

解析的平均化手法に界面剥離を組み込んだ複合材料要素

A finite element of composite materials by an analytical homogenization with a debonding model

グエン デュイ シン*・斉木 功**・岩熊 哲夫***

Nguyen Duy SINH, Isao SAIKI and Tetsuo IWAKUMA

*修士 (工学) フォーラム・エイト (〒153-0051 東京都目黒区上目黒 2-1-1 中目黒 GT タワー 15F)

**正会員 博士 (工学) 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

***正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

Application of composites in civil engineering, such as repair of bridges and piers by graphite-epoxy composites, is growing rapidly. One of the problems in strength of composite materials is interfacial debonding between the fiber and matrix. We here employ an analytical model considering partial debonding along fiber's interface, and construct a finite element, in which an approximate scheme to calculate the stress re-distribution due to partial debonding is included. Several numerical examples and comparisons with experimental data show the characteristics and feasibility of this model.

Key Words : composites, partial debonding, Mori-Tanaka theory, finite element analysis

1. はじめに

土木の分野でも, FRP や FRC のような繊維補強材で高機能・高性能な複合材料が広く利用されている。補修・補強やトンネルのライニング等に用いられるのはもちろん, 桁が FRC で造られた歩道橋¹⁾も建設されている。商品としては, 鋼繊維で超高強度高流動コンクリートを補強した『ダクトアル』が開発されており, この材料を用いた無筋コンクリートに外ケーブルを配置した歩道橋の実績^{2),3)}もある。後者の例では, 実験室レベルではあるが, 繊維の向きを揃えて靱性がかなり改善されることも確かめられている。ただし, その配合には社外秘の部分がある等, 設計するのは実際には非常に難しい。しかし実験や試作前に, 必要な特性に影響する配合比の範囲等がわかっていると, その材料設計を効率化できる。

そのような複合材料の, ミクロ構造を考慮して複合材料のマクロ的な挙動を予測する平均化手法には, 例えば古典的な Voigt や Reuss の平均化手法等があるが, そのような手法では, 介在物の向きや形は考慮できない。これに対し, 有限要素法と特異摂動法を組み合わせた均質化法⁴⁾は, 実際の微視的構造をそのままモデル化できるため, 近年多くの応用が報告され, 複数のスケールを同時に扱うことができる, たいへん有用なアプローチである。ただし, 数値的手法であることから, パラメトリック・スタディや最適設計等をするには工夫と手間がかかる。

これに対し, マイクロメカニクス等の等価介在物法⁵⁾と Eshelby の手法⁶⁾を組み合わせた種々の方法は, 介在物の形状や向きも考慮したつり合い式の解を用いている点で, 古典的手法より優れている。また上述の均質化法とは異なり, 解析的な手法であることから, 例えば確率有

限要素法への適用⁷⁾等のように材料設計に適用し易く, 現場でも実用化されているもの⁸⁾もある。また, 弾性範囲の上下界や self-consistent 法⁹⁾のように, 特性の範囲を求められるものや, 介在物と母材の相互作用をより高次レベルで取り入れた手法もある。また, 比較的容易に取り扱うことができる森・田中理論に基づく方法¹⁰⁾も近年, Ju と Chen¹¹⁾によって, その相互作用を高次近似する改善方法も提案されている。我々も弾性範囲でのより汎用的な平均化手法¹²⁾を提案してきている。

さて積層材等の複合材料の強度は, その界面や層間の剥離が支配的になって破壊に影響する場合がある。例えば, 比較的軟らかい弾塑性母材に硬い介在物が分散している複合材料では, 母材の塑性変形に加えて母材と介在物の界面で剥離が生じ, 材料特性に劣化のような大きな影響を及ぼすことも知られている。材料界面は, 形状の点からは応力集中が発生する場所であり, 製造過程を考えると異物質が層として析出する場所でもあり, 避けることができない弱点には違いない。複合材料で起こるクラックを伴った破壊も, まず界面で剥離が発生し, そこで発生したボイドが拡がり, それが結合することでクラックに発達すること¹³⁾も確かめられており, 界面剥離の発生と進展をモデルによって追跡することは非常に重要である。

そのような剥離も考慮した複合材料の挙動を解析的に予測する手法の一つに Zhao と Weng¹⁴⁾によるモデルがある。そこでは, 剥離発生後の介在物が母材に完全付着したままで, しかし, 界面剥離方向には応力を伝達しない直交異方性材料の仮想的な介在物 (以下, 仮想介在物と呼ぶ) に置き換えることにより, 界面剥離を擬似的に表現している。このモデルは, 界面剥離を考慮した弾

