以降、大規模な強震観測網の整備が進んでいる。その代表的なものとして、気象庁による震度計観測網や多機能型地震計観測網、総務省消防庁や地方自治体による震度情報ネットワーク、防災科学研究所の K-NET や KiK-net があげられる。大規模強震観測網の整備に伴い、観測記録波形を用いた震源過程の推定などの精度が高まっている。震源過程の推定は観測記録波形と震源モデルから得られる波形の類似性を表す指標を目的関数に設定し、目的関数を最適化する震源モデルを探索することで行なわれる。それゆえ、地震動の諸特性を考慮した類似性の評価指標は、逆解析上の目的関数としてその活用が見込まれ、開発が要求されている。

地震動の類似性を規定する指標としては、RMS (Root Mean Square) などが用いられている。しかし、地震動は非定常性を有しており、周波数特性が時間的に変化する時刻歴信号である。このような周波数の時間的変化特性は時間周波数特性と呼ばれ、時間領域における差のエネルギーを表した指標である RMS は、地震動の時間周波数特性の評価には適さない指標である。従って、地震動の時間周波数特性を考慮できる定量的な類似性評価指標が必要である。

そこで本研究では、時間周波数解析で用いられているウェーブレット変換¹⁾やウィグナー分布²⁾を用いた地震動の類似性評価法を提案する。ウェーブレット変換は、基底関数として時間領域にも周波数領域にも局在した関数を持ち、時間及び周波数の両領域における解像度を有している。また、ウィグナー分布は、時間周波数特性をエネルギー分布に相当する連続関数として規定し、他の時間周波数解析手法より解像度が高く数学的に好ましい特性を有している。本研究では、ある 2

つの地震波形の類似性を、その波形のウェーブレット係数、もしくはウィグナー分布の差で表現する手法を提案し、数値解析によってその有用性を検証する。

2. 時刻歴波形の類似性

2.1 差の RMS による評価

時刻歴波形の差を表す指標としては RMS があげられる。 $s_{ref}(t)$ を元波形、 $s(t)$ を元波形との類似性を比較する対象波形の時刻 t における振幅値とする。これら二者の違いを表す指標として、以下のようにして定義される差の RMS の元波形の RMS に対する比を用いることができる。

$$(\text{差の RMS 比}) = \sqrt{\frac{\int |s(t) - s_{ref}(t)|^2 dt}{\int |s_{ref}(t)|^2 dt}} \quad (1)$$

この RMS 比は、2 つの時刻歴波形の相違をパワーの差に基づいて表現する指標であり、その数理的な意味は明確である。時間周波数解析で用いられているウェーブレット変換やウィグナー分布は、時間領域と周波数領域におけるパワーを保存する。したがって、これらの手法を用いて、時間周波数特性を考慮した波形の相違を規定する場合も、同様の明確さがあるといえる。

2.2 時間シフトの影響

2 つの波の形を比較する際に、考慮する必要があるものとして、時間ずれがある。同一の波形でも時間方向にずらせば、誤差の RMS は非零となり、異なる波形と見なせる。この問題に客観的に対処する方法としては、差の RMS を最小とするように時間シフトをとることが考えられる。

2つの波 $s_1(t)$ と $s_2(t)$ がある場合に、差の RMS については

$$\begin{aligned} (\text{差の RMS})^2 &= \int |s_1(t) - s_2(t)|^2 dt \\ &= \int |s_1(t)|^2 dt + \int |s_2(t)|^2 dt - 2 \int s_1(t)s_2(t) dt \quad (2) \end{aligned}$$

という関係が成立する。上式の第3項は相関関数を表すものであるから、2つの波の差の RMS の最小化は、2者の相関を最大化することに相当する。

以下では、2波を比較するにあたって相関を最大化するよう時間シフトを与えることとする。

3. ウィグナー分布を用いた地震動の類似性評価法

3.1 提案式

本節ではウィグナー分布を用いた地震動の類似性評価法を提案する。ある2つの時系列信号 $s_{\text{ref}}(t)$, $s(t)$ の類似性をウィグナー分布を用いて評価する。ここでは2種の手法についての定義式を提案し、それぞれその有用性を検証する。

