

時間依存性摩擦構成式を用いた スティック・スリップ運動の安定性に関する検討

Study on stability of stick-slip motion by the time-dependent constitutive equation for friction

尾崎伸吾*・橋口公一**・陳 玳行***

Shingo OZAKI, Koichi HASHIGUCHI and Dai-Heng CHEN

*農博 東京理科大学助教 工学部機械工学科 (〒 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3)

**工博, 農博 第一工業大学教授 (〒 899-4395 鹿児島県霧島市国分町 1-10-2)

***工博 東京理科大学教授 工学部機械工学科 (〒 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3)

It is important to clarify the frictional sliding characteristics of unstable vibration, such as stick-slip motion, for the design of machine elements and constructions. Especially, wear of machine elements is accelerated, and acoustic emission system and machine life are also highly affected by stick-slip motion. In this study, the time-dependent subloading-friction model, which can rationally describe the reciprocal transition of static-kinematic frictions, is applied to the analysis of stick-slip motion. Concretely, one-dimensional model of spring-mass system is implemented by incorporating the present friction model. The model is then applied to simulations of stick-slip motion under various conditions. It is shown by the present simulations that an unstable region of stick-slip motion in the ($K-v$) plane, and effect of time- and state-dependent parameters on the stick-slip amplitude.

Key Words : Stick-slip motion, Static friction, Kinematic friction, Time-dependent friction model, Stability analysis

1. 緒 言

機械要素や地盤構造物の接触部が摩擦を伴いながら互いにすべる際、摩擦力や相対変位の経時変化に間欠性の振動現象が観察される場合がある。このような現象は、古くからスティック・スリップ運動として知られており^{1)~3)}、機械/構造物における安定性を損なう主要因となる。特に、ブレーキ、クラッチ、鉄道車輪等の機械要素における寿命の長期化、磨耗や鳴き現象の抑制^{4)~6)}や、サイロ等における粉粒体と内壁間での騒音や震動の発生の問題^{7),8)}において、スティック・スリップ運動の安定性の議論は不可欠である。また、地震を断層面に沿って生じるスティック・スリップ運動による摩擦の不安定現象と捉え、破壊現象はむしろ二次的なもので断層の拡大や磨耗によるガウジの形成に寄与するという考えに基づき、理論・実験両面からの研究が多数取り組まれている^{9)~14)}。他方、スティック・スリップ運動を積極的に利用する場合もある。例えば、バイオリン等の弦楽器においては、弦と弓とのスティック・スリップ運動が音源となるため、その音色に対する工学的な解析も取り組まれている^{15),16)}。

以上のように、広く認められたスティック・スリップ運動ではあるが、図-1(a)に示す、典型的なすべり摩擦系の一次元バネモデルを用いて、その発生条件とメカニズムを模式的に説明する。スティック・スリップ運動は、1) 静止摩擦が動摩擦より大きいこと、2) 静止摩擦が停止時間に依存して回復すること、そして、3) すべ

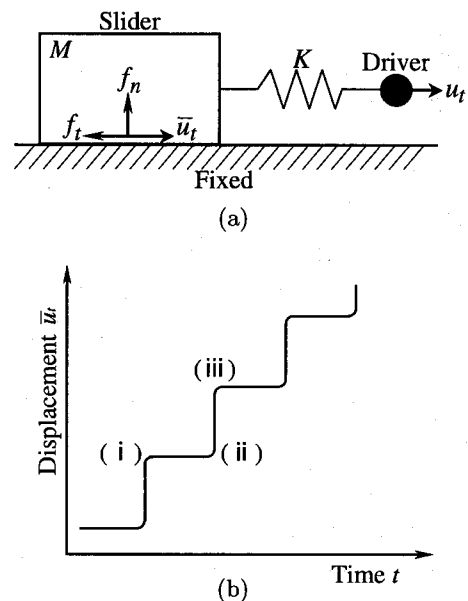


図-1 典型的なスティック・スリップ運動：(a) バネ-質点系モデル；(b) 変位-時間関係

り変位の増大とともに静止摩擦から動摩擦へ遷移することなどにより生じる。また、弾性特性を有する物体を介しての相互作用により引き起こされ、図-1(b)に示すような変位-時間関係が現れる。いま、ドライバの駆動速度が一定の場合を考えると、図-1(b)の(i)~(ii)では、スライダは動かずバネのみが伸び、(ii)~(iii)ではバネの力が静止摩擦力を上回るため、バネが瞬間的に縮まる。これらの過程を繰り返すことで、周期的な

間欠運動が現れる。このような発生条件とメカニズムからわかるように、スティック・スリップ運動は、すべり速度の増加に伴って摩擦係数が小さくなるケースやバネの駆動速度が遅い場合には、より顕著になる。これまで、上述のスティック・スリップ運動を検討するために、トライボロジー分野を中心に多くの研究が取り組まれており、摩擦係数を時間やすべり速度の関数とした摩擦モデルが多数提案されている^{1)~3),17)~25)}。しかし、このような定式化の摩擦モデルは、接触境界条件が未知となる一般的な境界値問題には適用できない。したがって、スティック・スリップ運動を含む接触境界値問題の解析には、弾塑性論の枠組みに属する時間依存性摩擦構成式が不可欠となる。

このような状況のもと、著者らは、摩擦基準面(すべり降伏面)の等方硬・軟化を導入することで、静止・動摩擦の時間依存性遷移過程を合理的に表現し得る“時間依存性下負荷面摩擦モデル”を提案している²⁶⁾。本モデルの基本的特徴は、以下の通りである。

- 1) 接触応力の静止摩擦への上昇、その後の動摩擦への低下過程は、滑らかな弾塑性遷移を示す下負荷面の概念により塑性軟化現象として統一的に表現可能である。
- 2) 動摩擦から静止摩擦への回復現象は、表面突起のクリープ変形(凝着)による硬化現象であるとみなして、内部変数を物理量として定式化されている。
- 3) 摩擦基準面内部の接触応力の変化による塑性すべり速度を表現し得る下負荷面の概念に基づいており、滑らかな弾塑性遷移を表現でき、ひいては繰返し摩擦負荷に対するすべり変位の集積現象を表現し得る。
- 4) 塑性すべり速度の負荷基準において、すべり条件(摩擦基準)が満たされたか否かの判定は必要でない。特にこれは、繰返し負荷変動の著しい現象の解析において重要である。

そこで本研究では、時間依存性下負荷面摩擦モデルを導入した、図-1(a)に示すような一次元バネ-質点系のモデルを用いて、新しいスティックスリップ運動の数値解析法を提案する。また、系の動的パラメータである質量、バネ定数およびドライバの駆動速度を変化させたケーススタディを行うことで提案手法の妥当性を実証するとともに、すべりモードの安定性について議論する。加えて、時間依存性すべり摩擦挙動の重要なパラメータである静止・動摩擦間の遷移速度がスティック・スリップ運動に及ぼす影響について検討する。

2. 時間依存性摩擦構成式

本節では、まず、既往の時間依存性摩擦モデルを概説した後、時間依存性下負荷面摩擦モデルについて説明する。

2.1 従来の時間依存性摩擦モデル

さて、静止している物体にすべりを生じさせるとき、まず高い摩擦抵抗が現れ、これは静止摩擦と呼ばれている。ここで、静止摩擦はすべり速度の増加に伴い、小さくなることが特徴である。その後、摩擦抵抗は、すべり変位の進展とともに低下して、ある一定値に漸近するが、この停留摩擦は動摩擦と呼ばれている。また、摩擦抵抗が低下した後、しばらく放置して再びすべりを生じさせると、静止摩擦が復活して、初期すべり時と同じ現象が再現されることが明らかにされている^{17)~25)}。このような静止・動摩擦の相互遷移現象は、トライボロジーの分野においては、主に次式のように、摩擦係数をすべり変位 $\bar{u}$ 、すべり速度 $\bar{v}$ 、すべり停止後の経過時間 t の関数とすることで定式化され、これらをスイッチ関数的に併用することで解析が行われている。

$$\left. \begin{aligned} \mu_s &= f(\mu_k, t, s) \\ \mu_k &= g(\mu_s, \bar{u}, s) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