塑性挙動予測の研究¹⁵⁾にも用いられたが、そこでは、剥離した介在物の体積比率を増加させていくことによって界面剥離が徐々に進行することをモデル化している。また、Ju と Sun¹⁶⁾や Sun と Ju¹⁷⁾の研究では、界面剥離は界面強度と介在物内部の応力に依存するが、剥離した介在物の体積率が Weibull 分布に従うとした平均的なモデルが提案されている。しかもこの研究では、界面剥離後は損傷理論を併用している。このように、この後者の三つのアプローチでは、微視的な挙動を正確にモデル化できているわけではない。

そこで本研究では、Zhao と Weng が提案した「仮想介在物」を森・田中理論に基づく平均化手法に直接組み込み、それを有限要素に定式化する。この方法は、我々の前の研究¹⁸⁾でも用いたが、そこでは増分つり合いのみを追跡した。そのため、剥離による剛性低下は繰り返し計算によって考慮できるようにできたが、剥離した介在物は剥離した瞬間の抵抗を維持し続けざるを得なかった。この論文では、界面剥離による応力開放が可能になるアルゴリズム、return mapping を用いることにより、剥離後の介在物周辺の応力の再配分を確実に行えるようにした。最後に、剥離が観察されたとする実験結果を本手法でシミュレーションし、本モデルの適用性を検討する。

2. 界面剥離モデルと剥離基準

2.1 仮想介在物の横等方弾性係数

介在物は剥離するまでは等方弾性体であるとする。それが剥離を経験し、仮想介在物になったときの状況を、直角座標系 (x_1, x_2, x_3) において、例えば x_1 方向を法線とする界面で剥離した場合について説明する。介在物の弾性テンソルの成分を簡単のために Voigt 表記を用いて c_{ij} と表わす。すると剥離後の介在物中は

$$\sigma_{11} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0 \quad (1)$$

という応力状態にある。この式が成立する条件を応力ひずみ関係で表わすと

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} = 0 \\ \sigma_{31} &= 2c_{55}\varepsilon_{31} = 0, \quad \sigma_{12} = 2c_{66}\varepsilon_{12} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

となる。したがって、上式の第 1 式から

$$\varepsilon_{11} = -\frac{c_{12}}{c_{11}}\varepsilon_{22} - \frac{c_{13}}{c_{11}}\varepsilon_{33} \quad (3)$$

の関係が得られる。これを元の応力ひずみ関係式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \left(c_{22} - \frac{c_{21}c_{12}}{c_{11}}\right)\varepsilon_{22} + \left(c_{23} - \frac{c_{21}c_{13}}{c_{11}}\right)\varepsilon_{33} \\ \sigma_{33} &= \left(c_{32} - \frac{c_{31}c_{12}}{c_{11}}\right)\varepsilon_{22} + \left(c_{33} - \frac{c_{31}c_{13}}{c_{11}}\right)\varepsilon_{33} \\ \sigma_{11} &= 0, \quad \sigma_{23} = 2c_{44}\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

となる。この応力ひずみ関係を

$$\sigma_1 = C_1^d \varepsilon_1 \quad (5)$$

と表わすことにし、これが界面剥離をした後の介在物の応力ひずみ関係になる。この C_1^d が仮想介在物の横等方弾性テンソルである。

2.2 剥離基準の設定

Zhao と Weng は、界面剥離が発生した場合の複合材料の平均剛性を求める方法を提案しているが、その界面剥離の発生条件については言及していない。複合材料の界面剥離に関する実験的研究では様々なアプローチがなされているが、その中に円柱形ファイバーの長軸直角方向の界面強度に注目した数値解析的研究¹⁹⁾がある。その研究では最終的に、円断面の法線方向応力が界面剥離に対して最も重要な要因であると結論付けている。この結論は直感的には妥当だと考えられる。

森・田中のアプローチでは、介在物内部の応力は無限体に一個の介在物が存在する場合のそれと同じになると近似しているので、内部応力は一様になる。また、付着している間は、その界面の法線方向と接線方向の応力は、介在物と母材間で連続していることから、界面の応力は介在物内部の応力で算定できることになる。したがって、その介在物内部の第 1 引張主応力がある限界値に達したときに、界面でも、その主方向の引張応力が限界値に達したことになる。よって、その時点で、その第 1 引張主応力方向を法線とする界面で剥離が発生すると仮定することにした。この限界値をここでは剥離強度と呼び、界面剥離は引張応力のみで発生するものと仮定する。なお、剥離は発生的一瞬间のみを捉え、それが進展してある剥離領域になることは考慮できていない。

