

有限高さを持つ六角形ハニカムコア材の面内等価弾性定数

In-plane Equivalent Elastic Moduli for a Hexagonal Honeycomb Core with Finite Height

陳 玳行*・尾崎伸吾**

Dai-Heng CHEN and Shingo OZAKI

*工博 東京理科大学教授 工学部機械工学科 (〒162-8601 東京都新宿区神楽坂一丁目3番地)

**農博 東京理科大学助教 工学部機械工学科 (〒162-8601 東京都新宿区神楽坂一丁目3番地)

In this paper, the effect of height of the hexagonal honeycomb core on the equivalent elastic moduli is studied by using numerical results of the finite element method. For honeycomb core subjected to in-plane loading, there exist deformations in the height direction for cell walls due to the effect of Poisson's ratio. Since these deformations are different for adjacent walls if they are not joined together along the common edge, the in-plane stiffnesses should be analyzed as a three-dimensional problem, in which the deformations in the height direction are considered. Based on this fact, an equation to calculate elastic moduli from their values under the plane strain condition is proposed. Then, the validity of the present formula for elastic moduli is verified comparing with the numerical results by the finite element method.

Key Words : Honeycomb core, Equivalent moduli, Height effect, FEM In-plane deformation

1. 緒 言

ハニカム材は機械/構造物の軽量化および高剛性化などの高性能ニーズに応え得る先端複合材料として注目されており、その正確な弾性定数の解析が必要不可欠となっている。周期セル状構造体であるハニカム材の強度評価を行う際、セル構造の影響を考慮した等価弾性定数を用いることで仮想的に均質な平板と見なし、効率的な解析を行う場合がある。この等価弾性定数に関する理論的な研究はこれまで多数行われており^{1)~4)}、その中に解析方法について体系的にまとめた Gibson と Ashby による著書⁵⁾もある。しかし、これらの研究では、実際には三次元構造体であるハニカム材の面外方向の高さの影響を無視して二次元問題として扱っており、高さが等価弾性定数に及ぼす影響は依然として解明されていない。斯様な状況の下、Becker^{6),7)} および Chen と Davalos⁸⁾ は、ハニカムコアと面板から構成されたサンドイッチ材に対して、その面内弾性定数に及ぼすハニカムコアの高さの影響について検討を行い、高さを考慮に入れたハニカム材の面内等価弾性定数の近似式を提案している。ただし、これらの研究はコアの高さ方向に沿った変形を仮定することで、面板がハニカムコアの変形に及ぼす影響を拘束条件として導入しており、ハニカムコアのみの場合に対して、その高さの影響を考慮に入れた等価弾性定数に関する理論的研究はほとんど見当たらない。

そこで本研究では、図1(a)に示すような六角形セルが周期的に並んで構成された、図1(b)に示すようなハニカムコアに対して、その面内等価弾性定数の理論解析を行う。まず、縦セル壁垂直方向に注目して、有限要

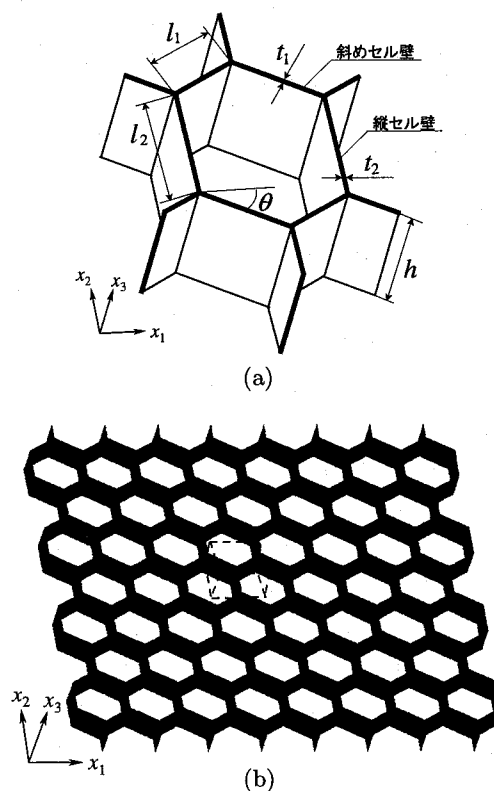


図-1 ハニカムコア材：(a) 幾何形状；(b) 全体図

素法の解析結果に基づきハニカムコアの高さがその面内等価弾性定数に影響を及ぼす原因について検討するとともに、高さを考慮したハニカムコア材の面内等価弾性定数の理論解析手法を提案する。次に、提案した手法を縦セル壁垂直方向の縦弾性定数 E_1 、縦セル壁方向の縦弾性定数 E_2 およびポアソン比 ν_{12} (または ν_{21})

の解析に適用し、高さの影響を考慮した各面内等価弾性定数の理論式を提案する。

解析モデルでは、図1(a)に示すように、ハニカムコアの高さを h とし、六角形セルの形状を辺の長さ l_1 , l_2 および斜めセル壁の角度 θ で表し、セル壁の厚さを t_1 , t_2 とする。また、ハニカムコアの構成材料は等方均質材で、その縦弾性定数を E_s 、ポアソン比を ν_s とする。

2. 縦セル壁垂直方向の弾性定数 E_1 について

本節では、縦セル壁垂直(x_1)方向の等価縦弾性定数 E_1 について、既存の理論式と有限要素解析結果との比較を行い、ハニカムコアの高さが等価弾性定数に及ぼす影響を明らかにする。また、高さの影響を考慮した六角形ハニカムコア x_1 方向の弾性定数 E_1 の解析方法について説明する。

2.1 有限要素法による E_1 の解析方法

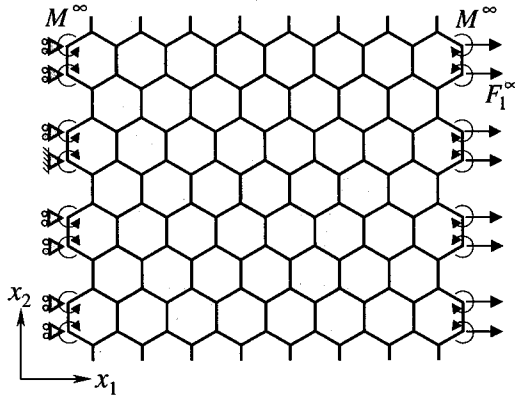


図-2 弾性定数 E_1 の解析モデル

本研究では、有限要素法汎用コード“MSC. Marc⁹⁾”による数値解析結果を用いて、ハニカムコアの面内等価弾性定数について検討を行う。具体的な x_1 方向の弾性定数 E_1 の解析方法としては、図2に示すような x_1 方向に8個、 x_2 方向に7個並んだセルで構成される解析モデルを用い、遠方から一様な x_1 方向の引張り応力 σ_1^∞ を作用させて検討を行う。ここに、解析対象のハニカムコアは、検討するコア高さによって高さ方向と幅方向の分割数は異なるが、各セル壁を均質な200個の長方形の4節点双一次厚肉シェル要素を用いて離散化している。

図2には、一様な x_1 方向の引張り応力 σ_1^∞ を作用させる際の境界条件も併せて示している。本研究では、解析モデルが、 x_1 , x_2 方向ともにセルが無数にある無限大のハニカムコアの一部であると想定している。したがって、図2では、一様な x_1 方向の引張り応力 σ_1^∞ を生じさせるために、左右両端の各セル角部に単位長さ辺り（以下、密度と称す） F_1^∞/h の x_1 方向の力

$$F_1^\infty = \sigma_1^\infty (l_2 + l_1 \sin \theta) h$$

および密度 M^∞/h のモーメント

$$M^\infty = \sigma_1^\infty \frac{l_1 \sin \theta (l_2 + l_1 \sin \theta)}{2} h$$

を高さ方向に沿って分布させる。以上の条件で数値解析を行うと、モデル全体はほぼ一様に x_1 方向に伸び、右端部の各荷重点の x_1 方向の伸びの最大相対誤差は0.05%以下となる。よって、本研究では解析精度を高めるために、それらの伸びの平均値である平均伸び $\bar{\delta}_1$ を用いて、六角形セルの x_1 方向の縦弾性定数 E_1 を以下のように定める。

$$E_1 = \sigma_1^\infty \frac{16(l_1 \cos \theta)}{\bar{\delta}_1}$$

なお、本研究では要素分割数を細分化した際に、要素サイズが解析結果に及ぼす影響についても検討を行い、応力、変位などの解析結果の相対誤差は0.5%以内に収まることを確認している。したがって、以下では先に述べた分割数で検討を進める。

2.2 コア高さが弾性定数 E_1 に及ぼす影響

図1に示した六角形のセルから構成されるハニカムコアの x_1 方向の縦弾性定数 E_1 に対して、GibsonとAshby⁵⁾は二次元問題として解析を行い、コア高さ h による影響を考慮しない場合の E_1 の算定式を次式のように提案している。

$$E_1 = E_s \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta \left[(l_2/l_1) + \sin \theta \right]} \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^3 \quad (1)$$