あるいは、

$$\mu_k = \bar{g}(\mu_s, \bar{v}, s) \quad (2)$$

ここに、 μ_s および μ_k は静止および動摩擦係数であり、 t は時間を表している。また、 s は温度や法線応力などをまとめて示したパラメータである。しかし、すべり速度が小さい場合に停止したか否かの判定には任意性を伴うことからわかるように、式(1)のように時間そのものを含むことは構成式としての要件である客観性を破ることになり、解析結果は解析者に依存する。さらに、式(2)のように摩擦係数をすべり速度の関数とすると、後述する摩擦構成式としての接触応力速度-すべり速度関係式の導出が困難となり、一般的な接触境界値問題に適用できない。物質特性の変化は、内部変数とその変化により記述すべきであることに留意しなければならない。

他方、弾塑性構成式と類似の定式化法として、前述のすべり始めてから静止摩擦に至る過程^{27)~31)}と、静止摩擦から動摩擦に低下する過程^{10)~13)32)~35)}をすべり変位に依存する形式で表現したモデルがあり、種々の境界値問題にも適用されている。しかし、これらのモデルでは、静止摩擦係数の回復とすべり速度依存性を含めた摩擦挙動の一連の相互遷移現象を連続的に表現できていない。一般的な時間依存性摩擦挙動を表現し得る定式化は、著者らにより、次に述べる時間依存性下負荷面摩擦モデルとして達成された。

2.2 時間依存性下負荷面摩擦モデル

ここでは、後のスティック・スリップ挙動の数値解析に使用する時間依存性下負荷面摩擦モデル²⁶⁾について説明する。本モデルでは、静止摩擦から動摩擦への遷移過程を塑性すべりによる等方軟化現象とみなし、また、摩擦抵抗の回復過程を表面突起のクリープ凝着変

形による等方硬化現象とみなして、これらを表現し得るように下負荷面摩擦モデル³¹⁾を拡張している。なお、本研究では、通常の圧力下での一次元すべり摩擦挙動を対象としているため、定式化に当たっては一般的な非線形摩擦基準面ではなく^{26),29)~31)}、法線接触応力非依存の Coulomb の摩擦基準面を採用する。

(1) すべり速度の分解

接触物体間のすべり速度（相対速度） $\bar{\mathbf{v}}$ は、法線成分 $\bar{\mathbf{v}}_n$ と接線成分 $\bar{\mathbf{v}}_t$ に加算分解される。つまり、

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_n + \bar{\mathbf{v}}_t \quad (3)$$

なお、これらの成分は次のように表し得る。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n &= (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{v}}_t &= \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \bar{\mathbf{v}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{n}$ は接触面の単位法線ベクトル、 $\mathbf{I}$ は恒等テンソル、 $(\cdot)$ はスカラー積、 $(\otimes)$ はテンソル積を示す。さらに、すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}$ は、接触表面の微小な凹凸の弾性変形に相当する弾性すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}^e$ と塑性すべり速度 $\bar{\mathbf{v}}^p$ に加算分解されるとする。つまり、

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^e + \bar{\mathbf{v}}^p \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_n &= \bar{\mathbf{v}}_n^e + \bar{\mathbf{v}}_n^p \\ \bar{\mathbf{v}}_t &= \bar{\mathbf{v}}_t^e + \bar{\mathbf{v}}_t^p \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

まず、弾性部分を次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_n &= -\alpha_n \bar{\mathbf{v}}_n^e \\ \dot{\mathbf{f}}_t &= -\alpha_t \bar{\mathbf{v}}_t^e \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、右辺のマイナスは、物体に作用する接触応力と物体のすべりは互いに反対方向であることによる。 $\mathbf{f}_n$ および $\mathbf{f}_t$ は、単位接触面積当りに作用する表面力ベクトル $\mathbf{f}$ の法線および接線成分である。また、共回転速度を記号 $(\circ)$ 、物質時間微分を記号 $(\dot{\cdot})$ で示せば、これらは次のように関連づけられる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_n &= \dot{\mathbf{f}}_n - \Omega \mathbf{f}_n \\ \dot{\mathbf{f}}_t &= \dot{\mathbf{f}}_t - \Omega \mathbf{f}_t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに、反対称テンソル Ω は接触面の剛体回転スピンを表す。 α_n および α_t は接触面の法線および接線方向の摩擦に関する弾性係数であり、接触境界値問題におけるペナルティ係数に相当する。したがって、式(7)から次式が成り立つ。

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}}_n + \dot{\mathbf{f}}_t = \mathbf{C}^e \bar{\mathbf{v}}^e \quad (9)$$

ここに、2 階のテンソル $\mathbf{C}^e$ は、接触に関する弾性係数テンソルであり、次のように法線および接線方向成分に分解される。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_n^e &= -\alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ \mathbf{C}_t^e &= -\alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

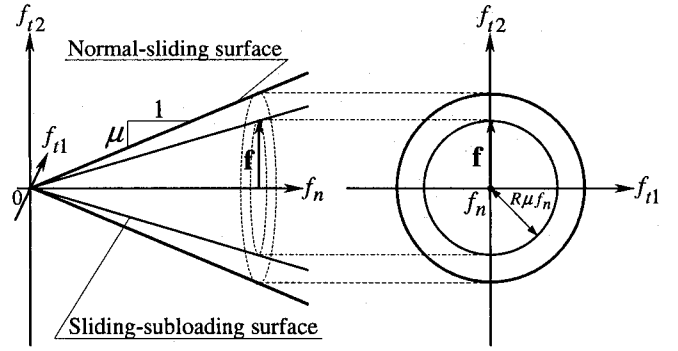


図-2 正規すべり面およびすべり下負荷面

(2) 正規すべり面およびすべり下負荷面

まず、次式で与えられる等方的な Coulomb の摩擦基準面（すべり降伏面）を考える。

$$\|\mathbf{f}_t\| = \mu \|\mathbf{f}_n\| \quad (11)$$

ここに、 $\|\cdot\|$ は大きさを表す。本モデルでは、非古典弾塑性論に属する下負荷面摩擦モデルの概念³¹⁾に基づき、この摩擦基準面の内部は弾性域ではなく、その内部の接触応力の変化によっても塑性すべりが生じると仮定する。これに伴い、式(11)で表される円錐面を“正規すべり面”と呼ぶことにする。

さて、図-2に示すように、下負荷面の概念に基づいて、常に現在の接触応力点を通して、接線接触応力平面 (f_{t1}, f_{t2}) において正規すべり面に相似で、かつ、この面に相似な形状を有する“すべり下負荷面”を導入する。ところで、接触応力が正規すべり面上に存在する“正規すべり状態”への接近の度合は、正規すべり面の大きさに対するすべり下負荷面の大きさの比 R ($0 \leq R \leq 1$) で表し得るが、これを“正規すべり比”と称する。なお、 $R = 0$ は最も弾性的な状態に相当し、 $R = 1$ は正規すべり状態に相当する。以上により、すべり下負荷面は次式で表される。

$$\|\mathbf{f}_t\| = R\mu \|\mathbf{f}_n\| \quad (12)$$

本式の物質時間微分は次式で与えられる。

$$\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t = \dot{R}\mu \|\mathbf{f}_n\| + R\dot{\mu} \|\mathbf{f}_n\| + R\mu \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n \quad (13)$$