(1) 手法1

2つの時刻歴波形の時間領域での差 $d(t)$ を次のように設定する。

$$d(t) = s_{\text{ref}}(t) - s(t) \quad (3)$$

そして、以下のようにウィグナー分布を用いた波形の類似性評価式を設定する。

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t, \omega) &= \frac{W_d(t, \omega)}{\iint W_{\text{ref}}(t, \omega) dt d\omega} \\ &= \frac{W_d(t, \omega)}{\int |s_{\text{ref}}(t)|^2 dt} \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、 t, ω はそれぞれ時間及び周波数を表し、 $W_d(t, \omega)$, W_{ref} はそれぞれ $d(t)$, $s_{\text{ref}}(t)$ のウィグナー分布を表す。つまり、時間領域における波形の差 $d(t)$ のウィグナー分布によって、時間周波数領域における $s_{\text{ref}}(t)$, $s(t)$ の類似性を評価する。Wigner 分布が周辺条件を満たすことから、 $\varepsilon_1(t, \omega)$ を、 t, ω について積分した値の平方根は、式(1)で表される、差の RMS 比に一致する。すなわち

$$\iint \varepsilon_1(t, \omega) dt d\omega = (\text{差の RMS 比})^2 \quad (5)$$

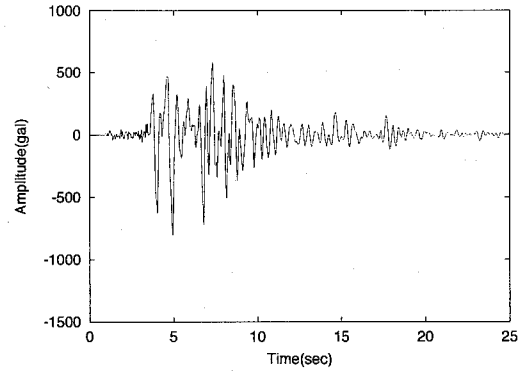
が成立する。

(2) 手法2

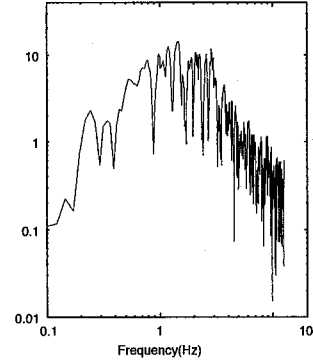
手法1では、2波形の差の時刻歴 $d(t)$ を介させているが、ここでは、2波形の時間周波数特性を直接比較することを考える。

2つの波形 $s_{\text{ref}}(t)$, $s(t)$ それぞれのウィグナー分布から、以下のように波形の類似性評価式を設定する。

$$\varepsilon_2(t, \omega) = \frac{W_{\text{ref}}(t, \omega) - W_s(t, \omega)}{\int |s_{\text{ref}}(t)|^2 dt} \quad (6)$$



(a) 時刻歴



(b) フーリエスペクトル

図-1 JMA 神戸の観測記録 NS 成分

ここで、 W_s は $s(t)$ のウィグナー分布を表す。また、 $s_{\text{ref}}(t)$ のウィグナー分布は

$$W_{\text{ref}}(t, \omega) = W_s(t, \omega) + W_d(t, \omega) + 2\Re[W_{s,d}] \quad (7)$$

というように分解することができる。ここに、 $W_{s,d}$ は $s(t)$ と $d(t)$ のクロスウィグナー分布を表す。式(7)を式(6)に代入すると、

$$\varepsilon_2(t, \omega) = \frac{W_d(t, \omega) + 2\Re[W_{s,d}(t, \omega)]}{\int |s_{\text{ref}}(t)|^2 dt} \quad (8)$$

となる。従って、式(8)と手法1の式(4)との違いは、その分子の第2項であることが分かる。

Wigner 分布は、本来有する時間周波数特性をあらわす項に加え、干渉項（クロス項）といわれる項を有し、そのために、時間周波数特性が「見えにくく」なることがあることが知られている²⁾。この第2項は、2波の差 $d(t)$ と元波形との干渉による影響が現れているものである。なお、分子の第2項を t, ω について積分した値は一般に0にならない。したがって、この $\varepsilon_2(t, \omega)$ の積分値の平方根をとっても、式(1)で表される差の RMS 比には一致せず、式(5)のような関係は成立しない。

3.2 解析例

提案した2手法がどのように波形の類似性を表すのか解析によって検証する。

解析に用いる波形は1995年兵庫県南部地震本震における神戸海洋気象台で観測された NS 成分で、その観

測記録を元波形として、元波形に様々な変化を与えた波形を作成する。そして、元波形と作成した波形の類似性を本手法を用いて評価し、元波形に与えた変化と解析結果との対応関係を調べる。

兵庫県南部地震本震における JMA 神戸の観測記録 NS 成分の時系列記録及びフーリエスペクトルを図-1 に示す。

以下では、提案手法の時間周波数特性の差異を検出する性能について検討する。そのために、元波形に変化を与えた波形（加工波形）を作成し、加工波形と元波形の類似性の評価により検出される差異と、与えた変化の比較を行う。元波形に与える変化は4種類を想定した。