一般に、ハニカムコア全体の変形は、図1(b)内の点線で示すような一つのユニットの変形を通じて検討できる。図3は、遠方で一様な引張り応力 σ_1^∞ を受けるときの、ユニットを構成する各セル壁ABCD, A'B'CDおよびCDEFが接合端部で受けている力とモーメントを示したものである。ここに、 (ξ, η, ζ) は、各セル壁の長さ方向を ξ 軸、高さ方向を η 軸、厚さ方向を ζ 軸とし、原点が板の中心にある局所座標系である。このとき、セル壁CDEFは力を受けていないが、セル壁ABCDとA'B'CDは、図3に示すように $\xi = \pm l_1/2$ の両縁で密度

$$T = (l_2 + l_1 \sin \theta) h \sigma_1^\infty \quad (2)$$

の x_1 方向の力および密度

$$M_\eta = \frac{l_1 h (l_2 + l_1 \sin \theta) \sin \theta}{2} \sigma_1^\infty \quad (3)$$

η 方向のモーメントを受ける。したがって、ユニットを構成する各セル壁の曲げ変形を考慮すれば、式(1)が得られる。他方、セル壁が厚い場合には、曲げ変形に加えて、セル壁のせん断変形および引張り変形の影響を考慮しなければならない。これによって、縦弾性定

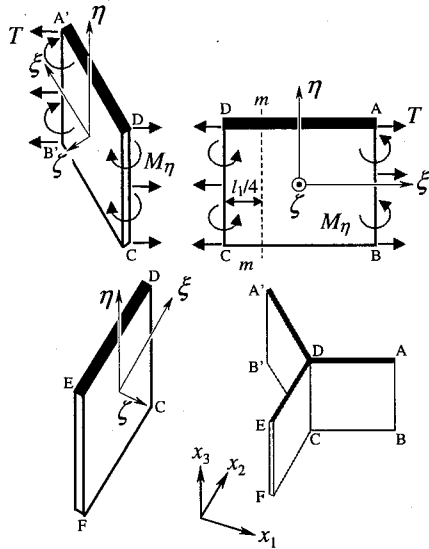


図-3 x_1 方向の応力 σ_1^∞ を受けるセル壁のメカニクス

数 E_1 の算定式は次式のように与えられる^{1)~5)}。

$$E_1 = E_s \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta \left[\frac{l_2}{l_1} + \sin \theta \right]} \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^3 \times \frac{1}{\left[1 + \left(2(1 + \nu_s) + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^2 \right]} \quad (4)$$

$t_1 = t_2 = t$, $l_1 = l_2 = l$, $\theta = 30^\circ$ の正六角形のセルから構成されたハニカム材について、有限要素解析で求めた弾性定数 E_1 と式 (1) で求めた理論値 $E_1|_{Eq.(1)}$ との比を図 4 に示す。図には、式 (4) により求めた E_1 の理論値も示している。図からわかるように、ポアソン比 ν_s がゼロであれば、ハニカムコアの高さに関係せず、有限要素解析で求めた E_1 の値は式 (4) で求めた理論値とよく一致する。しかし、ポアソン比がゼロではない場合、例えば図中に示した $\nu_s = 0.3$ のときには、 E_1 の値はハニカムコアの高さ h によって異なり、式 (4) で求めた理論値と一致しない。また、その差はハニカムコアの高さ h とともに大きくなる。このことは、ポアソン比がゼロでない場合、ハニカムコアの等価弾性定数を正確に評価するためには、高さによる影響を考慮しなければならないことを意味する。

次に、図 4 の場合と同じ幾何形状を有するハニカムコア材について、図 5 および 6 を用いて、コアの高さ h が等価弾性定数に影響を及ぼす原因を検討する。

一例として、図 5 に、 $h/l = 0.5$ および $t/l = 0.05$ のハニカムコアに対して、遠方で一様な応力 σ_1^∞ を受ける際のセル壁 ABCD の $m-m$ 断面 (図 3 参照) における高さ方向の応力 σ_η の分布を示す。ハニカムコアの面内変形を二次元問題として扱う場合には、 η 方向には応力 σ_η が発生しないと仮定しているが⁵⁾、図 5 からわかるように、セル壁には η 方向、すなわち高さ方向の応力 σ_η が存在する。ここで、応力 σ_η の発生原因について詳細に検討してみる。いま、遠方で一様な応力

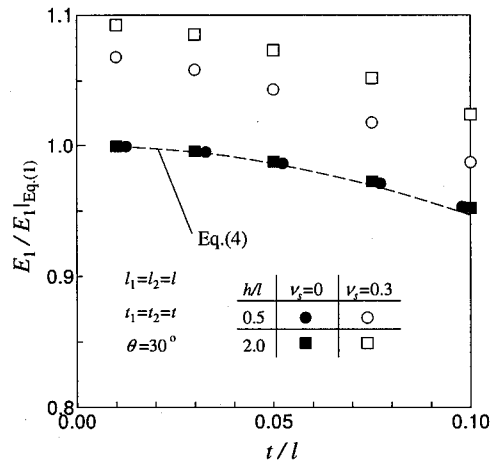


図-4 有限要素解析と式 (4) で得られた弾性定数 E_1 の比較

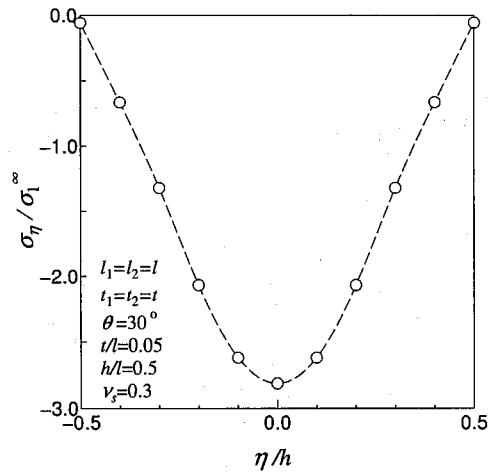


図-5 セル壁 ABCD の $m-m$ 断面における応力 σ_η の分布

σ_1^∞ を受ける場合を考えると、壁 ABCD と CDEF に生じる ξ 方向の引張り応力はそれぞれ

$$\sigma_\xi|_{ABCD} = \frac{\sin \theta (l_2 + l_1 \sin \theta)}{t_1} \sigma_1^\infty \quad (5)$$

$$\sigma_\xi|_{CDEF} = 0$$

となり、応力 $\sigma_\xi|_{ABCD}$ と $\sigma_\xi|_{CDEF}$ は互いに等しくならない。また、実際には三次元問題であるため、各セル壁は ξ 方向に伸びると同時にポアソン比 ν_s の影響によって η にも縮む。このため、もし、壁 ABCD と CDEF が接合部を無視して η 方向に自由に変形できるとすれば、 η 方向のひずみ ε_η はそれぞれ異なってしまうが、各セル壁は共通の辺 CD を持つため、変位の連続条件により接合部 CD でのひずみ ε_η は等しくなる。これによって、応力の乱れとして、先に示したような η 方向の応力 σ_η が生じると考えられる。さらに、これに伴い、セル壁 ABCD と CDEF のそれぞれの ξ 方向の伸び変形も応力 σ_η の影響を受け、二次元モデルで求めた場合と異なってしまう。したがって、有限要素解析により求めた x_1 方向の弾性定数 E_1 が二次元問題の理論式 (4) と異なる原因としては、各セル壁がポアソン効果によって高さ方向にも変形するが、その変形が

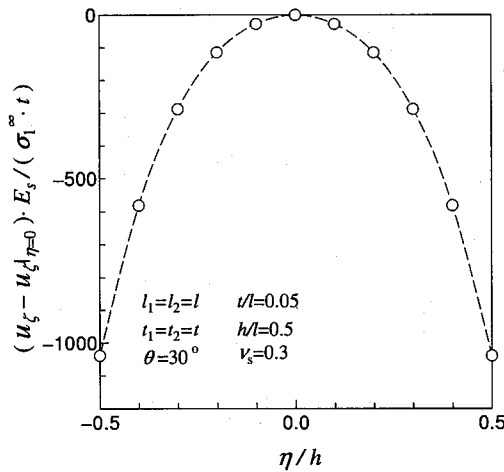


図-6 セル壁 ABCD の $m-m$ 断面における面外変位 u_ζ の分布

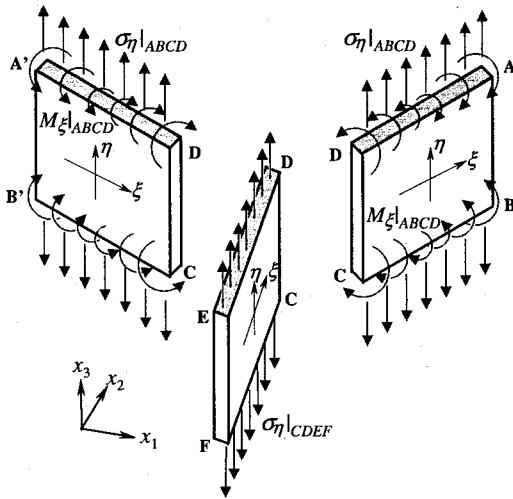


図-7 平面ひずみ条件を満足するためのハニカムコア上下端における荷重条件

隣り合う両セル壁で異なることが挙げられる。

図 6 は、図 5 と同様なハニカムコアに対して、遠方で一様な応力 σ_1^∞ を受ける際の、セル壁 ABCD の $m-m$ 断面における面外変位 u_ζ の分布を示すものである。図より、ポアソン効果によって面外変位 u_ζ は η 方向に沿って変化している様子がわかる。すなわち、セル壁 ABCD には図 3 に示すような曲げモーメントにより、セル壁の各断面上に曲げ応力 σ_ξ が生じ、さらにポアソン効果によって η 方向のひずみも生じる。また、曲げ応力 σ_ξ が高さ方向で変化するため、対応する η 方向のひずみ ε_η も高さ方向で変化する、その結果、図 6 のような曲げ変形となる。ただし、この曲げ変形も接合部 CD 辺で阻止されるため、応力の乱れが生じ、その結果、弾性定数 E_1 に影響を及ぼすことになる。