一方、介在物が球ではなく、細長い回転楕円体の場合には、例えばその長軸方向を法線とする界面に剥離が発生しても、側面の付着がまだ十分に応力を伝達すると Zhao と Weng¹⁴⁾は述べている。したがって、その側面の剥離が生じて初めて実際に剥離したと考える研究もある。しかし、そういったことが実験で確かめられているという文献を我々は未だ見出せていないので、本研究では細長い回転楕円体の場合にも、主応力方向で剥離が支配されるものと仮定する。

2.3 仮想介在物を剥離後も用いることの問題点

実は、一旦剥離した介在物は横等方性の仮想介在物に変わるので、それに対応する Eshelby のテンソルは一定ではなくなる。あるいは陽な形で求められないため、Green 関数を求めるためだけの複素積分等の部分も数値的に実行²⁰⁾しなければならなくなる。しかしここでは、解析的なアプローチの特長を活かしたいので、Eshelby テンソルそのものの算定は、介在物がいかなる状態にあっても、通常の等方材料で得られる値、つまり母材の

ポアソン比と介在物の形状のみで決定できる Eshelby のテンソルの値を近似として用いる。

3. 巨視的弾塑性関係と有限要素

3.1 2相弾塑性複合材料の平均的關係

本研究では、森・田中理論に増分型 J_2 流れ理論を組み込んだ弾塑性モデルを用いる。またここでは、剥離問題を扱うことを主とし、介在物は補強材としてのみ働くと考え、降伏は母材でのみ生じるものとする。ここで考える 2 相問題では、無限体と捉えた母材の中に、ただ 1 種類の形状を持つ複数の回転楕円体介在物が同じ方向を向いて不規則に分布しているものとする。また母材と介在物はともに弾性は等方で、その弾性テンソルをそれぞれ C_M , C_I とする。このとき、母材と介在物各相の増分応力・ひずみ関係が

$$\dot{\sigma}_M = C_M (\dot{\epsilon}_M - \dot{\epsilon}^*) \quad (6a)$$

$$\dot{\sigma}_I = C_I \dot{\epsilon}_I \quad (6b)$$

と表される。ここに $\dot{\sigma}_M$, $\dot{\epsilon}_M$ は母材部分の応力増分・ひずみ増分の体積平均量を表し、 $\dot{\sigma}_I$, $\dot{\epsilon}_I$ は介在物内部の応力増分・ひずみ増分の体積平均量である。また $\dot{\epsilon}_M^p$ は母材部分の塑性ひずみ増分の体積平均量を表す。ただし、多数の介在物があるときの母材との相互作用を正確に考慮することは困難である。したがって、上の $\dot{\epsilon}_M$ は、実際の母材部分の平均ひずみ増分というわけではなく、何らかの相互作用の後に生じている何らかの平均ひずみと考える点がこの手法の特徴である。

次に、母材と介在物の相互作用についての森・田中のアプローチでは、ただひとつの介在物が無限体の母材中に存在する場合の相互作用で近似している。その介在物の存在によって、介在物中のひずみは母材のひずみと異なるひずみになるが、その乱れ分 $\dot{\gamma}$ は

$$\dot{\epsilon}_I = \dot{\epsilon}_M + \dot{\gamma} \quad (7)$$

となるというのが、Eshelby の解の一つ見方である。このとき Eshelby⁶⁾によれば、等方弾性材料中に形状が回転楕円形の等方弾性の介在物がある場合には、乱れ成分 $\dot{\gamma}$ は介在物部分で一定であることが分かっている。

この Eshelby の解を利用して村⁷⁾は等価介在物法を提案した。等価介在物法によると、介在物部分の材料を母材と同様の材料にしても、代わりに増分 eigen ひずみ $\dot{\epsilon}^*$ を導入することで等価な増分応力・ひずみ関係が成り立つとしている。つまり式 (6b) に式 (7), (6a) を代入し、さらに等価介在物法を適用することによって

$$\dot{\sigma}_I = C_I (\dot{\epsilon}_M + \dot{\gamma}) = C_I (C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\gamma} + \dot{\epsilon}_M^p) \quad (8a)$$

$$= C_M \{ C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\gamma} + \dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^* \} \quad (8b)$$