ケース1: 最大加速度振幅を1.5倍に変化させた場合 局所的な差異の検出性能を検討するため、最大加速度振幅が現われる4.96秒での値のみを810galから1,215galに1.5倍に変化させた波形を作成した。対象波形を図-2 に示す。この波形と元波形との類似性を調べる。

手法1の式(4)と手法2の式(8)による結果を図-3 に示す。手法1による結果は、最大加速度振幅を取る5秒を含む付近で、広範囲の周波数領域で相違が見られる。

ただし、大きな負の値も取る箇所もあり、与えた変化に適合した結果であるとは言にくい。また、手法2による結果も、与えた変化と整合性のある結果とは言えない。

なお、このケースでは、最大加速度のピーク値を変更しただけであるので、2波の差はデルタ関数であるとも考えられる。デルタ関数の時間周波数特性は、図-3 のようにならず、時間方向には完全に局在化し、周波数特性を有しない結果となる。

ここで示されているような結果となった理由は、比較する2波形の相関係数を最大化するために与えた時間シフトの影響である。このような影響は排除することも可能であるが、提案する手法の一般的なケースへの適用性を考慮するため、あえてこの結果を示した。

ケース2: エネルギー(加速度振幅の2乗和)を1.5倍にした場合 振幅の2乗和が1.5倍になるように元波形の全振幅を一律に定数倍した波形と元波形との類似性を調べる。対象波形を図-4 に示す。

手法1及び2による結果を図-5 に示す。手法1による結果では、ケース1での手法2による結果と似た分布形状を示した。また、手法2の結果はケース1での結果と非常に似た結果になっている。これは、波形全体を定数倍した場合、元波形との差の波形は元波形と同じ時間周波数特性を有することになるため、差にあたる $d(t)$ と、本来の波形の干渉による影響は、波形自身の Wigner 分布と同じ形状（振幅は異なる）を有することになるからである。

手法1,2のいずれも元波形に与えた違いを読み取ることは難しい。

ケース3: 最大振幅を与えるウェーブレット係数を1.5倍した場合 時間周波数特性の変化に対する性能を検

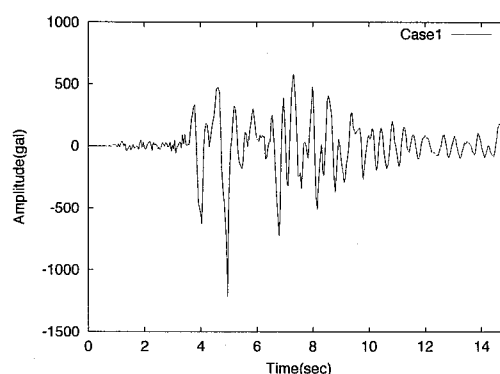
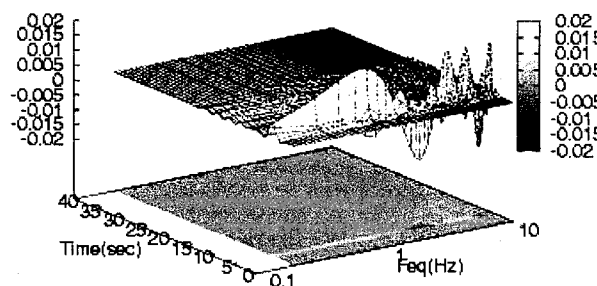
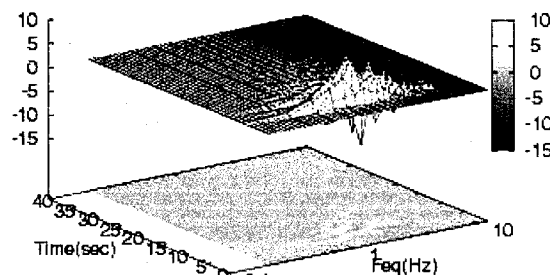


図-2 ケース1（最大加速度振幅を1.5倍させた場合）での解析対象の波形



(a) 手法1



(b) 手法2

図-3 ケース1（最大加速度振幅を1.5倍させた場合）の波形の相違

討するため、ここでは、大濱⁴⁾の解析信号ウェーブレットを用いた波形合成法を用いた。波形に与える影響が最も大きい成分として、絶対値最大のウェーブレット係数の値を1.5倍した波形を対象波形とする。対象波形を図-6 に示す。は0.23である。