以上の議論からわかるように、ハニカムコアの面内等価弾性定数に及ぼす高さの影響は、ポアソン効果による η 方向の縮みおよび η 方向に沿う曲げ変形によるものと考えられる。このことを検証するため、いま、セル壁 ABCD および A'B'CD の $\eta = \pm h/2$ の上下端に

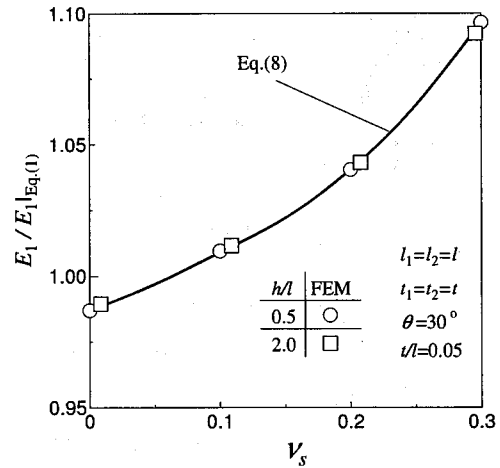


図-8 平面ひずみ条件下の弾性定数 E_2 の比較

図 7 に示すような応力およびモーメントを分布させ、これらの変形を防ぐことを考える。すなわち、セル壁 ABCD および A'B'CD に対して応力 $\sigma_\eta|_{ABCD}$

$$\sigma_\eta|_{ABCD} = \nu_s \frac{(l_2 + l_1 \sin \theta) \cos \theta}{t_1} \sigma_1^\infty \quad (6)$$

および密度

$$M_\xi|_{ABCD} = M_0 \frac{2\xi}{l}, \quad M_0 = -\nu_s \frac{l_1(l_2 + l_1 \sin \theta) \sin \theta}{2} \sigma_1^\infty \quad (7)$$

の ξ 方向のモーメントを分布させ、一様な x_1 方向の引張り応力 σ_1^∞ を受けるハニカムにおいて、 η 方向のひずみがゼロとなるよう強制的に平面ひずみ条件を再現する。ただし、壁 CDEF に対しては応力 $\sigma_\xi = 0$ であるため、応力 σ_η を作用させる必要がない。図 8 に、図 2 の境界条件に加え、式 (6) および (7) のような応力およびモーメントをセル壁の上下端に分布させた状態に対して、有限要素解析で求めた弾性定数 E_1 を示す。図には、平面ひずみ条件下の理論弾性定数 $E_1|_p$ 、すなわち、式 (4) において E_s を $E_s/(1-\nu_s^2)$ で、 ν_s を $\nu_s/(1-\nu_s)$ で置き換えて得た次式

$$E_1|_p = E_s \frac{\cos \theta}{(1-\nu_s^2) \sin^2 \theta \left[\frac{(l_2/l_1) + \sin \theta}{1} \right]} \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^3 \times \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2}{1-\nu_s} + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^2 \right]} \quad (8)$$

により求めた値も併せて示している。図からわかるように、高さやポアソン比に関係せず、有限要素解析で求めた平面ひずみ条件下での E_1 の値は、式 (8) で求めた $E_1|_p$ の値とよく一致している。これは、ハニカムの各セル壁における η 方向の縮みおよび η 方向に沿う曲げ変形がない場合、弾性定数 E_1 は平面ひずみ条件の式 (8) で評価でき、先に述べた弾性定数に及ぼす高さの影響およびその原因が正しいことを意味している。

2.3 コア高さの影響を考慮した縦セル壁垂直方向の弾性定数 E_1 を求める方法

上述の結果より、ハニカムコアの各セル壁における高さ方向の変形がなければ、平面ひずみ条件下での等価弾性定数 E_1 を式 (8) によって精度良く評価できることが確認された。そこで、平面ひずみ条件下での x_1 方向の弾性定数 $E_{1|p}$ から、上下両端が応力自由条件下での有限高さを持つハニカムコアの弾性定数 E_1 を求めることを考える。そのためには、セル壁 ABCD および A'B'CD の上下端に分布した図 7 の応力 σ_η およびモーメント M_ξ を除荷し、ハニカムコアを平面ひずみ条件から応力自由の条件にする際に生じる、外力による仕事と内部のひずみエネルギーの変化とのつり合いに基づいて、弾性定数 E_1 を求めればよい。具体的には、外力の仕事と内部ひずみエネルギーの変化量を等値することによって、平面ひずみの条件下と応力自由条件下での x_1 方向の平均ひずみの差 $\Delta \varepsilon_1$ から、次式を用いて弾性定数 E_1 を算出可能となる。

$$\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_{1|p}} = \frac{\Delta \varepsilon_1}{\sigma_1^\infty} \quad (9)$$

セル壁 ABCD に分布させた応力 $\sigma_\eta|_{ABCD}$ を除荷する際の外力の仕事 $W_1|_{ABCD}$ は

$$W_1|_{ABCD} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_\eta^2|_{ABCD}}{E_s} l_1 h t_1 \quad (10)$$

で評価できる。また、セル壁 ABCD に作用させた密度 M_ξ のモーメントを除荷する際の外力の仕事 $W_2|_{ABCD}$ は

$$W_2|_{ABCD} = 2 \times \left(\int_{-l_1/2}^{l_1/2} -\frac{1}{2} M_\xi \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \bigg|_{\eta=h/2} d\xi \right) \quad (11)$$

で評価できる。なお、セル壁 CDEF に分布する応力 $\sigma_\eta|_{CDEF}$ はゼロなので、 $W_1|_{CDEF} = 0$ となる。さらに、このような除荷において、図 3 に示したユニットは x_1 方向にも伸びることを考慮せねばならない。その伸びは、ハニカムコアの各セル壁の $\eta = \pm h/2$ の上下両端に応力自由の条件下での平均ひずみ ε_1 と図 7 のような応力が上下両端に作用する場合、すなわち平面ひずみ条件下での平均ひずみ $\varepsilon_{1|p}$ との差で評価できる。よって、除荷時の σ_1^∞ による仕事 W^∞ は

$$W^\infty = \sigma_1^\infty (\varepsilon_1 - \varepsilon_{1|p}) V \quad (12)$$

で求まる。ここに、 V はユニットの体積であり、

$$V = (2l_1 \cos \theta)(l_2 + l_1 \sin \theta)h \quad (13)$$

で与えられる。

他方、これらの外力の仕事によってユニット内のひずみエネルギーは増加し、その増加量 ΔE は

$$\Delta E = \left(\frac{\sigma_1^\infty \varepsilon_1}{2} - \frac{\sigma_1^\infty \varepsilon_{1|p}}{2} \right) V \quad (14)$$

である。

外力の仕事が内部ひずみエネルギーの増加に等しい

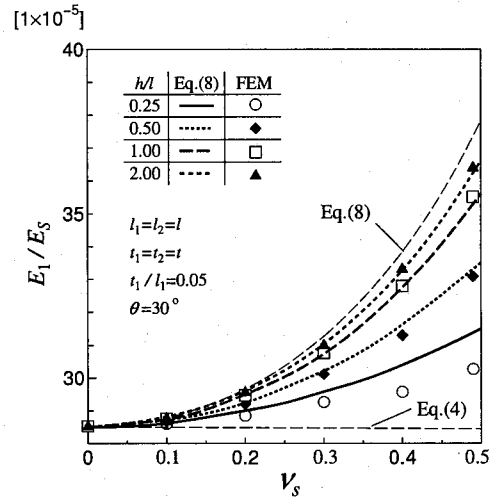


図-9 正六角形ハニカムコアにおける弾性定数 E_1 とポアソン比 ν_s の関係

ことにより、次式が得られる。

$$\Delta E = W^\infty + W_1|_{CDEF} + 2 \times (W_1|_{ABCD} + W_2|_{ABCD}) \quad (15)$$

式 (10) ~ (12) および (14) を式 (15) に代入し、式 (9) を考慮すれば、上下両端で応力自由の条件下での x_1 方向の弾性定数 E_1 を計算するための次式が得られる。

$$\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_{1|p}} = \frac{\nu_s^2 [(l_2/l_1) + \sin \theta]}{E_s (t_1/l_1)} \times \left\{ \cos \theta + \frac{6(1 - \nu_s^2) \sin^2 \theta}{\pi^3 (t_1/l_1)^2 (h/l_1) \cos \theta} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{H_{m1}}{m^3} \right) \right\} \quad (16)$$