ここに、

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{f}_n}{\|\mathbf{f}_n\|}, \quad \mathbf{t} \equiv \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|} \quad (14)$$

式(13)に式(8)を代入し、式(12)はスカラー関数であることに留意すれば、次式を得る。

$$\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t = \dot{R}\mu \|\mathbf{f}_n\| + R\dot{\mu} \|\mathbf{f}_n\| + R\mu \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n \quad (15)$$

(3) 摩擦係数および正規すべり比の発展則

静止摩擦から動摩擦への遷移現象および時間経過に伴う静止摩擦の回復現象に代表される時間依存性すべり摩擦現象を表現するため、著者らは次のような仮定に基づき正規すべり面の発展則を規定している²⁶⁾。

1) 静止摩擦から動摩擦への摩擦抵抗の低下は、塑性すべりによる正規すべり面の収縮によると仮定する。
 2) すべり停止後の時間経過に伴う摩擦抵抗の回復は、接触法線応力の作用下での表面突起のクリープ変形による正規すべり面の膨張によると仮定する。
 したがって、本研究では、摩擦係数に上記の発展則を適用する。

$$\dot{\mu} = -\kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m \|\bar{\mathbf{v}}^p\| + \eta \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n \quad (16)$$

ここに、 μ_s および μ_k ($\mu_s \geq \mu_k$) はそれぞれ静止摩擦および動摩擦における μ 値である。また、 κ および m は塑性すべりに伴う軟化速度を規定する材料定数、 η および n は時間経過に伴う硬化速度を規定する材料定数で一般に絶対温度の関数であると考えられる。式 (16) は履歴依存性と速度依存性が競り合う形となっており、Rice や Ruina ら^{12),32)} による詳細なフレームワークの発展形であることがわかる。

他方、実測結果によれば、塑性すべりが進行するとき、接線接触応力は、まず弾性的に増大し、その後、正規すべり面に漸近すると考えられる。そこで、正規すべり比の発展則として次式を仮定する。

$$\dot{R} = U \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \quad \text{for} \quad \bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0} \quad (17)$$

ここに、 U は、次の条件を満たす R の単調減少関数である。

$$\left. \begin{array}{ll} U = +\infty & \text{for} \quad R = 0 \\ U = 0 & \text{for} \quad R = 1 \\ (U < 0 & \text{for} \quad R > 1) \end{array} \right\} \quad (18)$$

式 (18) を満たす最も単純な関数は次式で与えられる。

$$U = -r \ln R \quad (19)$$

ここに、 r は材料定数である。本発展則により、これまでに指摘されている、接触表面では微視的な弾塑性変形を起こしている起伏（コールドウェルド）が存在し、これが局所的にとどまらない非線形接触挙動を生じることを合理的に表現可能である。

以上より、すべり下負荷面に関する適応条件は、式 (15) および (17) より、次式で与えられる。

$$\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t = U \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \mu \|\mathbf{f}_n\| + R \dot{\mu} \|\mathbf{f}_n\| + R \mu \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n \quad (20)$$

(4) 接触応力速度－すべり速度式

次のすべり流動則を仮定する。

$$\bar{\mathbf{v}}^p = -\lambda \mathbf{t} \quad (\lambda > 0) \quad (21)$$

ここに、 λ は正值の比例係数である。本研究では、一次元的なすべりに着目したモデル化を行っているため、相対変位に関するダイレイタンス^{26),29)~31)}を考慮していない。しかし、スティック・スリップ運動におけるピッチングやローリング挙動を考慮する場合には、二次元あるいは三次元的な変位挙動を考慮したより一般的なすべり流動則が必要となる。

式 (20) に式 (16) および (21) を代入することにより、塑性すべり速度の大きさを規定する比例係数 λ は次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t - R \|\mathbf{f}_n\| \eta \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n - R \mu \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n}{-R \|\mathbf{f}_n\| \kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m + U \mu \|\mathbf{f}_n\|} \quad (22)$$

他方、式 (6)、(7) および (16) を式 (20) に代入して、次式を得る。

$$\begin{aligned} & -\alpha_t \mathbf{t} \cdot (\bar{\mathbf{v}}_t - \bar{\mathbf{v}}_t^p) \\ & = -\alpha_n R \mu \mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{v}}_n - \bar{\mathbf{v}}_n^p) + U \|\bar{\mathbf{v}}^p\| \mu \|\mathbf{f}_n\| \\ & + R \left\{ -\kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m \|\bar{\mathbf{v}}^p\| + \eta \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n \right\} \|\mathbf{f}_n\| \end{aligned} \quad (23)$$

本式は、式 (4) および (21) により、次のように表し得る。

$$\begin{aligned} & -\alpha_t \{ (\mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \lambda \} \\ & = -\alpha_n R \mu \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} + U \lambda \mu \|\mathbf{f}_n\| \\ & + R \left\{ -\kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m \lambda + \eta \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n \right\} \|\mathbf{f}_n\| \end{aligned} \quad (24)$$

これより、正值の比例係数 λ をすべり速度で表したものを Λ と記せば、これは次式で与えられる。

$$\Lambda = \frac{(\alpha_n R \mu \mathbf{n} - \alpha_t \mathbf{t}) \cdot \bar{\mathbf{v}} - \eta R \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n \|\mathbf{f}_n\|}{\alpha_t + U \mu \|\mathbf{f}_n\| - R \kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m \|\mathbf{f}_n\|} \quad (25)$$

式 (3)-(7)、(21) および (25) より、接触応力速度－すべり速度関係は次式で表される。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^{ep} \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{C}^c \mathbf{t} \quad (26)$$

ここに、

$$\mathbf{C}^{ep} \equiv \mathbf{C}^e - \frac{\alpha_t \mathbf{t} \otimes (\alpha_n R \mu \mathbf{n} - \alpha_t \mathbf{t})}{\alpha_t + U \mu \|\mathbf{f}_n\| - R \kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m \|\mathbf{f}_n\|} \quad (27)$$

$$\mathbf{C}^c \equiv \frac{\alpha_t \eta R \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n \|\mathbf{f}_n\|}{\alpha_t + U \mu \|\mathbf{f}_n\| - R \kappa \left(\frac{\mu}{\mu_k} - 1 \right)^m \|\mathbf{f}_n\|} \quad (28)$$

塑性すべり速度の負荷基準は、比例係数 Λ の正値性により次式で与えられる²⁶⁾。

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{v}}^p \neq \mathbf{0} : \Lambda > 0 \\ \bar{\mathbf{v}}^p = \mathbf{0} : \Lambda \leq 0 \end{array} \right\} \quad (29)$$

前項で概説した、摩擦係数自体を時間やすべり変位、あるいはすべり速度の関数とする定式化では、式 (26) のような関係を導出できない。対して、本定式化では摩擦係数の発展則をすべり速度と時間の関数として与えているため、一般的な境界値問題にも適用可能な接触応力速度－すべり速度関係式が得られる。

なお、本時間依存性摩擦モデルのパラメータの物理的意味やその決定法については、付録を参照されたい。

3. 解析モデルおよび条件

本研究では、図-1(a)に示すような、質量 M のスライダと剛性 K のバネからなるすべり方向のみの自由度を有する一次元バネモデルを用いて、スティック・スリップ運動の解析を行う。したがって、一定の法線応力作用下での非回転の直線すべり現象に属するため、

$$\bar{v}_n = 0, f_n = \text{const.}, \Omega = 0$$

となる。なお、スライダの見かけの接触面積は単位面積としている。

図-1のモデルにおけるドライバの変位を u_t とするとバネの伸びは $u_t - \bar{u}_t$ となり、スライダの接線方向の運動方程式は次式で与えられる。

$$M\bar{a}_t = K(u_t - \bar{u}_t) + f_t \quad (30)$$

ここに、 $\bar{a}_t$ および $\bar{u}_t$ は、それぞれスライダの加速度および変位であり、固定台との相対的な量に相当する。また、摩擦力 f_t は式(26)を積分していくことで算定される。以下では、対象としている問題の性質と記述の煩雑さを避けるため、スライダの加速度 $\bar{a}_t$ 、速度 $\bar{v}_t$ および変位 $\bar{u}_t$ とドライバの変位 u_t 、摩擦力 f_t の下添え字 $()_t$ を省略する。