手法1と手法2による結果を図-7 に示す。(a)に示される手法1による結果では、解析信号ウェーブレットによって変化を与えた部分である5秒、1 Hz 付近で大きな変化が表われており、与えた変化との整合性が見られる。一方、(b)の手法2ではそのような結果は得

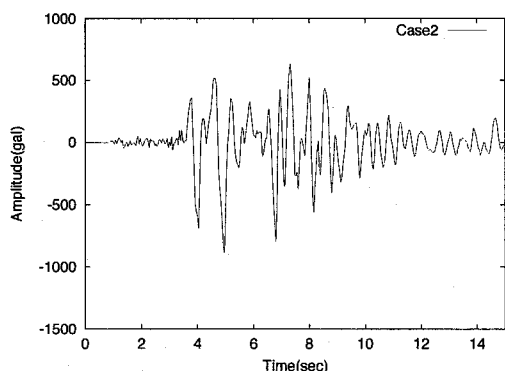


図-4 ケース 2 (エネルギーを 1.5 倍させた場合) での解析対象の波形

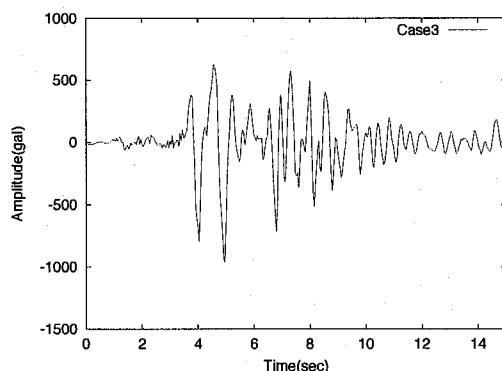
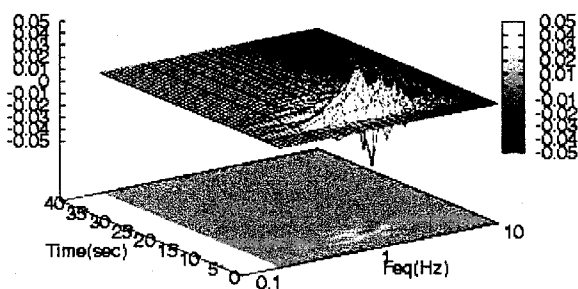
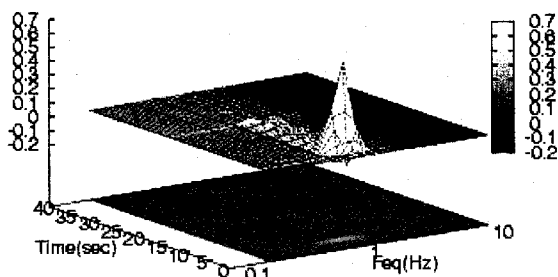


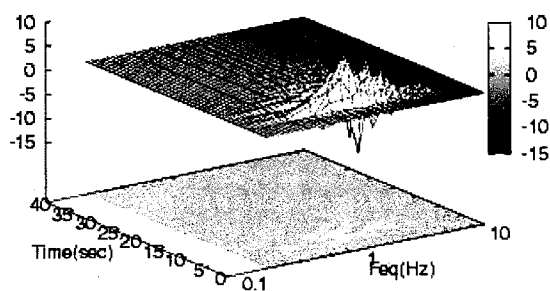
図-6 ケース 3 (最大のウェーブレット係数を 1.5 倍した場合) での解析対象の波形



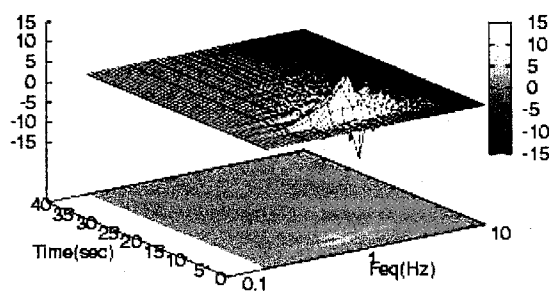
(a) 手法 1



(a) 手法 1



(b) 手法 2



(b) 手法 2

図-5 ケース 2 (エネルギーを 1.5 倍させた場合) での波形の相違

図-7 ケース 3 (最大のウェーブレット係数を 1.5 倍した場合) での波形の相違

られず、絶対値こそ異なるが、そのウィグナー分布の形状はケース 1 やケース 2 の結果と良く似ている。

ケース 4: 最大振幅を与えるウェーブレット係数の位相を $\pi/2$ 回転した場合。ここでは、位相の影響を検討するため、元波形の振幅を与えるウェーブレット係数の位相を $\pi/2$ 回転させた波形を対象とする。その時刻歴波形を図-8 に示す。結果を図-9 に示す。手法 1 による結果では、ケース 3 の結果と同じように変化を与えた 5 秒、1 Hz 付近で大きな変化が表われている。一方、