ここに、

$$H_{m1} = \frac{2 \sinh^2 \alpha_{m1}}{A} \\ A = (1 - \nu_s) [(3 + \nu_s) \sinh \alpha_{m1} \cosh \alpha_{m1} - (1 - \nu_s) \alpha_{m1}] \\ \alpha_{m1} = \frac{m\pi h}{l_1} \quad (17)$$

である。また、式 (16) の中の級数項は、密度 M_ξ のモーメントがセル壁 ABCD の上下両端部に作用するときのセル壁上下両端部の回転角 $\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \bigg|_{\eta=h/2}$ に対応するものであり、その解析の詳細は、付録 1 を参照されたい。

2.4 理論弾性定数 E_1 の検証

提案した理論弾性定数 E_1 の検証を行う前に、先ず、式 (16) の級数項の近似精度への影響について述べる。本研究で検討している範囲内では、ハニカムの幾何形状によらず、 $m = 10$ 程度で弾性定数の値はほぼ収束することが確認された ($m = 100$ に対して 0.1% 以下の相対誤差)。したがって、以下では級数項を $m = 10$ までの和として近似した値を用い、提案した x_1 方向の理論弾性定数 E_1 の妥当性について検証を行う。

図 9 にセルが $t_1 = t_2 = t$, $l_1 = l_2 = l$, $\theta = 30^\circ$ の正六角形のハニカムコアに対して、厚さを $t/l = 0.05$ と

表-1 $t_2/t_1 = 2$ および $\theta = 30^\circ$, $l_1 = l_2$, $\nu_s = 0.3$ の六角ハニカムコアの弾性定数 E_1/E_s

t_1/l	h/l	FEM	Eq.(4)	Eq.(16) $m=10$	Eq.(16) $m=2$
0.01	0.25	2.41×10^{-8}	2.31×10^{-8} [-4.23%]	2.4×10^{-8} [-0.53%]	2.41×10^{-8} [-0.12%]
	0.50	2.47×10^{-8}	2.31×10^{-8} [-6.41%]	2.45×10^{-8} [-0.86%]	2.45×10^{-8} [-0.45%]
	1.00	2.51×10^{-8}	2.31×10^{-8} [-7.92%]	2.49×10^{-8} [-0.82%]	2.49×10^{-8} [-0.51%]
	2.00	2.52×10^{-8}	2.31×10^{-8} [-8.44%]	2.51×10^{-8} [-0.29%]	2.51×10^{-8} [-0.23%]
0.05	0.25	2.93×10^{-4}	2.85×10^{-4} [-2.84%]	2.96×10^{-4} [0.87%]	2.97×10^{-4} [1.28%]
	0.50	3.01×10^{-4}	2.85×10^{-4} [-5.54%]	3.02×10^{-4} [0.18%]	3.03×10^{-4} [0.39%]
	1.00	3.08×10^{-4}	2.85×10^{-4} [-7.47%]	3.07×10^{-4} [-0.24%]	3.07×10^{-4} [-0.13%]
	2.00	3.10×10^{-4}	2.85×10^{-4} [-8.15%]	3.10×10^{-4} [-0.09%]	3.10×10^{-4} [-0.04%]
0.10	0.25	2.22×10^{-3}	2.19×10^{-3} [-1.52%]	2.27×10^{-3} [2.08%]	2.28×10^{-3} [2.48%]
	0.50	2.28×10^{-3}	2.19×10^{-3} [-4.23%]	2.31×10^{-3} [1.32%]	2.32×10^{-3} [1.53%]
	1.00	2.34×10^{-3}	2.19×10^{-3} [-6.68%]	2.35×10^{-3} [0.32%]	2.35×10^{-3} [0.43%]
	2.00	2.37×10^{-3}	2.19×10^{-3} [-7.58%]	2.37×10^{-3} [0.18%]	2.37×10^{-3} [0.23%]

表-2 $\theta = 60^\circ$ および $t_1 = t_2$, $l_1 = l_2$, $\nu_s = 0.3$ の六角ハニカムコアの弾性定数 E_1/E_s

t/l	h/l	FEM	Eq.(4)	Eq.(16) $m=10$	Eq.(16) $m=2$
0.01	0.50	3.82×10^{-7}	3.57×10^{-7} [-6.43%]	3.71×10^{-7} [-2.81%]	3.73×10^{-7} [-2.40%]
	2.00	3.9×10^{-7}	3.57×10^{-7} [-8.45%]	3.89×10^{-7} [-0.28%]	3.89×10^{-7} [-0.24%]
0.05	0.50	4.7×10^{-5}	4.43×10^{-5} [-5.69%]	4.43×10^{-5} [0.06%]	4.71×10^{-5} [0.27%]
	2.00	4.83×10^{-5}	4.43×10^{-5} [-8.24%]	4.83×10^{-5} [-0.13%]	4.83×10^{-5} [-0.08%]
0.10	0.50	3.84×10^{-4}	3.47×10^{-4} [-9.59%]	3.68×10^{-4} [4.10%]	3.69×10^{-4} [4.13%]
	2.00	3.77×10^{-4}	3.47×10^{-4} [-7.84%]	3.77×10^{-4} [0.11%]	3.77×10^{-4} [0.17%]

し、高さをそれぞれ $h/l = 0.25, 0.5, 1.0, 2.0$ と変化させた場合の、有限要素解析と式 (16) で求めたそれぞれの弾性定数 E_1 とポアソン比 ν_s の関係を示す。また、図 9 には、式 (4) および (8) で求めたそれぞれの E_1 の値も併せて示している。図からわかるように、提案式 (16) で求めた弾性定数 E_1 の値は有限要素法による数値解析結果と良く一致し、特にハニカムコア高さ h/l が大きいほどその解析精度が高い。また、材料のポアソン効果を反映して、式 (16) で求めた弾性定数 E_1 の値はポアソン比 ν_s とともに大きくなるのに対して、式 (4) ではポアソン比によらずほぼ同じ値であり、ポアソン比が大きいほどその誤差が大きい。さらに、式 (16) は、高さ h/l の影響を反映して、 h/l が大きくなるに従い平面ひずみ条件下での弾性定数 E_{1p} (式 (8)) に近づく様子がわかる。

以下では、材料のポアソン比を $\nu_s = 0.3$ と固定し、六角形セル壁の寸法を系統的に変化させた場合に対する

式 (16) の有効性を検証する。 $t_1 = t_2$, $l_1 = l_2$, $\theta = 30^\circ$ 以外の幾何形状を有する六角形ハニカムコアに対して、例えば、 $t_2/t_1 = 2$ の場合を表 1 に、 $\theta = 60^\circ$ の場合を表 2 に、それぞれの x_1 方向の弾性定数 E_1/E_s の値を示す。これらの表には、実用面を考慮して式 (16) の級数項を $m = 2$ までの和で近似する場合の値も示し、また、有限要素法で求めた E_1/E_s の値に対する理論式 (4) および (16) の相対誤差を括弧 [] 中の数値で示している。表内の誤差からわかるように、検討しているハニカム幾何寸法の範囲内において、式 (4) では 5% 以上の誤差があるのに対して、式 (16) の誤差はほとんど 1% 以下である。また、式 (16) の級数項を $m = 2$ までの和として近似した弾性定数 E_1 の値も十分な精度で得られることがわかる。

3. 縦セル壁方向の弾性定数 E_2 について

本節では、前節と同様の手法に基づき、高さの影響を考慮した縦セル壁 (x_2) 方向の縦弾性定数 E_2 について説明する。

3.1 有限要素法による E_2 の解析方法

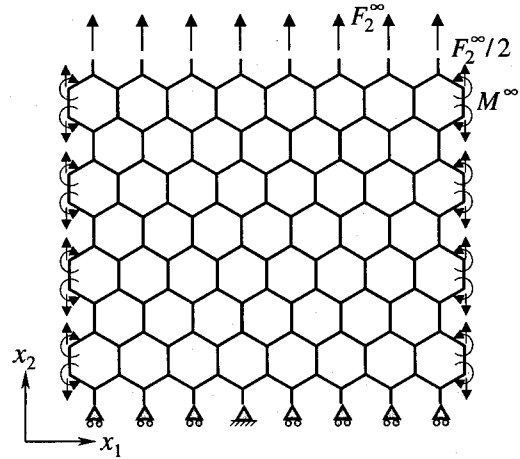


図-10 弾性定数 E_2 の解析モデル

x_2 方向の弾性定数 E_2 の解析には、弾性定数 E_1 の場合と同様の図 10 に示すようなセルで構成される解析モデルを用い、遠方から一様な x_2 方向の引張り応力 σ_2^∞ を作用させて検討を行う。図 10 には、一様な x_2 方向の引張り応力 σ_2^∞ を作用させるための境界条件も併せて示している。このとき、対象としている問題の x_2 方向に関する対称性から、上端部の各縦セル壁に次の密度 F_2^∞/h の力をコアの高さ方向に沿って分布させる。

$$F_2^\infty = \sigma_2^\infty (2l_1 \cos \theta \times h)$$

また、図 10 の解析モデルは、無限大のハニカムコア材の一部であることを考え、左右両端の各セル角部に密度 $F_2^\infty/2h$ の力および密度 M^∞/h のモーメントを高き