式(30)のような運動方程式の解の性質をみるため、運動の安定性に関するバネ定数に必要な条件の理論的な解析も行われているが^{32)~35)}、条件によっては適用できない場合もある。したがって、数値計算法を用いて、運動方程式を解くことは有効な手段の一つであるといえる。また、このような方法は一次元のみならず、有限要素法のような有限の自由度の問題に対しても応用できる。本研究では、既往の研究^{33),34)}を参照して、代表的な直接積分法である Newmark の β 法を応用して時間方向離散化を行い、運動方程式を解く。

時刻 $t + \Delta t$ のスライダの速度および変位は、次式で与えられる。

$$\bar{u}^{t+\Delta t} = \bar{u}^t + \Delta t \bar{v}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \bar{a}^t + \beta \Delta t^2 (\bar{a}^{t+\Delta t} - \bar{a}^t) \quad (31)$$

$$\bar{v}^{t+\Delta t} = \bar{v}^t + \frac{\Delta t}{2} (\bar{a}^t + \bar{a}^{t+\Delta t}) \quad (32)$$

ここに、 Δt は時間増分、 $()^{t+\Delta t}$ および $()^t$ は時刻 $t + \Delta t$ および t における各物理量の値を意味する。ここで、式(26)を考慮すると、時刻 $t + \Delta t$ の運動方程式(30)は、一次近似を適用することで次のように表し得る。

$$M\bar{a}^{t+\Delta t} + K\bar{u}^{t+\Delta t} = K u^{t+\Delta t} + (f^t + \Delta t C^{ep} \bar{v}^{t+\Delta t} + \Delta t C^c) \quad (33)$$

解析ではドライバによるバネの駆動速度 $v(u^{t+\Delta t} = \int_{t=0}^{t+\Delta t} v dt)$ を入力値として採用していることから、式(31)および(32)を式(33)に代入することで、次の時刻 $t + \Delta t$ の加速度 $\bar{a}^{t+\Delta t}$ が求まる。

$$\bar{a}^{t+\Delta t} = \frac{K u^{t+\Delta t} + f^t - K \{ \bar{u}^t + \Delta t \bar{v}^t + (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 \bar{a}^t \}}{M + K \beta \Delta t^2 - \frac{\Delta t^2}{2} C^{ep}} + \frac{C^{ep} (\Delta t \bar{v}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \bar{a}^t) + C^c \Delta t}{M + K \beta \Delta t^2 - \frac{\Delta t^2}{2} C^{ep}} \quad (34)$$

式(34)を式(31)および(32)に代入することで、時刻 $t + \Delta t$ のスライダの速度および変位が求まり、また、式(26)より摩擦力も算出される。これらの作業を逐次行うことで、図-1(a)のモデルにおけるスティック・スリップ運動が得られる。ここで、パラメータ β の値を $1/6$ とした線形加速度法も頻繁に利用されているが、本研究で行った予備的な検討によると解析結果は β の影響をそれほど受けなかったため、本研究では無条件安定性を保証する $\beta = 1/4$ を採用している。

スティック・スリップ運動の摩擦力や変位の振幅量は、次の条件のとき、減少することが実験で確認されている^{1)~3),17)~24)}。

- a) ドライバの駆動速度 v の増加
- b) バネ係数 K の増加
- c) スライダの質量 M の減少
- d) 減衰係数 C の増加

したがって、次節ではこれらの動的特性に加え、時間依存性下負荷面摩擦モデルのパラメータを変化させて提案解析手法の妥当性およびスティック・スリップ運動の安定性について検討を行う。なお、解析に用いるモデル(図-1(a)参照)は、系の減衰を考慮していないため、d) に関しては検討外とする。

4. 解析結果および検討

4.1 時間依存性下負荷面モデルの応答特性

まず、時間依存性下負荷面モデルの応答特性について説明する。計算に当たって、既往の実験結果^{17)~24),27)}を定性的に再現し得るように、材料パラメータを以下のように選ぶ。

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_s = 0.4, \quad \mu_k = 0.2, \\ \alpha_n &= \alpha_t = 1000 \text{ kPa/mm}, \quad r = 1000 \text{ mm}^{-1}, \\ \kappa &= 10 \text{ mm}^{-1}, \quad m = 1, \quad \eta = 0.002 \text{ s}^{-1}, \quad n = 1, \\ f_n &= 10 \text{ kPa} \end{aligned}$$

ここに、 μ_0 は摩擦係数の初期値である。本研究では、先に述べたように摩擦係数の法線応力依存性を無視した Coulomb の摩擦基準が適用できる範囲の圧力下での運動を対象とし、また、接触面の融解が起こらず、動摩擦特性の温度依存性がそれほど顕著に現れない範囲でのすべり速度(数 100 mm/s 以下)を対象としていることから、静止・動摩擦係数ともに一定値として与えている。

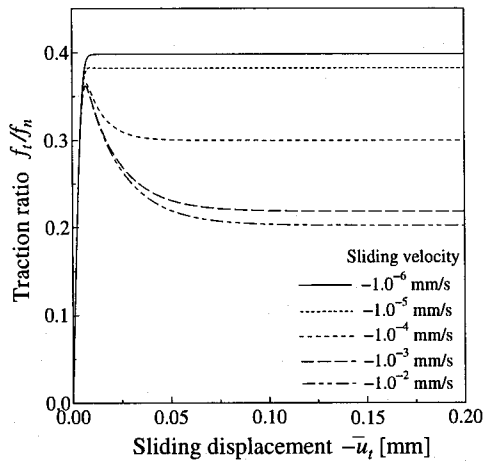


図-3 動摩擦への遷移過程

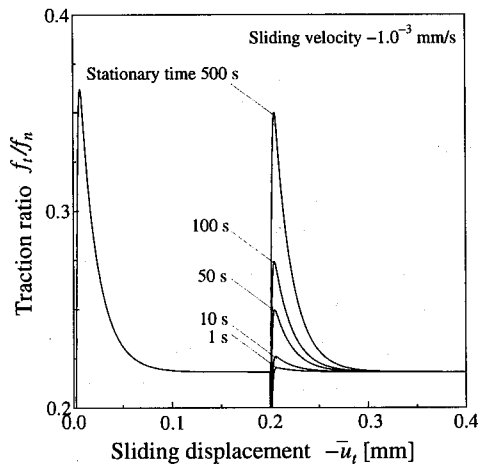


図-4 静止摩擦の回復過程

図-3に、種々の接線すべり速度について、一定の法線応力の下で一定のすべり速度を与えた際の接線すべり変位 $\bar{u}_t$ と接触応力比（法線接触応力に対する接線接触応力の比） f_t/f_n の関係を示す。接線接触応力の最大値つまり静止摩擦応力および最低値つまり動摩擦応力は、接線すべり速度 $\bar{v}_t$ の増加とともに低下する様子が確認できる。また図-4に、図-3と同様の条件で一旦すべらせて動摩擦に達した後に接線接触応力を除荷し、一定時間経過した後に再びすべりを与えた際の、静止摩擦の回復に対するすべり停止後の時間経過の影響を示している。停止時間が長い程、回復が進む状況が表現されている。以上の図から確認できるように、本摩擦モデルにより、基本的な時間依存性すべり摩擦現象を统一的に表現可能である。