手法 2 による結果もケース 3 と似た結果が得られた。

以上の結果から、Wigner 分布による評価は、解像度が高い、周辺条件を満たす等の利点はあるものの、干渉項の影響の大きさが使いやすさに悪い影響を及ぼしていることが示唆される。

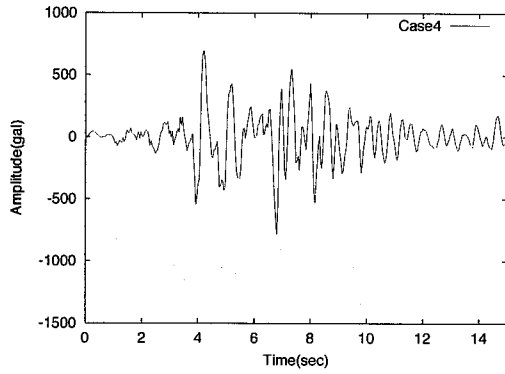
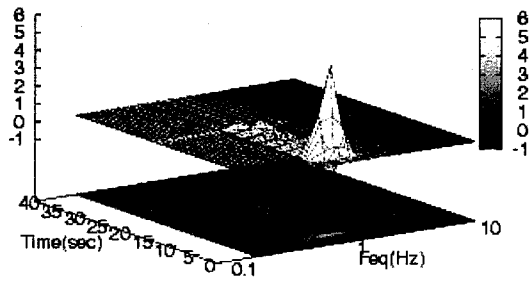
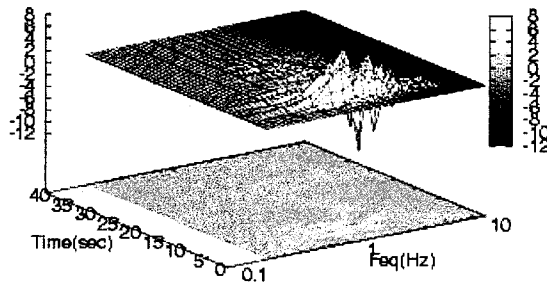


図-8 ケース 4 (最大のウェーブレット係数の位相を $\pi/2$ 回転させた場合) での解析対象の波形



(a) 手法 1



(b) 手法 2

図-9 ケース 4 (最大のウェーブレット係数の位相を $\pi/2$ 回転させた場合) での波形の相違

4. ウェーブレット変換を用いた地震動の類似性評価法

4.1 提案式

Kristeková³⁾らは、ある 2 つ波形の類似性を時間周波数平面上で評価する指標として、振幅と位相の差をそれぞれ

$$\Delta E(t, f) = |T(t, f)| - |T_{\text{ref}}(t, f)| \quad (9)$$

$$\Delta P(t, f) = |T_{\text{ref}}(t, f)| \frac{\text{Arg}[T(t, f)] - \text{Arg}[T_{\text{ref}}(t, f)]}{\pi} \quad (10)$$

と定義した。ここに、 $T_{\text{ref}}(t, f)$ は元信号 $s_{\text{ref}}(t)$ の時間 t 、周波数 f におけるウェーブレット係数、 $T(t, f)$ は比較対象の信号 $s(t)$ の時間 t 、周波数 f におけるウェーブレット係数である。ウェーブレット変換には Morlet ウェーブレットを用いている。(前節では周波数は ω を用いて表記したが、ここでは Kristeková らにならい f を用いて表している。両者の関係は $\omega = 2\pi f$ となる。)

Kristeková らは、式 (9) と式 (10) によって、ある 2 つの波形の時間周波数面上での相違の図示が可能であることを示した。しかし、式 (10) において位相の差を偏角の差で表現しているなど、数学的な根拠が明確でない。

本研究では連続ウェーブレット変換を用いて、時間周波数平面上での振幅と位相の差を、それぞれ、

$$\Delta_{\text{amp}}(t, f) = \frac{||T_{\text{ref}}(t, f)| - |T(t, f)||}{\sqrt{\int |s_{\text{ref}}(t)|^2 dt}} \quad (11)$$

$$\Delta_{\text{phase}}(t, f) = \frac{\sqrt{2|T_{\text{ref}}(t, f)| \cdot |T(t, f)| \cdot (1 - \cos \theta)}}{\sqrt{\int |s_{\text{ref}}(t)|^2 dt}} \quad (12)$$