方向に沿って分布させる。ここに、

$$M^\infty = \sigma_2^\infty \frac{l_1^2 \cos^2 \theta}{2} h$$

以上の条件で解析を行うと、モデル全体はほぼ一様に x_2 方向に伸び、上端部の各荷重点の伸びの最大相対誤差は 0.05% 以下となる。各荷重点の伸びはほぼ同じであるが、本研究では解析精度を高めるために、それらの伸びの平均値 $\bar{\delta}_2$ を用いて、 x_2 方向の縦弾性定数 E_2 を次式のように定める。

$$E_2 = \sigma_2^\infty \frac{[8(l_2 + l_1 \sin \theta)]}{\bar{\delta}_2}$$

3.2 コア高さの影響を考慮した縦セル壁方向の弾性定数 E_2 を求める方法

x_2 方向の弾性定数 E_2 について、その解析方法は基本的に前節で示した弾性定数 E_1 を求める場合と同じであるため、ここでは主に結果のみを示す。

遠方で一様な引張り応力 σ_2^∞ を受けるときのハニカムコアの変形についても、図 11 に示すような 1 ユニットの構成するセル壁 ABCD, A'B'CD および CDEF の接合部で受けている力とモーメントを通じて解析できる。このとき、セル壁 ABCD は $\xi = \pm l_1/2$ の両縁で密度

$$Q = l_1 h \cos \theta \sigma_2^\infty \quad (18)$$

の x_2 方向の力および密度

$$M_\eta = \frac{l_1^2 h \cos^2 \theta}{2} \sigma_2^\infty \quad (19)$$

の η 方向のモーメントを受け、セル壁 CDEF は $\xi = \pm l_2/2$ の両縁で密度

$$2Q = 2l_1 h \cos \theta \sigma_2^\infty \quad (20)$$

の x_2 方向の力を受ける。

式 (18)~(20) の力とモーメントによるセル壁の曲げ変形を考慮すれば、ハニカムコアの弾性定数 E_2 に関する算定式は次式

$$E_2 = E_s \frac{(l_2/l_1) + \sin \theta}{\cos^3 \theta} \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^3 \quad (21)$$

となるが、セル壁が厚い場合、さらにセル壁のせん断変形および引張り変形を考慮する必要がある。これによって、弾性定数 E_2 の算定式は次式のようになる^{1)~5)}。

$$E_2 = E_s \frac{(l_2/l_1) + \sin \theta}{\cos^3 \theta} \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^3 \times \left[1 + \left(2(1 + \nu_s) + \tan^2 \theta + \frac{2(l_2/l_1)}{(t_2/t_1) \cos^2 \theta} \right) \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^2 \right] \quad (22)$$

図 12 は、式 (22) で求めた弾性定数 E_2 の理論値と、有限要素法による数値解析結果との比較を示すものである。図 12 に示すように、ポアソン比 ν_s がゼロでなけ

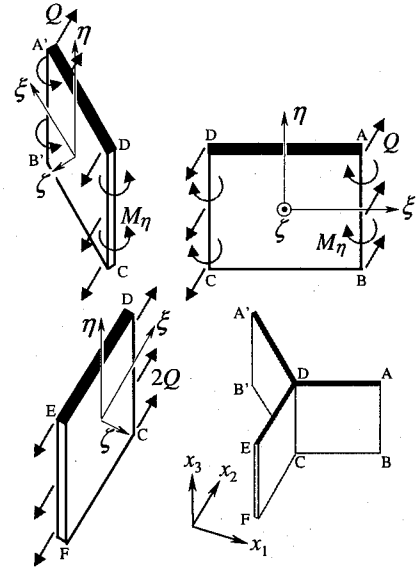


図-11 x_2 方向の応力 σ_2^∞ を受けるセル壁のメカニクス

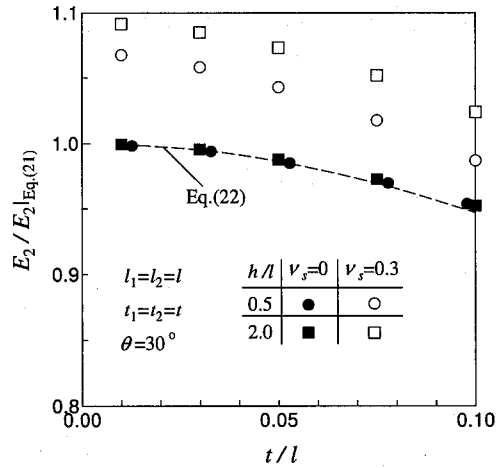


図-12 有限要素解析と式 (22) で得られた弾性定数 E_2 の比較

れば、有限要素解析で求めた E_1 の値はハニカムコアの高さ h によって異なり、式 (22) で求めた理論値と一致しない。そこで、図 7 と同様に、各セル壁の $\eta = \pm h/2$ の上下端に、 η 方向の変形を抑えるための応力およびモーメントを分布させ、その状態で一様な引張り応力 σ_2^∞ を作用させた場合の弾性定数 E_2 について検討してみる。

図 10 の境界条件に加え、セル壁 CDEF に対して応力 $\sigma_\eta|_{CDEF}$

$$\sigma_\eta|_{CDEF} = 2\nu_s \cos \theta \frac{l_1}{t_2} \sigma_2^\infty \quad (23)$$

を分布させ、壁 ABCD および A'B'CD に対して応力 $\sigma_\eta|_{ABCD}$

$$\sigma_\eta|_{ABCD} = \nu_s \sin \theta \cos \theta \frac{l_1}{t_1} \sigma_2^\infty \quad (24)$$

および密度

$$M_\xi|_{ABCD} = M_0 \frac{2\xi}{l}, \quad M_0 = \nu_s \frac{l_1^2 \cos^2 \theta}{2} \sigma_2^\infty \quad (25)$$

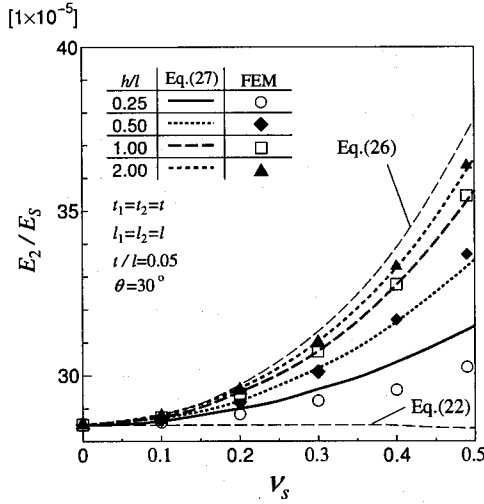


図-13 正六角形ハニカムコアにおける弾性定数 E_2 とポアソン比 ν_s の関係

の ξ 方向のモーメントを分布させた際の、有限要素解析で求めた弾性定数 E_2 は、 E_1 の場合と同様に、次式 (26) で求めた平面ひずみ条件の理論値 $E_{2|p}$ と良く一致する。

$$E_{2|p} = E_s \frac{(l_2/l_1) + \sin \theta}{(1 - \nu_s^2) \cos^3 \theta} \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^3 \times \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{1 - \nu_s} + \tan^2 \theta + \frac{2(l_2/l_1)}{(t_2/t_1) \cos^2 \theta} \right) \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^2} \quad (26)$$

ここに、上式は、式 (22) において E_s を $E_s/(1 - \nu_s^2)$ で、 ν_s を $\nu_s/(1 - \nu_s)$ で置き換えることで得られる。

したがって、前節と同様に、式 (26) によって求めた平面ひずみ条件下の弾性定数 $E_{2|p}$ から、上下両端で応力自由の条件下の弾性定数 E_2 を求めるために、セル壁 ABCD, A'B'CD および CDEF の上下両端に分布した応力 σ_η およびモーメント M_ξ を除荷し、その際に生じる外力による仕事と内部ひずみエネルギーのつり合い式 (9) に基づけば、弾性定数 E_2 を求めることができる。その結果、次式が得られる。

$$\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_{2|p}} = \frac{\nu_s^2 \cos \theta}{E_s [(l_2/l_1) + \sin \theta]} \times \left\{ \frac{2}{(t_2/l_2)} + \frac{\sin^2 \theta}{(t_1/l_1)} + \frac{6(1 - \nu_s^2) \cos^2 \theta}{\pi^3 (t_1/l_1)^3 (h/l_1)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{H_{m1}}{m^3} \right) \right\} \quad (27)$$

3.3 理論弾性定数 E_2 の検証

図 13 にセルが $t_1 = t_2 = t$, $l_1 = l_2 = l$, $\theta = 30^\circ$ の正六角形のハニカムコアに対して、厚さを $t/l = 0.05$ とし、高さをそれぞれ $h/l = 0.25, 0.5, 1.0, 2.0$ と変化させた場合の、有限要素解析と式 (27) で求めたそれぞれの弾性定数 E_2 とポアソン比 ν_s との関係を示す。また、