4.2 スティック・スリップ運動

ここでは、ピンテスト（カンチレバー）型の摩擦試験、定常状態のブレーキシシステムおよび地震時のプレートなどの運動を模擬した、3節で述べた典型的な一次元バネモデルを用いて、ドライバの駆動速度 v を一定とした場合のスティック・スリップ運動について検討を

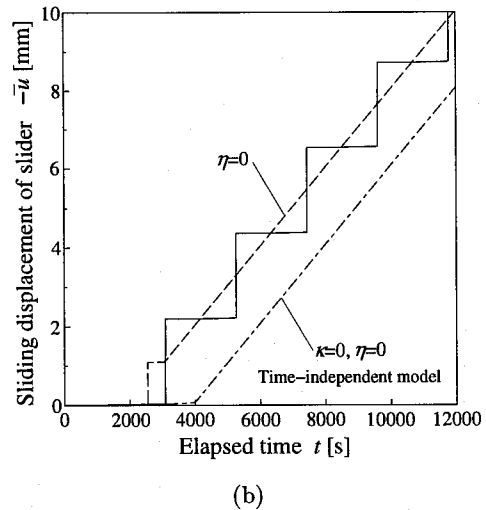
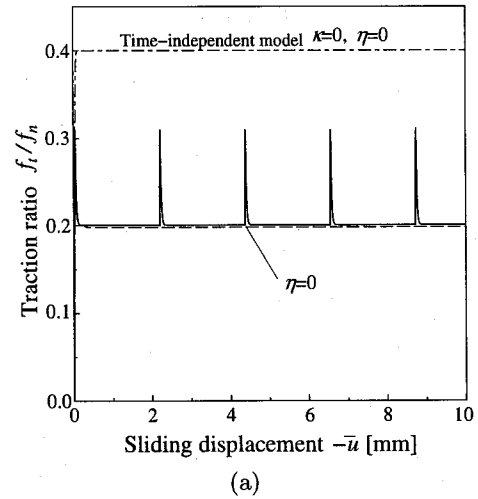


図-5 スティック・スリップ運動の解析結果：(a) 接触応力比-相対変位関係；(b) 相対変位-時間関係

行う。本条件はスティック・スリップ運動のベンチマーク的な解析であり、これまでも多くの報告がなされている^{10)~13),20),22)~24),27),32)~35)}。

以下のようなパラメータの下で計算した、スティック・スリップ運動における接触応力比 f_t/f_n -相対変位 $\bar{u}$ 関係および相対変位 $\bar{u}$ -時間 t 関係を図-5(a)および(b)に示す。ここに、パラメータの値は、既往の研究を参照して^{17)~24),27)}、同程度のスティック・スリップ振幅量になるように設定している。

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_s = 0.4, \quad \mu_k = 0.2, \\ \alpha_n &= \alpha_t = 1000 \text{ kPa/mm}, \quad r = 100 \text{ mm}^{-1}, \\ \kappa &= 10 \text{ mm}^{-1}, \quad m = 1, \quad \eta = 0.002 \text{ s}^{-1}, \quad n = 1, \\ M &= 10 \text{ kg}, \quad K = 10 \text{ N/mm}, \quad v = 0.001 \text{ mm/s} \end{aligned}$$

図より、調和振動などを入力値としなくても、時間依存性下負荷面摩擦モデルを用いた本解析方法によると、図-1に示した一定の駆動速度の下での典型的なスティック・スリップ運動を再現できることがわかる。また、図には摩擦係数の発展則以外のパラメータが同じ場合で、 $\eta = 0$ および $\kappa = \eta = 0$ とした場合の解析結果も併せ

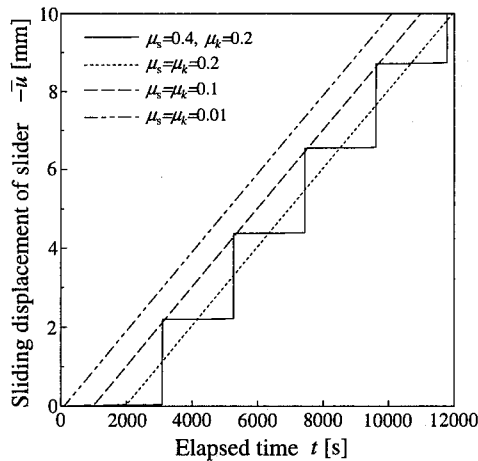


図-6 潤滑の効果の表現

て示している。 $\eta = 0$ とした場合は静止摩擦から動摩擦への遷移過程のみを考慮した摩擦モデル、 $\kappa = \eta = 0$ の場合は従来の時間非依存モデル²⁶⁾にそれぞれ相当するが、これらのモデルではスティック・スリップ運動を再現できないことが確認できる。

また、スティック・スリップ運動を抑制するために、実際の機械要素において潤滑材が使用されているが、その効果を単純化した場合、 $\mu_s \rightarrow \mu_k$ と等価であると仮定できる。図-6に、図-5と同じ条件において、 $\mu_s = \mu_k$ とした場合の相対変位-時間関係の結果を示している。スティック・スリップ運動が抑制されていることから、本モデルにより、広く認められた潤滑材の効果も再現可能であることがわかる。

図-7は、4種類のパネ定数 K の下でのドライバの駆動速度 v に対するスティック・スリップ運動時の接触応力比の振幅 $(f_t^{\max} - f_t^{\min})/f_n$ の関係を示したものである。ここに、他のパラメータについては図-5の場合と同じものを採用しており、 $f_t^{\max}$ および $f_t^{\min}$ はそれぞれ運動過程の接線応力の最大値および最小値である。図より、パネ定数によらず、ドライバの駆動速度が増加すると接触応力比の振幅量は減少し、安定なすべり状態になることがわかる。また、パネ定数の増加とともに、安定なすべり状態に遷移し易い。次に、パネ定数一定 $K = 10 \text{ N/mm}$ の下で、4種類のスライダの質量 M を設定してその影響について見てみると、図-8に示すように、質量の増加とともにスティック・スリップ運動時のすべり変位の振幅が増加している様子が再現されている。また、スライダの質量によらず、駆動速度 v の増加とともに振幅量が減少している。これらの特性は、これまでの実験的な研究でも示されており^{1)-3),17)~24),27)}、本研究で新たに提案した手法により、スティック・スリップ運動について評価可能であることがわかる。