と新たに定義し、地震波形の特性を評価する。用いた記号は式 (9)、(10) と同じである。ここで、

$$\theta = \arg[T(t, f)] - \arg[T_{\text{ref}}(t, f)] \quad (13)$$

である。なお、ウェーブレット変換には、時間周波数面上で局在性が高いと言うメリットを考慮して、Kristeková らにならい、Morlet のウェーブレットを用いる。

振幅差 (式 (11)) と位相差 (式 (12)) の二乗和を時間 t 、周波数 ω で積分した値の平方根は、式 (1) で表される、差の RMS 比に一致する。すなわち、Wigner 分布における式 (5) と同様に次式が成立する。

$$\iint \{\Delta_{\text{amp}}^2(t, f) + \Delta_{\text{phase}}^2(t, f)\} dt d\omega = (\text{差の RMS 比})^2 \quad (14)$$

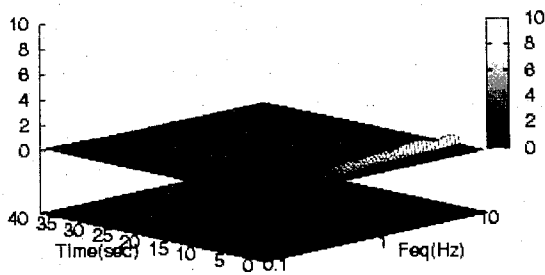
(ここで $f = 2\pi\omega$ である。) したがって、波形の相違を表す本質的な指標である RMS における、振幅の影響と位相の影響をそれぞれ定量的に示すものであると解釈でき、その数学的な意味合いは明確になる。

4.2 解析例

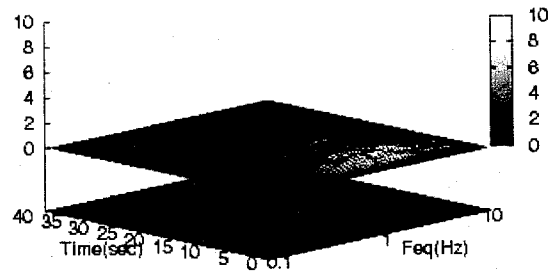
ここでは、本節で示した波形の類似性評価法の性能を検討する。元波形や、波形に与える変化の内容等の条件は、前節と同じものとする。

ケース 1: 最大加速度振幅を 1.5 倍に変化させた場合
元波形において、最大加速度値が出現する 4.96 秒での値を 810gal から 1,215gal に 1.5 倍した波形 (図-2) との比較である。

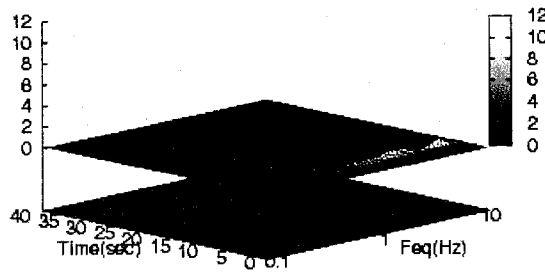
式 (11) の振幅差、式 (12) の位相差、振幅差と位相差の 2 乗和をそれぞれ、図-10 に示す。図-10(a) 及び (b) を見ると、振幅差、位相差が共に、当該の時刻 5 秒付近において比較的広い周波数範囲で表われていることがわかる。これは、波形の差であるデルタ関数の特性を反映したものとなっている。時間シフトの影響により、完全にデルタ関数の時間周波数特性と一致していないことは、Wigner 分布による検討の場合と同様である。