図 13 には、式 (22) および式 (26) で求めたそれぞれの E_2 の値も併せて示している。図からわかるように、本研究で提案した式 (27) で求めた x_2 方向の弾性定数 E_2 の値は有限要素法の解析結果と良く一致し、特にハニカムの高さ h/l が大きいほどその解析精度が高い。また式 (27) は、高さ h/l の影響を反映して、 h/l が大きくなるに従い、求めた弾性定数 E_2 の値は大きくなり、平面ひずみ条件下での弾性定数 $E_{1|p}$ に近づく。さらに、材料のポアソン効果を反映して、式 (27) で求めた弾性定数はポアソン比 ν_s とともに大きくなる。対して、式 (22) は、ポアソン比によらずほぼ同じ値であり、ポアソン比が大きいほどその誤差も大きくなる。

4. ポアソン比について

本節では、高さの影響を考慮した六角形ハニカムコアの等価ポアソン比について解析を行う。

遠方から一様な x_1 方向と x_2 方向の引張り応力 σ_1^∞ と σ_2^∞ を受けるハニカムコアに対して、そのポアソン比を ν_{12} , ν_{21} とした場合、それぞれの方向の平均ひずみ ε_1 , ε_2 は次式で評価できる。

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1^\infty - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_2^\infty \\ \varepsilon_2 = \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1^\infty - \frac{1}{E_2} \sigma_2^\infty \end{cases} \quad (28)$$

したがって、本節では、式 (28) の横方向弾性コンプライアンスを表す係数 $\frac{\nu_{12}}{E_1}$ と $\frac{\nu_{21}}{E_2}$ について検討を行う。また、理論的には次式

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (29)$$

が成り立つことから、本研究では $\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2 = \lambda$ として、横方向の弾性コンプライアンス λ について解析を行う。

4.1 有限要素法による λ の解析方法

有限要素解析では、これまでと同様の解析モデルを用いる。まず、遠方から一様な x_1 方向の引張り応力 σ_1^∞ を作用させ、有限要素法の数値解析によって求めた x_2 方向の平均ひずみ $\varepsilon_2|_{\sigma_1}$ を用いて、 ν_{12}/E_1 を次のように定める。

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = - \frac{\varepsilon_2|_{\sigma_1}}{\sigma_1^\infty} \quad (30)$$

同様に、遠方から一様な x_2 方向の引張り応力 σ_2^∞ を作用させ、有限要素法の数値解析によって求めた x_1 方向の平均ひずみ $\varepsilon_1|_{\sigma_2}$ を用いて、 ν_{21}/E_2 を次のように定める。

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = - \frac{\varepsilon_1|_{\sigma_2}}{\sigma_2^\infty} \quad (31)$$

有限要素解析で求めた ν_{12}/E_1 と ν_{21}/E_2 の値は、数値計算上の誤差はあるものの両者はほぼ等しく、その相対誤差は最大で 0.01% 以下である。ここで、数値解析

の精度を高めるために、弾性コンプライアンス λ に関する数値解析値としては、有限要素法で求めた ν_{12}/E_1 と ν_{21}/E_2 の値の平均値 $\frac{\nu_{12}/E_1 + \nu_{21}/E_2}{2}$ を用いる。

4.2 コア高さの影響を考慮した弾性コンプライアンス λ を求める方法

ハニカムコアの弾性コンプライアンスに関する解析方法は、2, 3 節で示した、弾性定数 E_1, E_2 を求める場合と基本的に同じであるため、ここでは主に結果のみを示す。

ハニカムコアを構成する各セル壁の曲げ変形によるハニカム全体の面内変形への効果のみを考慮する場合、弾性定数 λ は次式

$$\lambda = \frac{\sin \theta \cos \theta}{E_s} \left(\frac{l_1}{t_1} \right)^3 \quad (32)$$

ように評価されるが、さらにセル壁のせん断変形および引張り変形による効果を考慮すると、 λ の算定式は次式となる^{1)~5)}。

$$\lambda = \frac{\sin \theta \cos \theta}{E_s} \left(\frac{l_1}{t_1} \right)^3 \left[1 + \left\{ 2(1 + \nu_s) - 1 \right\} \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^2 \right] \quad (33)$$

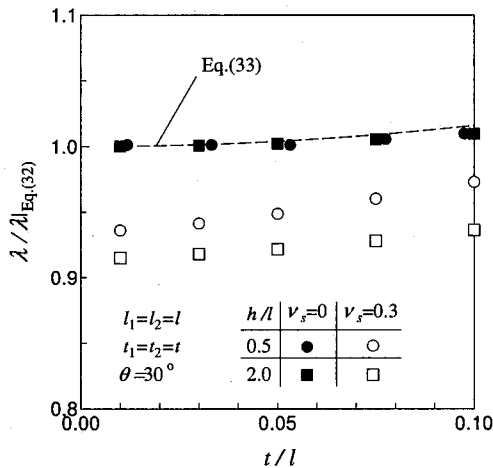


図-14 有限要素解析と式 (33) で得られた弾性コンプライアンス λ の比較

図 14 は、式 (33) で求めた弾性コンプライアンス λ の理論値と、有限要素解析で求めた値との比較を示すものである。図からわかるように、材料のポアソン比 ν_s がゼロでなければ、有限要素解析で求めた λ の値はハニカムの高さ h によって異なり、式 (33) で求めた理論値と一致しない。そこで、これまでと同様に、平面ひずみ条件下の弾性コンプライアンス $\lambda|_p$ から、上下両端で応力自由の条件下の弾性コンプライアンス λ を求めるために、図 7 に示したように、セル壁 ABCD, A'B'CD および CDEF の上下端に分布した、平面ひずみ条件を満たすための応力 σ_η およびモーメント M_ξ を除荷し、その際に生じる外力による仕事と内部ひずみエネルギーの変化とのつり合いを考える。ただし、弾性

定数 E_1, E_2 の解析と異なり、弾性コンプライアンス λ を解析するため、ハニカムが遠方で大きさが等しい x_1 方向と x_2 方向の引張り応力 $\sigma_1^\infty = \sigma_2^\infty = \sigma^\infty$ を同時に受ける問題を考える。このような遠方荷重を受ける際、図 7 に示したユニットについて、その平面ひずみ条件を満たすためには、壁 CDEF に対して応力 $\sigma_\eta|_{CDEF}$

$$\sigma_\eta|_{CDEF} = 2\nu_s \cos \theta \frac{l_1}{t_2} \sigma_2^\infty \quad (34)$$

を分布させ、壁 ABCD および A'B'CD に対して応力 $\sigma_\eta|_{ABCD}$

$$\sigma_\eta|_{ABCD} = \nu_s \cos \theta \left(\sin \theta \frac{l_1}{t_1} + \frac{l_2 + l_1 \sin \theta}{t_1} \right) \sigma^\infty \quad (35)$$

および密度

$$M_\xi|_{ABCD} = M_0 \frac{2\xi}{l}, \quad M_0 = \nu_s l_1 \left(\frac{l_1 \cos^2 \theta}{2} - \frac{(l_2 + l_1 \sin \theta) \sin \theta}{2} \right) \sigma^\infty \quad (36)$$

の ξ 方向のモーメントを分布させればよい。

式 (34) ~ (36) の応力とモーメントを除荷した際の仕事は、それぞれ $W_1|_{ABCD}$, $W_1|_{CDEF}$ および $W_2|_{ABCD}$ で評価される。このような除荷において、図 7 に示したユニットは x_1 方向と x_2 方向の伸びを生じる。その伸びは、ハニカムコアの各セル壁の $\eta = \pm h/2$ の上下両端に応力自由の条件下での平均ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ と平面ひずみ条件下での平均ひずみ $\varepsilon_1|_p, \varepsilon_2|_p$ との差で評価できる。よって、除荷時の荷重 σ_1^∞ と σ_2^∞ による仕事 W^∞ は次式で求まる。

$$W^\infty = (\sigma^\infty)^2 \left[\left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_1|_p} \right) + \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_2|_p} \right) - 2(\lambda - \lambda|_p) \right] V \quad (37)$$

これらの外力の仕事によってユニット内のひずみエネルギーは増加し、その増加の量 ΔE は次式となる。

$$\Delta E = \left[\left(\frac{\sigma_1^\infty \varepsilon_1}{2} - \frac{\sigma_1^\infty \varepsilon_1|_p}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_2^\infty \varepsilon_2}{2} - \frac{\sigma_2^\infty \varepsilon_2|_p}{2} \right) \right] V = \frac{W^\infty}{2} \quad (38)$$

外力の仕事と内部ひずみエネルギーの増加に関するつり合い式 (9) に、 $W_1|_{ABCD}$, $W_1|_{CDEF}$, $W_2|_{ABCD}$, 式 (37), (38) および 2, 3 節で求めた縦弾性定数 E_1, E_2 を代入すれば、上下両端に応力自由の条件下での弾性コンプライアンス λ を算定するための次式が得られる。

$$\lambda - \lambda|_p = \frac{\nu_s^2 \sin \theta (l_1/t_1)}{E_s \cos \theta} \left[-1 + \frac{6(1 - \nu_s^2) \cos^2 \theta}{\pi^3 (t_1/l_1)^2 (h/l_1)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{H_{m1}}{m^3} \right) \right] \quad (39)$$