以上の結果から、系の動的特性がスティック・スリップ運動の安定性に及ぼす影響を再現できることが確認された。そこで、パネ定数 K と駆動速度 v について、

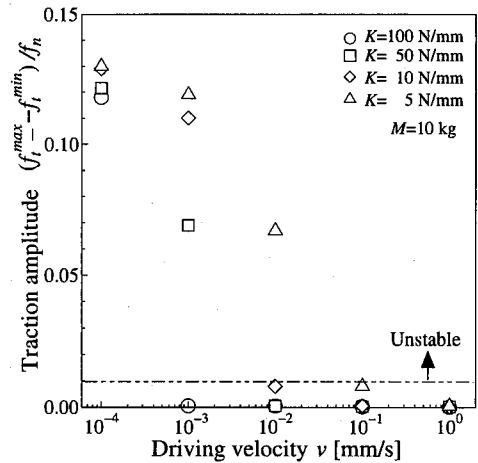


図-7 スティック・スリップ運動に対するパネ係数 K の影響

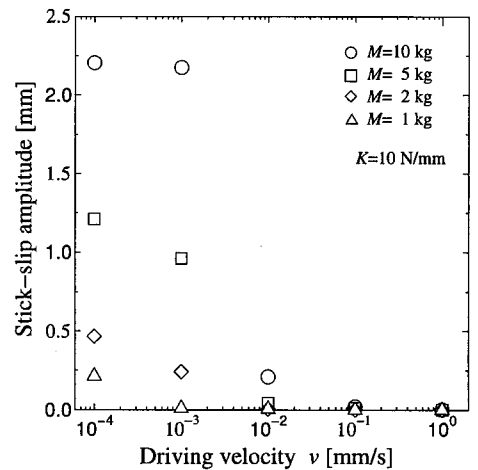


図-8 スティック・スリップ運動に対するスライダの質量 M の影響

スティック・スリップ運動の安定性に関するモードマップを作成してみる。

これまでも理論的な検討により^{12),27),32)~35)}、安定すべりモードと不安定すべりモードを分ける限界パネ定数 K_{cr} が駆動速度 v の関数として算定されている。しかし、その解析には、静止摩擦から安定的な摩擦状態に移行するまでの臨界すべり変位量が必要となる。したがって、内部変数とその変化を用いてすべり摩擦挙動を記述している本摩擦モデルでは、理論的に限界パネ定数 K_{cr} を導くことは困難となる。そこで、本研究ではこれまで多数報告されている実験結果を参照しつつ、まず、実用性を考慮して摩擦係数差 $\Delta\mu = \mu_s - \mu_k$ を用いた次式のクライテリオンを定義する。

$$\frac{f_t^{\max} - f_t^{\min}}{f_n} \leq \frac{\mu_s - \mu_k}{e} \quad (35)$$

ここに、 e は振幅の低下量を示す安定性の基準値である。簡易的に上式を満たす場合の運動を安定すべりと定義し、境界を設定することですべりモードを判定する。 $e = 20.0$ とした場合の境界線を図-7に2点鎖線で示す。また、図-9(a)および(b)は質量 $M=10$ および

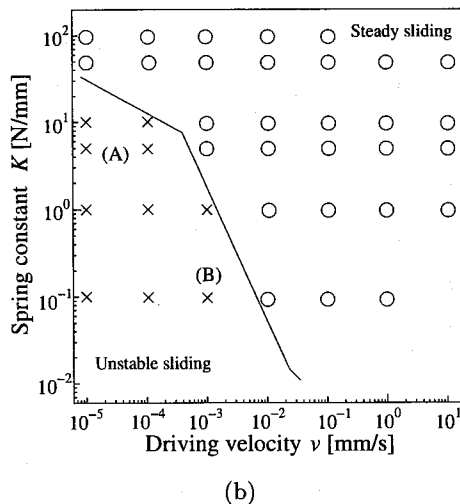
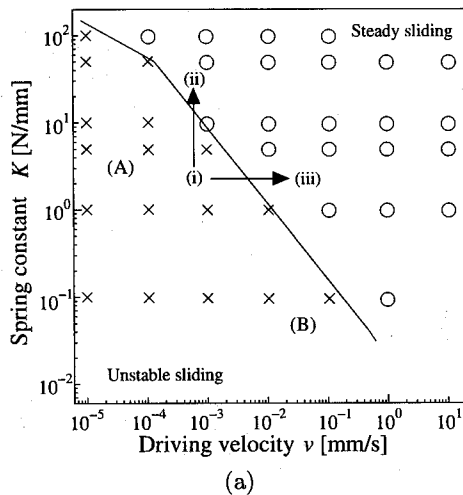


図-9 ($K-v$) 平面におけるスティック・スリップ運動のモードマップ: (a) $M = 10$ kg; (b) $M = 2$ kg

2 kg の場合における、バネ定数と駆動速度に対する安定すべりモード (○) とスティック・スリップ振幅が大きな不安定すべりモード (×) を式 (35) を用いて整理したものである。ここに、摩擦モデルのパラメータは図-5 と同様である。これらのモードマップからわかるように、安定領域と不安定領域は ($K-v$) 平面を完全に二分しており、それぞれのモードが混在することはない。また、モードの境界を実線でトレースしているが、これは実測値や理論解の傾向と良く一致している (17)~(24), (27)。他方、図-9(a) と (b) のモードの境界を比較してみると、質量が小さくなるほど不安定モードを呈する領域が小さくなることからわかる。

すべりモードが不安定から安定へと遷移する場合、スティック・スリップ運動の程度がどのように変化しているかを確認するため、図-10 に、図-9(a) 内に示した (i) → (ii) と (i) → (iii) へとバネ定数と駆動速度を変化させた場合の相対変位-時間関係を示す。バネ定数を大きくした場合 ((i) → (ii)) では、時間経過に対する運動量の変化はほぼ等しく、スティック・スリップの振幅が小さくなることで安定すべりモードへと遷移している様

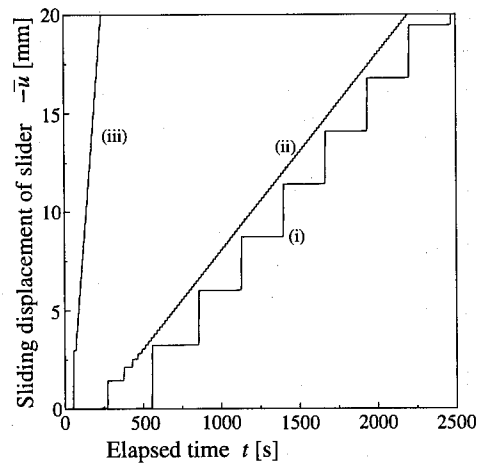


図-10 スティック・スリップ運動の遷移

子がわかる。対して、駆動速度を大きくした場合 ((i) → (iii)) では、時間経過に対する運動量の増加量が大きくなり、また、すべり速度が増加することから静止摩擦が十分に回復することができないため、安定すべりモードを呈する様子がわかる。このように、系の動的特性に依存したすべりモードの遷移には注意が必要であり、そのスティック・スリップ運動の程度は動的特性 M/K (あるいは固有振動数 $\sqrt{K/M}$) を用いて特徴付けられることがわかる。

次に、すべりモードのクライテリオンについて理論的な考察を行う。不安定なすべりモードは、動摩擦の負の速度依存性および静止摩擦の回復に誘起されることから、動摩擦に達した後の挙動について注目する。本研究で採用している時間依存性摩擦モデルでは、停止したか否かのすべり速度の判定が不必要であり、常に摩擦負荷に対するすべりを許容し得るが、ここでは、単純に動摩擦に達した後での完全に停止した状態を考える。したがって、摩擦係数の回復速度は式 (16) より、 $\|\dot{v}^p\| = 0$ として次式で与えられる。

$$\dot{\mu} = \eta \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s}\right)^n \quad (36)$$

停止した時刻 τ_0 から時刻 τ_1 間のすべり初めにおける安定的なすべりモードは、慣性フリーの状態ではバネの駆動力が静止摩擦を上回る場合に現れると考えられるため、時刻 τ_0 から τ_1 間で次式を満たすとき、系のすべりは安定状態となる。

$$K \int_{\tau_0}^{\tau_1} u^t dt > f_n \int_{\tau_0}^{\tau_1} \eta \left(1 - \frac{\mu}{\mu_s}\right) dt \quad (37)$$

式 (37) のクライテリオンを用いてすべりモードの安定性を判断する場合の模式図を図-11 に示す。ここに、ケース (a) では、摩擦係数の回復がバネの駆動力の増加よりも遅いため、安定的なすべりモードを呈し、ケース (b) では、摩擦係数の回復速度がバネの駆動力速度を上回るため、系は不安定なすべりモードに陥る。