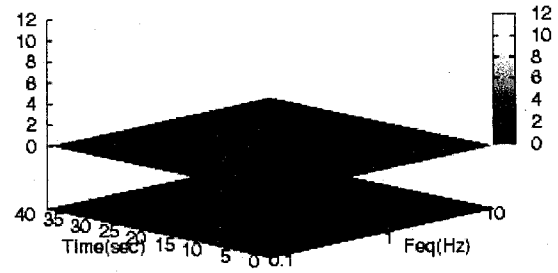
(a) 振幅差



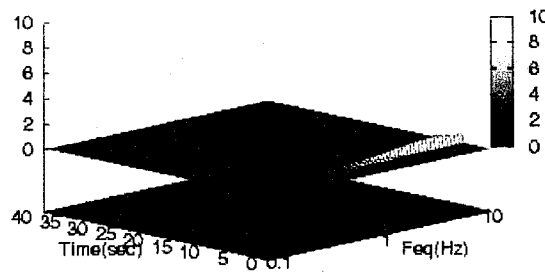
(a) 振幅差



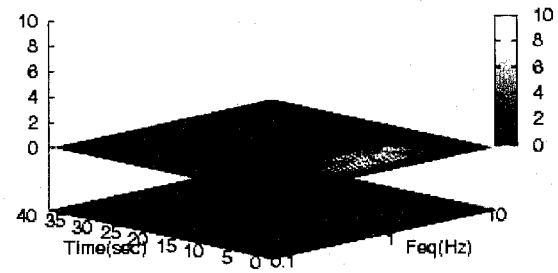
(b) 位相差



(b) 位相差



(c) 振幅差と位相差の2乗和



(c) 振幅差と位相差の2乗和

図-10 ケース 1 (最大加速度振幅を 1.5 倍させた場合) での振幅差と位相差

図-11 ケース 2 (エネルギーを 1.5 倍した場合) でのウェーブレット振幅差と位相差

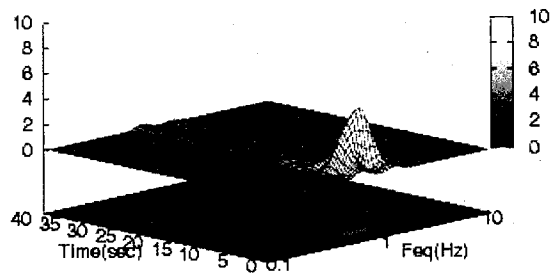
ケース 2: エネルギー (加速度振幅の 2 乗和) を 1.5 倍にした場合 波形のエネルギーが 1.5 倍になるように元波形の全加速度振幅を一律に定数倍した波形 (図-4) と元波形との類似性を調べる。

振幅差による影響を図-11(a) に示す。振幅差による影響は、波形の主要動に当たる時刻 0 ~ 10 秒、周波数 0.5 ~ 3 Hz の範囲に分布している。一方、同図 (b) に示される位相差による影響は、ほぼ 0 となっている。これは波形の位相は変化させていないことと整合している。図-11(c) には、振幅差と位相差の 2 乗和を示すが、これは、図-11(a) に一致する結果となる。これらの結

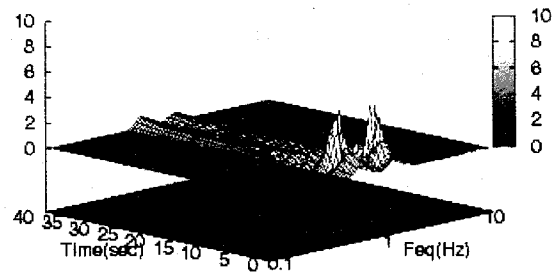
果は与えた変化を評価する上で妥当なものと考えられる。

ケース 3: 最大振幅を与えるウェーブレット係数を 1.5 倍した場合 振幅が最大となるウェーブレット係数の振幅を 1.5 倍した波形 (図-6) との類似性を調べる。

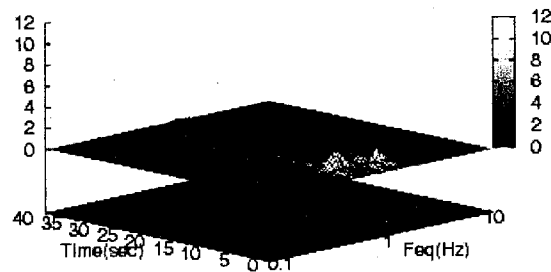
振幅差、位相差による影響はそれぞれ図-12(a)(b) に示す。振幅の影響は、最大ウェーブレット振幅を与える 5 秒、1 Hz 付近に分布している。位相に変化は与えていないが、波形の加工に用いたウェーブレットと、時