ここに、 $\lambda|_p$ は平面ひずみ条件下での弾性コンプライアンス λ であり、式(33)において E_s を $E_s/(1-\nu_s^2)$ で、 ν_s を $\nu_s/(1-\nu_s)$ で置き換えて得た次式で求まる。

$$\lambda|_p = \frac{(1-\nu_s^2) \sin \theta \cos \theta}{E_s} \left(\frac{l_1}{t_1} \right)^3 \times \left[1 + \left\{ \frac{2}{1-\nu_s} - 1 \right\} \left(\frac{t_1}{l_1} \right)^2 \right] \quad (40)$$

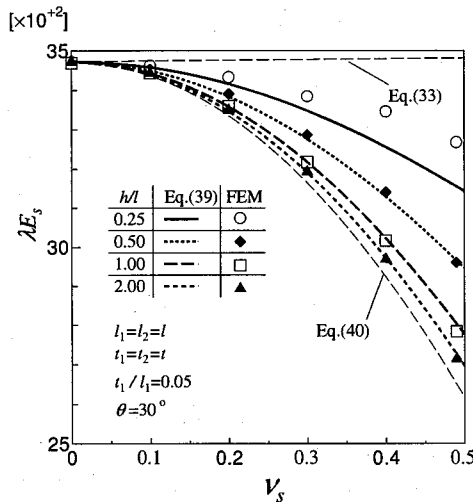


図-15 正六角形ハニカムコアにおける弾性コンプライアンス λ とポアソン比 ν_s の関係

表-3 $t_2/t_1 = 2$ および $\theta = 30^\circ$, $l_1 = l_2$, $\nu_s = 0.3$ の六角ハニカムコアの弾性コンプライアンス λ

t/l	h/l	FEM	Eq.(33)	Eq.(39)
0.01	0.50	4.05×10^5	4.33×10^5 [6.86%]	4.13×10^5 [1.79%]
	2.00	3.97×10^5	4.33×10^5 [9.21%]	3.98×10^5 [0.30%]
0.05	0.50	3.28×10^3	3.48×10^3 [6.01%]	3.28×10^3 [-0.10%]
	2.00	3.19×10^3	3.48×10^3 [9.00%]	3.19×10^3 [0.12%]
0.10	0.50	4.20×10^2	4.40×10^2 [4.83%]	4.15×10^2 [-1.16%]
	2.00	4.05×10^2	4.40×10^2 [8.62%]	4.05×10^2 [-0.13%]

4.3 理論弾性定数 λ の検証

図 15 に、 $t_1 = t_2 = t$, $l_1 = l_2 = l$, $\theta = 30^\circ$ のセル幾何形状を有する正六角形のハニカムに対して、厚さを $t/l = 0.05$ とし、高さをそれぞれ $h/l = 0.25, 0.5, 1.0, 2.0$ と変化させた場合の、式(39)と有限要素法による数値解析で求めたそれぞれの弾性コンプライアンス λ と材料のポアソン比 ν_s との関係を示す。図 19 には、式(33)および式(40)で求めたそれぞれの λ の値も示している。図からわかるように、従来式(33)に比べて、本研究で提案した式(39)で求めた弾性コンプライアンス λ の値は有限要素法の数値解析結果と良く一致しており、ハニカムコアの高さの影響を表現できている。

また、 $\nu_s = 0.3$ と固定し、 $t_2/t_1 = 2$, $l_1 = l_2$, $\theta = 30^\circ$

の六角形セルから構成されるハニカムに対して、弾性コンプライアンス λ の値を表 3 に示す。表には、有限要素解析で求めた弾性コンプライアンスの値に対する理論式(33)および(39)との相対誤差を括弧 [] の中の数値で示している。表からわかるように、検討しているハニカム幾何寸法の範囲において、従来式(33)に比べ、提案理論式(39)は解析精度が高い。

5. 結 言

本研究では、六角形ハニカムコア材の面内等価弾性定数に及ぼすコア高さの影響について検討を行った。その結果、弾性定数はコアが高い場合には平面ひずみ条件のそれに、コアが低い場合には平面応力条件の弾性定数に、それぞれ漸近することがわかった。また、高さが弾性定数に影響を及ぼす原因は、各セル壁がポアソン効果により高さ方向にも変形を生じるが、その変形が隣り合う両壁で異なるためであることを示し、ポアソン比が大きくなるに従い、高さの影響が顕著になることを明らかにした。さらに、平面ひずみ条件の弾性定数から応力自由条件の弾性定数の解析手法を提案するとともに、ハニカムコア材の縦弾性定数およびポアソン比を算定するための理論式を求めた。有限要素法に基づく数値解析結果との比較により、提案した理論式が上述のハニカムコア材の面内弾性定数の特性を表現し得ることを示した。なお、等価横弾性定数 G_{12} の理論式については、紙面の都合により、その結果のみを付録 2 に示す。

提案理論式は、本論文で示した材料特性や幾何形状以外の六角形ハニカムコア材にも適用可能であるが、フィルターや構造物の外壁などの弾性範囲内での使用を目的とする部材の設計において、高さの影響が無視できない場合には、現行の設計ではなく、高さの影響を的確に評価できる式(16)、(27)などを用いた手法が好ましいと思われ、こうしたケースにおいて、本研究にて提案した手法は有用である。

6. 付 録 1

ここでは、図 16 に示す、幅 l 、高さ h 、厚さ t の板 ABCD が上下両縁にモーメントを受け、その密度が

$$M_\xi = M_0 \frac{2\xi}{l} \quad \text{for} \quad \eta = \pm \frac{h}{2} \quad (41)$$

であるときの回転角 $\partial u_\xi / \partial \eta$ を求めてみる。

有限要素法による検討の結果、板の両縁 AB と CD の境界条件をそれぞれ固定端とする場合と単純支持とする場合で、板の上下両端 ($\eta = \pm h/2$) におけるたわみおよび回転角は異なるが、その差は小さいことがわかった。したがって、本解析では計算式をできるだけ簡単にするため、板 ABCD の上下両端における回転角

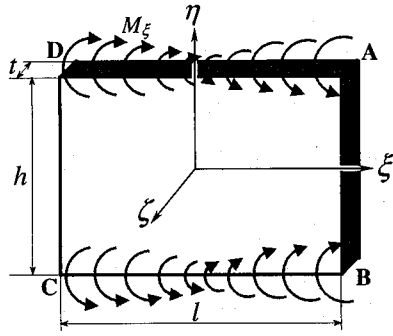


図-16 上下端にモーメントを受けるセル壁

を求める際、板の両縁 AB と CD の境界条件を単純支持として近似する。これによって、問題は境界条件

$$\begin{cases} u_\zeta = 0 \\ \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \xi^2} = 0 \end{cases} \quad \text{for } \xi = \pm \frac{l}{2}$$

$$\begin{cases} D \left(\frac{\partial^3 u_\zeta}{\partial \eta^3} + (2 - \nu_s) \frac{\partial^3 u_\zeta}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right) = 0 \\ D \left(\frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \eta^2} + \nu_s \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \xi^2} \right) = M_0 \frac{2\xi}{l} \end{cases} \quad \text{for } \eta = \pm \frac{h}{2}$$

(42)

を満たす微分方程式

$$\frac{\partial^4 u_\zeta}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 u_\zeta}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 u_\zeta}{\partial \eta^4} = 0 \quad (43)$$

の解を求めることになる。ここに、

$$D = \frac{E_s t^3}{12(1 - \nu_s^2)} \quad (44)$$

いま、 $\xi = \pm \frac{l}{2}$ での境界条件を満たすために、変位 u_ζ を

$$u_\zeta = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \left(\frac{2m\pi}{l} \xi \right) \quad (45)$$

と仮定する。式 (45) を微分方程式 (43) に代入すると、次の一般解が得られる。

$$Y_m = A_m \sinh \left(\frac{2m\pi}{l} \eta \right) + B_m \cosh \left(\frac{2m\pi}{l} \eta \right) + C_m \left(\frac{2m\pi}{l} \eta \right) \sinh \left(\frac{2m\pi}{l} \eta \right) + D_m \left(\frac{2m\pi}{l} \eta \right) \cosh \left(\frac{2m\pi}{l} \eta \right) \quad (46)$$

ここで、変位 u_ζ は η に関して偶関数であるため、

$$A_m = D_m = 0 \quad (47)$$

となる。式 (47) を考慮して、式 (46) を式 (42) の中の $\eta = h/2$ での境界条件に代入すれば、未知数 B_m 、 C_m を決めるための方程式が得られる。その方程式から B_m 、 C_m を求めると

$$B_m = (-1)^{m+1} \frac{M_0 l^2}{2D\pi^3 m^3 (1 - \nu_s)} \times \frac{(1 + \nu_s) \sinh \alpha_m - (1 - \nu_s) \alpha_m \cosh \alpha_m}{\{(3 + \nu_s) \sinh \alpha_m \cosh \alpha_m - (1 - \nu_s) \alpha_m\}}$$

$$C_m = (-1)^{m+1} \frac{M_0 l^2}{2D\pi^3 m^3} \times \frac{\sinh \alpha_m}{(3 + \nu_s) \sinh \alpha_m \cosh \alpha_m - (1 - \nu_s) \alpha_m} \quad (48)$$