図-12 には、図-9(a) の $K = 10$ N/mm, $v =$

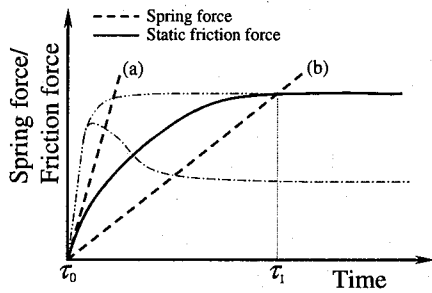


図-11 スティック・スリップ運動の安定性に関する模式図

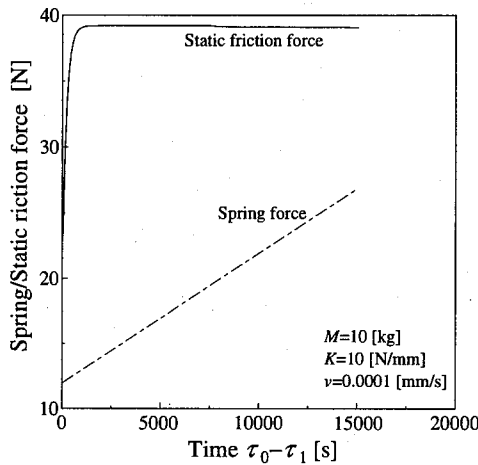


図-12 不安定すべりモードの駆動力と静止摩擦の回復の関係

1.0^{-4} mm/s の条件における動摩擦に達した後の摩擦係数の回復とバネの駆動力の経時変化を示したものである。式 (37) のクライテリオンとすべりモードが対応している様子がわかる。

Baumberger ら²⁰⁾, Oancea と Laursen³⁴⁾ は図 9 に示した ($K-v$) 平面におけるモードマップの不安定すべり領域は、図中の (A) と (B) で示すように、さらに二つの性質に起因する領域に分けられることを示唆している。これらは、クリープ領域 (creep region) および慣性領域 (inertial region) と称され、それぞれ駆動速度が遅い場合の領域 (A) および速い場合の領域 (B) に対応している。著者らが調べた範囲では、各領域を明確に分類する手段は、現在のところ提案されていないが、図 9 のようにすべりモードの境界線の勾配が変化することと関連付けられている。これらの領域のうち、振動負荷を受ける機械要素や地震時の構造物の最適設計においては、慣性領域が特に重要となる。しかし、通常、不安定すべりモードにおけるクリープ領域と慣性領域の境界は、系の動的特性 M/K のみならず、すべり摩擦特性の時間および履歴依存性にも影響を受けると考えられるため、それらを併せて境界の検討を行う必要がある。

そこで、クリープ領域と慣性領域の明確な境界の決定方法について議論する前段階として、クリープ領域において、スティック・スリップ運動の変化に対する時

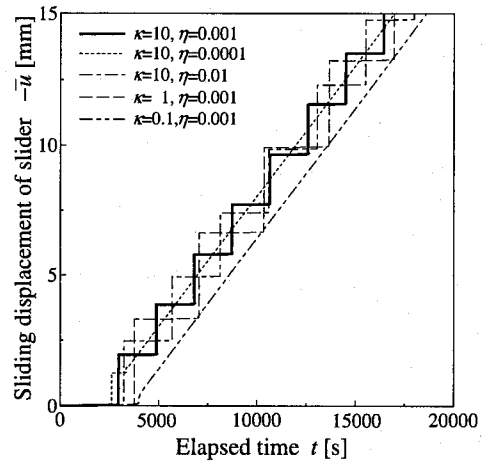


図-13 時間依存性すべり摩擦挙動に対するすべりの振幅-時間関係の変化

間依存性すべり摩擦挙動を規定する摩擦係数の発展則のパラメータの影響について調べてみる。ここに、クリープ領域として、すべりモードの境界付近の $M = 10$ kg, $K = 10$ N/mm および $v = 1.0^{-3}$ mm/s の図-9(a) に示した系の動的特性を採用している。また、時間依存性下負荷面摩擦モデルの材料定数を図-9 と同様に以下のように設定し、

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_s = 0.4, \quad \mu_k = 0.2, \\ \alpha_n &= \alpha_t = 1000 \text{ kPa/mm}, \quad r = 100 \text{ mm}^{-1}, \\ m &= 1, \quad n = 1, \end{aligned}$$

κ と η を変化させて検討を行う。

図-13 に、時間依存性すべり摩擦挙動の変化に対するクリープ領域におけるすべりの振幅-時間関係を示す。図より、静止摩擦の回復速度を規定する材料定数 η が小さくなると、すべりモードは不安定から安定へと遷移することがわかる。逆に η が大きくなると、スティック・スリップ運動の振幅が大きくなる。また、動摩擦への遷移過程を規定する材料定数 κ が極端に小さい場合 ($\kappa=0.1 \text{ mm}^{-1}$)、摩擦係数の負の速度依存性が弱くなるため、すべりモードは不安定から安定へと遷移するが、動摩擦への遷移過程を規定する材料定数 κ が小さく、かつ、 η とのバランスが取れた場合 ($\kappa=1 \text{ mm}^{-1}$)、スティック・スリップ運動の振幅および周期はより大きくなる。したがって、静止から動摩擦への遷移速度と静止摩擦の回復速度のどちらか一方が小さい（あるいは、大きい）とき、スティック・スリップ運動の安定性は増すが、それらの大小にかかわらず、互いの速度のバランスが取れたとき、逆に不安定性が増大する場合があることが示唆されている。

以上より、スティック・スリップ運動の安定性の議論には、系の動的特性 M/K に加え、すべり摩擦挙動の時間依存性および履歴依存性を考慮することが不可欠であることがわかる。このことは、図-11 に鎖線で示している摩擦係数の時間変化の特性が変わること、す

べりモードが遷移することからも理解できる。例えば、摩擦係数の回復速度の勾配を規定する指数パラメータ n が大きくなるとすべりモードは不安定となり（2点鎖線）、逆に、摩擦係数が回復過程に塑性すべりが生じる場合はすべりモードは安定へと遷移する（1点鎖線）。したがって、式(37)を拡張した新たなクライテリオンを提案することは困難だと考えられるため、式(35)の簡易クライテリオンと本研究で提案した数値解析手法の併用は、スティック・スリップ運動の検討において有効な手段の一つであると考えられる。

5. 結 言

本研究では、時間依存性下負荷面摩擦モデルを導入した一次元バネ-質点系モデルを用いて、スティック・スリップ運動の数値解析を行った。その結果、提案した数値計算手法により、スティック・スリップ運動に関する既往の実験結果を定性的に表現可能であることを示した。また、二つのすべりモードのクライテリオンを提案するとともに、スティック・スリップ運動の安定性の議論には、系の動的特性とすべり摩擦挙動の時間依存性および履歴依存性を同時に考慮する必要があることを示した。今後、すべり摩擦挙動に起因したすべりモードの遷移について系統的な解析を行うとともに、実測値や理論解析値との比較を通して、スティック・スリップ運動の安定性に関するより詳細な検討を行う予定である。

6. 付 録 1

時間依存性下負荷面摩擦モデルのパラメータの物理的意味およびその決定法の一覧を以下に示す。これらのパラメータはこれまでに多数報告されている摩擦試験結果^{1)~3),17)~24)}から容易に決定し得る。

μ_s : 静止摩擦係数 (無次元) ;

すべり停止後に長期間放置した際のピーク摩擦力から決定。

μ_k : 動摩擦係数 (無次元) ;