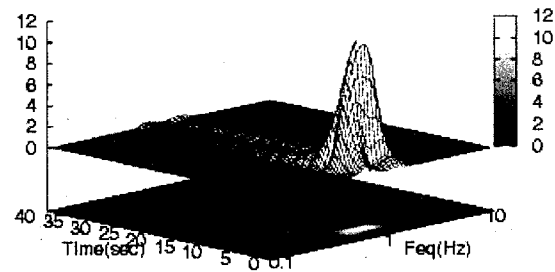
(a) 振幅差



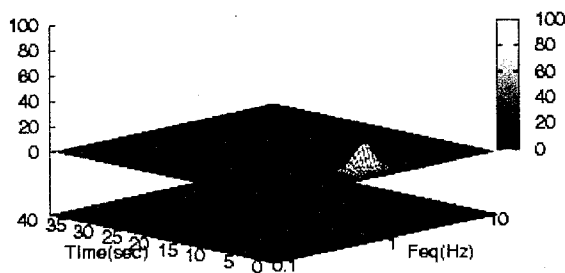
(a) 振幅差



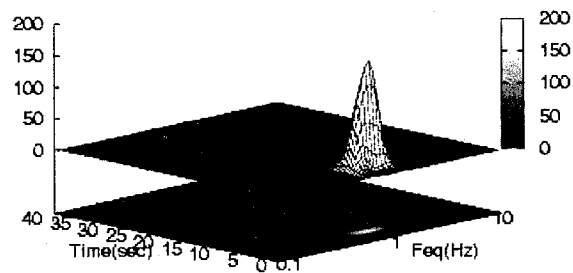
(b) 位相差



(b) 位相差



(c) 振幅差と位相差の2乗和



(c) 振幅差と位相差の2乗和

図-12 ケース3（最大のウェーブレット係数を1.5倍させた場合）でのウェーブレット振幅差と位相差

図-13 ケース4（最大のウェーブレット係数の位相を $\pi/2$ 回転させた場合）でのウェーブレット振幅差と位相差

間周波数特性の評価に用いたウェーブレットの関数が異なるため、その差の一部は位相差として検出される。ただし、その値は比較的小さいものとなっている。

一方、図-12(c)に示される振幅差と位相差による影響の2乗和の分布は、波形のエネルギー差を評価することになるため、振幅を増幅したウェーブレット係数とよく一致する結果を示している。

ケース4：最大振幅を与えるウェーブレット係数の位相を $\pi/2$ 回転した場合 最大振幅を与えるウェーブレッ

ト係数の位相を $\pi/2$ 回転させた波形（図-8）との類似性を調べる。

振幅差、位相差等の影響を図-13に示す。いずれも、最大のウェーブレット振幅を与える5秒、1 Hz付近に分布しているが、時間方向で比較的広い範囲で非零の値を有するものとなっている。これは、波形の加工に用いた解析信号ウェーブレットの時間方向での局在性の低さを検出しているものである。

加工したのは位相だけであるが、ケース3と同様の理由により、振幅の差による影響も0となっていない。ただし、その値は、位相差に比べると小さいものとなっ

ている。

前述した他の3ケースに比べると振幅差、位相差が非常に大きいことが分かる。これにより、ウェーブレット位相が波形の時間周波数特性に大きな影響を及ぼしていることが示唆される。

以上の4ケースの検討においては、ウェーブレットによる評価は、波形に加えた変化の内容と整合性のある結果を与えている。また、その結果は、Wigner分布のように干渉項による影響が無いため、分かりやすいものとなっている。与える変化の種類や程度が変われば、その適用性にも限界が見られる可能性はあるが、ここで扱ったような比較的小さい変化に対する検出性能は検証されたと考えられる。

5. まとめ

時間周波数解析で用いられるウェーブレット変換とウィグナー分布による地震動の類似性評価法を提案した。いずれの手法も、時間周波数特性に基づいた地震波形の相違を調べることができるものである。

本研究では、ウェーブレット変換とウィグナー分布による評価法の性能について比較検討を行った。

ウィグナー分布については、2つの手法を提示した。いずれの手法においても、得られた結果は、波形に与えた変化と直観的に整合のとれたものではなかった。特に、時間周波数特性を直接比較する手法（手法2）は、ケース1～4のいずれにおいても同様な分布を与えると

いう結果になり、波形の変化を適切に捉えることが難しかった。ウィグナー分布の持つ干渉項の影響が大きく、解像度が高いという特性を活用できる結果にはならなかったと言える。

一方、ウェーブレット変換による地震動の類似性評価法は、波形の変化に整合した分かりやすい結果を与えた。また、時間周波数面上で波形の相違を振幅と位相の影響に分けて議論できる点や、また、その振幅差と位相差の2乗和の積分値はRMSと一致し、数学的に明解である点で地震動の類似性評価に適していると考えられる。

参考文献

- 1) 前田肇, 佐野昭, 貴家仁志, 原晋介: ウェーブレット変換とその応用, 朝倉書店, 2001
- 2) Cohen.L, 吉川昭, 佐野俊輔: 時間-周波数解析, 朝倉書店, 1998
- 3) Miriam Kristeková, P. Moczo., J. Kristek and S. M. Day : Misfit criteria for quantitative comparison of seismograms, Bulletin of the Seismological Society of America, vol.96, pp.1,836-1,850, 2006
- 4) 大濱吉礼, 本田利器: 解析信号ウェーブレットを用いた入力地震動の合成, 第58回土木学会年次学術講演会概要集, 1-299, 2003 年
<http://www.k-net.bosai.go.jp/k-net/>

(2007年4月12日受付)