が得られる。ここに、

$$\alpha_m = \frac{m\pi h}{l} \quad (49)$$

である。よって、 $\eta = h/2$ での板の回転角は

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=h/2} = \frac{lM_0}{D\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} \times \left[\frac{1}{(3 + \nu_s) \sinh \alpha_m \cosh \alpha_m - (1 - \nu_s) \alpha_m} \right] \times \left[\frac{2}{1 - \nu_s} \sinh^2 \alpha_m \right] \sin \frac{2m\pi}{l} \xi \quad (50)$$

で表される。式 (50) を用いれば、次式で与えられる上端 $\eta = h/2$ に作用するモーメントによる仕事を得られる。

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{2} M_\xi \frac{\partial u_\zeta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=h/2} d\xi = \frac{M_0^2 l^2}{2D\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{H_m}{m^3} \right) \quad (51)$$

ここに、

$$H_m = \frac{2 \sinh^2 \alpha_m}{(1 - \nu_s) [(3 + \nu_s) \sinh \alpha_m \cosh \alpha_m - (1 - \nu_s) \alpha_m]} \quad (52)$$

7. 付 録 2

ここでは、横弾性定数 G_{12} の解析方法および理論式について概説する。

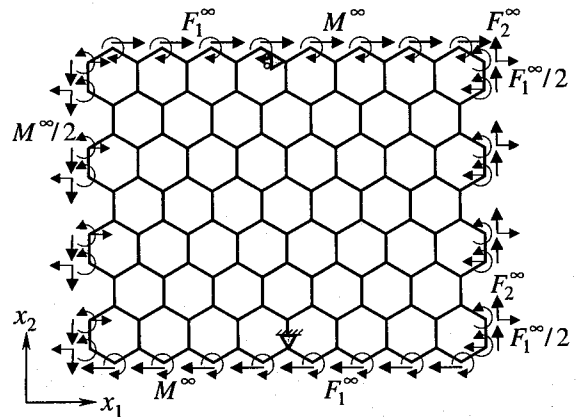


図-17 横弾性定数 G_{12} の解析モデル

遠方で一様なせん断応力 τ_{12}^∞ を生じさせるための解析モデルを図 17 に、またその際に、1 ユニットを構成する各セル壁が受けている力とモーメントを図 18 にそれぞれ示す。ここに、

$$F_1^\infty = \tau_{12}^\infty (2l_1 \cos \theta) h$$

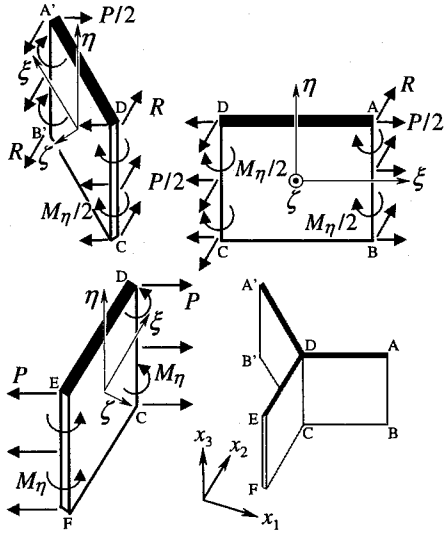


図-18 一様なせん断応力 τ_{12}^∞ を受けるセル壁のメカニクス

$$F_2^\infty = \tau_{12}^\infty (l_2 + l_1 \sin \theta) h$$

$$M^\infty = \tau_{12}^\infty (l_1 l_2 \cos \theta) h$$

である。図 17 のような境界条件により、モデル全体の回転角は等しくなり、ほぼ一様なせん断ひずみが生じる。ただし、縦弾性定数の解析とは異なり、 x_2 方向の境界の縦セル壁を取り除いたモデルとしている。図 18 に示した各力 P, R およびモーメント M_η によるセル壁の曲げ変形に加え、セル壁のせん断変形および引張り変形を考慮に入れると、横弾性定数は式 (53) のようになる 1)~5)。

$$\frac{E_s}{G_{12}} = \frac{\cos \theta \left[2 \left(\frac{l_2}{t_2} \right)^3 + \left(\frac{l_1}{t_1} \right) \left(\frac{l_2}{t_1} \right)^2 \right]}{\left[\frac{l_2}{l_1} + \sin \theta \right]} + \frac{2(1 + \nu_s) \cos \theta \left[2 \left(\frac{l_2}{t_2} \right) + \left(\frac{l_1}{t_1} \right) \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \right]}{\left[\frac{l_2}{l_1} + \sin \theta \right]} + \frac{\left(\frac{l_1}{t_1} \right) \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \sin \theta \right)^2}{\cos \theta \left[\frac{l_2}{l_1} + \sin \theta \right]} \quad (53)$$

2~4 節の解析と同様に、平面ひずみ条件を満たすため、各セル壁の上下端に次の応力およびモーメントを分布させる。すなわち、セル壁 ABCD および A'B'CD に対して正および負の応力 $\sigma_\eta|_{ABCD}$

$$\sigma_\eta|_{ABCD} = \nu_s \frac{l_2 + l_1 \sin \theta}{t_1} \tau_{12}^\infty \quad (54)$$

および密度

$$M_\xi|_{ABCD} = M_0 \frac{2\xi}{l}, \quad M_0 = \nu_s \frac{l_1 l_2 \cos \theta}{2} \tau_{12}^\infty \quad (55)$$

の ξ 方向のモーメントを分布させる。また、縦弾性定

数の場合と異なり、セル壁 CDEF に対しては密度

$$M_\xi|_{CDEF} = M_0 \frac{2\xi}{l}, \quad M_0 = -\nu_s l_1 l_2 \cos \theta \tau_{12}^\infty \quad (56)$$

の ξ 方向のモーメントを分布させる。なお、 $\sigma_\eta|_{CDEF} = 0$ である。これらの応力 σ_η とモーメント M_ξ を除荷し、その際に生じる内部ひずみエネルギーの変化に基づけば、平面ひずみ条件下の横弾性定数 $G_{12}|_p$ から、上下両端で応力自由の条件下の横弾性定数 G_{12} を求めることができる。その結果、横弾性定数 G_{12} を算定するための式が以下のように求まる。

$$\frac{1}{G_{12}} - \frac{1}{G_{12}|_p} = \frac{\nu_s^2}{E_s \cos \theta \left[\left(\frac{l_2}{l_1} \right) + \sin \theta \right]} \times \left\{ \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \sin \theta \right)^2 \left(\frac{l_1}{t_1} \right) + \frac{6(1 - \nu_s^2) \cos^2 \theta}{\pi^3} \left(\frac{l_2}{h} \right) \times \left[\left(\frac{l_1}{t_1} \right)^2 \left(\frac{l_2}{t_1} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{H_{m1}}{m^3} \right) + 2 \left(\frac{l_2}{t_2} \right)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{H_{m2}}{m^3} \right) \right] \right\} \quad (57)$$

ここに、 H_{m1} は式 (17)、 H_{m2} は次式で与えられる。

$$H_{m2} = \frac{2 \sinh^2 \alpha_{m2}}{B} \\ B = (1 - \nu_s) [(3 + \nu_s) \sinh \alpha_{m2} \cosh \alpha_{m2} - (1 - \nu_s) \alpha_{m2}] \\ \alpha_{m2} = \frac{m \pi h}{l_2} \quad (58)$$

また、平面ひずみ条件下の横弾性定数 $G_{12}|_p$ は、式 (53) において E_s を $E_s/(1 - \nu_s^2)$ で、 ν_s を $\nu_s/(1 - \nu_s)$ で置き換えることで得られる。

参考文献

- 1) Gibson, L. J., Ashby, M. F., Schajer, G. S. and Robertston, C. I.: The mechanics of two-dimensional cellular materials, *J. Proc. Roy. Soc.*, Vol.A382, pp.25-42, 1982.
- 2) Warren, W. E. and Kraynik, A. M.: The linear elastic response of two-dimensional spatially periodic cellular materials, *Mechanics of Materials*, Vol.6, pp.27-37, 1987.
- 3) Masters, I.G. and Evans, K.E.: Models for the elastic deformation of honeycombs, *Compos. Struct.*, Vol.35, pp.403-422, 1996.
- 4) Fortes, M. A. and Ashby, M. F.: The effect of non-uniformity on the in-plane modulus of honeycombs, *Acta. Mater.*, Vol.47, pp.3469-3473, 1999.
- 5) Gibson, L. J. and Ashby, M. F.: *Cellular Solids: Structures & Properties*, Pergamon Press, Oxford 1988.
- 6) Becker, W.: The in-plane stiffnesses of a honeycomb core including the thickness effect, *Archives of Applied Mechanics*, Vol.68, pp.334-341, 1998.
- 7) Becker, W.: Closed-form analysis of the thickness effect of regular honeycomb core material, *Compos. Struct.*, Vol.48, pp.67-70, 2000.
- 8) Chen, A. and Davalos, J. F.: A solution including skin effect for stiffness and stress field of sandwich honeycomb core, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.42, pp.2711-2739, 2005.
- 9) MSC. Marc: *User's Manual*, 2003.

(2007 年 4 月 12 日 受付)