大きなすべり速度ですべらせた際の最小摩擦力から決定。

κ : 動摩擦への遷移過程のすべり距離を規定 (長さ⁻¹) ;
静止摩擦から動摩擦への遷移過程の実験結果から同定。

m : 動摩擦への遷移過程の勾配を規定 (無次元) ;
静止摩擦から動摩擦への遷移過程の実験結果から同定。

η : 静止摩擦の回復速度を規定 (時間⁻¹) ;
動摩擦から静止摩擦への回復過程の実験結果から同定。

n : 静止摩擦の回復の勾配を規定 (無次元) ;

動摩擦から静止摩擦への回復過程の実験結果から同定。

r : 接触応力とすべり変位関係の滑らかさを規定 (長さ⁻¹) ;

接触面の状態に依存する現象論的なパラメータであり、単調および繰返し摩擦実験結果から同定。ある程度のオーダーを守れば、計算結果にそれほど影響を与えず、数値計算の安定性が向上する。

α : 摩擦に関する弾性定数 (圧力/長さ) ;

界面の圧縮試験より材料の弾性特性として決定²⁷⁾。また、境界値問題への制約条件の導入方法としてペナルティ法を採用する場合はペナルティ係数に相当する。その際には、要素辺のオーダーを考慮しつつ、十分に大きな値 ($10^{-6} \sim 10^{-9}$) とすれば良い。下負荷面の概念により、接線方向の特性には本質的な影響を及ぼさない。

参考文献

- 1) Bowden F. P. and Leben, L.: The nature of sliding and the analysis of friction, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A169, pp.371-391, 1939.
- 2) Bowden, F. P. and Tabor, D.: *The friction and lubrication of solids*, Clarendon Press, Oxford, 1950.
- 3) Rabinowicz, E.: *The intrinsic variables affecting the stick-slip process*, *Proc. Phys. Soc.*, Vol.71, pp.668-675, 1958.
- 4) Eadie, D. T., Santoro, M. and Kalousek, J.: *Railway noise and the effect of top of rail liquid friction modifiers: changes in sound and vibration spectral distribution in curves*, *Wear*, Vol.258, pp.1148-1155, 2005.
- 5) Jayakumar, T., Mukhopadhyay, C. M., Venugopal, S., Mannan, S. L. and Raj, B.: *A review of the application of acoustic emission techniques for monitoring forming and grinding processes*, *J. Mater. Process. Technol.*, Vol.159, pp.48-61, 2005.
- 6) Meziane, A., D'Errico, S., Baillet, L. and Laulagnet, B.: *Instabilities generated by friction in a pad-disc system during the braking process*, *Tribology Int.*, Vol.40, pp.1127-1136, 2007.
- 7) Wensrich, C. M.: *Experimental behaviour of quaking in tall silos*, *Powder and Technology*, Vol.127, pp.87-94, 2002.
- 8) Muite, B. K., Quinn, S. F., Sundaresan, S. and Rao, K. K.: *Silo music and silo quake: granular flow-induced vibration*, *Powder Technology*, Vol.145, pp.190-202, 2004.
- 9) Brace, W. F. and Byerlee, J. D.: *Stick slip as a mechanism for earthquakes*, *Science*, Vol.153, pp.990-993, 1966.
- 10) Dieterich, J. J.: *Time-dependent friction in rocks*, *J. Geophys. Res.*, Vol.77, pp.3690-3697, 1972.
- 11) Dieterich, J. H.: *Modeling of rock friction, 1. Experimental results and constitutive equations*, *J. Geophys. Res.*, Vol.84, pp.2161-2168, 1979.
- 12) Ruina, A. L.: *Slip instability and state variable friction laws*, *J. Geophys. Res.*, Vol.88, pp.359-370, 1983.
- 13) Dieterich, J. H. and Kilgore, B. D.: *Direct observation of frictional contacts: New insights for state-dependent properties*, *PAGEOPH*, Vol.143, pp.283-302, 1994.
- 14) Sholz, C. H.: *Earthquakes and Friction Laws*, *Nature*, Vol.391, pp.37-39, 1998.

- 15) Schmacher, R. T. and Garoff, S.: *Bowing with a glass bow*, *CAS Journal*, Vol.3, pp.9-17, 1996.
- 16) Smith, J. H. and Woodhouse, J.: *The Tribology of rosin*, *J. Mech. Physics of Solids*, Vol.48, pp.1633-1681, 2000.
- 17) Brockley, C.A. and Davis, H.R.: *The time-dependence of static friction*, *J. Lubr. Tech. (ASME)*, Vol.90, pp.35-41, 1968.
- 18) Kato, S., Sato, N. and Matsubayashi, T.: *Some considerations on characteristics of static friction of machine tool sideways*, *J. Lubr. Tech. (ASME)*, Vol.94, pp.234-247, 1972.
- 19) Richardson, R.S.H. and Noll, H.: *Surface friction under time-dependent loads*, *Wear*, Vol.37, pp.87-101, 1976.
- 20) Baumberger, T., Heslot, F. and Perrin, B.: *Crossover from creep to inertial motion in friction dynamics*, *Nature*, Vol.367, pp.544-547, 1994.
- 21) Ferrero, J.F. and Barrau, J.J.: *Study of dry friction under small displacements and near-zero sliding velocity*, *Wear*, Vol.209, pp.322-327, 1997.
- 22) Berthoud, P. and Baumberger, T.: *Physical analysis of the state- and rate- dependent friction law: Static friction* *Phys. Rev. B*, Vol.59, pp.14 313-14 327, 1999.
- 23) Baumberger, T. and Berthoud, P.: *Physical analysis of the state- and rate- dependent friction law, II. Dynamic friction* *Phys. Rev. B*, Vol.60, pp.3928-3939, 1999.
- 24) Bureau, L., Baumberger, T., Caroli, C. and Ronsin, O.: *Low-velocity friction between macroscopic solids*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Series IV, Different faces of Tribology, Different faces of Tribology*, Vol.2, pp.699-707, 2001.
- 25) Rossouw, P. W., Kamelchuk, L. S. and Kusy, R. P.: *A fundamental review of variables associated with low velocity frictional dynamics*, *Seminars in Orthodontics*, Vol.9, pp.223-235, 2003.
- 26) Hashiguchi, K. and Ozaki, S.: *Constitutive equation for friction with static-kinetic friction transition*, *J. Appl. Mech., JSCE*, Vol.9, pp.503-511, 2006.
- 27) Oden, J.T. and Martinez, J.A.C.: *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.52, pp.527-634, 1986.
- 28) Kikuchi, N. and Oden, J.T.: *Contact problem in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods*, *SIAM, Philadelphia.*, 1988.
- 29) Mroz, Z. and Stupkiewicz, S.: *Constitutive model of adhesive and ploughing friction in metal-forming processes*, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.40, pp.281-303, 1998.
- 30) Wriggers, P.: *Computational contact mechanics*, *J. Wiley, Chichester*, 2003.
- 31) Hashiguchi, K., Ozaki, S. and Okayasu, T.: *Unconventional friction theory based on the subloading surface concept*, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.41, pp.1705-1727, 2005.
- 32) Rice, J. R. and Ruina, A. L.: *Stability of steady frictional slipping*, *J. Appl. Mech., ASME*, Vol.50, pp.343-349, 1983.
- 33) Laursen, T. A. and Oancea, V. G.: *On the constitutive modeling and finite element computation of rate dependent frictional sliding in large deformations*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.143, pp.197-227, 1997.
- 34) Oancea, V. G. and Laursen, T. A.: *Stability analysis of state dependent dynamic frictional sliding*, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol.32, pp.837-853, 1997.
- 35) Rice, J. R. and Lapusta, N. and Ranjith, K.: *Rate and State dependent friction and the stability of sliding between elastically deformable solids*, *J. Mech. Physics of Solids*, Vol.49, pp.1865-1898, 2001.

(2007 年 4 月 12 日 受付)