という関係が成立するとする。1 行目が正しい定義の応力ひずみ関係であり、2 行目が等価介在物にするために

増分 eigen ひずみ $\dot{\epsilon}^*$ を導入し、同時に、弾性係数を母材のそれに置き換えたものである。このようにすると、2 相問題の支配方程式は比較的容易に解くことができ、乱れ成分 $\dot{\gamma}$ は、Eshelby の解として

$$\dot{\gamma} = -S (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) \quad (9)$$

と求めることができる。ここに S が Eshelby テンソルと呼ばれ、釣り合い式と境界条件の支配方程式を解くことによって求められるテンソルである。一例として球形介在物の場合の S を紹介すると

$$S_{ijkl} = \alpha \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} \quad (10)$$

ただし

$$\alpha \equiv \frac{1 + \nu_M}{3(1 - \nu_M)}, \quad \beta \equiv \frac{2(4 - 5\nu_M)}{15(1 - \nu_M)} \quad (11)$$

となる。ここに ν_M は母材のポアソン比である。したがって、式 (8a), (8b) に式 (9) を代入すれば

$$\dot{\sigma}_I = C_I C_M^{-1} \dot{\sigma}_M - C_I S (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) + C_I \dot{\epsilon}_M^p \quad (12a)$$

$$= \dot{\sigma}_M - C_M (S - I) (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) \quad (12b)$$

となる。ここに I は 4 階の単位テンソルを表す。式 (12a) と式 (12b) を等置することにより

$$\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^* = -\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \{(C_M - C_I)C_M^{-1} \dot{\sigma}_M - C_I \dot{\epsilon}_M^p\} \quad (13)$$

が得られる。

巨視的な応力増分・ひずみ増分は単純な体積平均で

$$\dot{\bar{\sigma}} = (1 - f) \dot{\sigma}_M + f \dot{\sigma}_I \quad (14a)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = (1 - f) \dot{\epsilon}_M + f \dot{\epsilon}_I \quad (14b)$$

と定義できる。ここに f は介在物の体積比率である。式 (14a) に式 (12b) を、式 (14b) に式 (7), (6a), (9) をそれぞれ代入すれば

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}} &= (1 - f) \dot{\sigma}_M + f \{ \dot{\sigma}_M - C_M (S - I) (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) \} \\ &= \dot{\sigma}_M - f C_M (S - I) (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\epsilon}} &= (1 - f) (C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\epsilon}_M^p) \\ &\quad + f \{ (C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\epsilon}_M^p) - S (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) \} \\ &= C_M^{-1} \dot{\sigma}_M - f S (\dot{\epsilon}_M^p - \dot{\epsilon}^*) + \dot{\epsilon}_M^p \end{aligned} \quad (15b)$$

となる。さらに式 (15a), (15b) に式 (13) をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}} &= \left[I + f C_M (S - I) \right. \\ &\quad \left. \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \dot{\sigma}_M \\ &\quad - f C_M (S - I) \end{aligned}$$

$$\{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} C_I \dot{\epsilon}_M^p \quad (16a)$$

$$\dot{\epsilon} = \left[I + fS \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right.$$

$$\left. (C_M - C_I) \right] C_M^{-1} \dot{\sigma}_M - fS \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} C_I \dot{\epsilon}_M^p + \dot{\epsilon}_M^p \quad (16b)$$

が得られる。すると式(16a)より母材部分の平均応力増分は

$$\dot{\sigma}_M = \left[I + fC_M(S - I) \right. \\ \left. \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \\ \left[\dot{\sigma} + fC_M(S - I) \right. \\ \left. \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} C_I \dot{\epsilon}_M^p \right] \quad (17)$$

となり、また介在物内部の平均応力増分は式(12b)に式(13)を代入して整理することにより

$$\dot{\sigma}_I = \left[I + C_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right. \\ \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \dot{\sigma}_M - C_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} C_I \dot{\epsilon}_M^p \quad (18)$$

となる。

式(16b), (17), (18)を整理すれば、母材と介在物部分の応力増分や巨視的ひずみ増分は、最終的に次のような関係で表現できる。

$$\dot{\sigma}_M = A \dot{\sigma} + D \dot{\epsilon}_M^p \quad (19a)$$

$$\dot{\sigma}_I = B \dot{\sigma} - E \dot{\epsilon}_M^p \quad (19b)$$

$$\dot{\epsilon} = \bar{C}^{-1} \dot{\sigma} + F \dot{\epsilon}_M^p \quad (19c)$$

ここに、平均弾性係数 $\bar{C}$ は

$$\bar{C}^{-1} = \left[I + fS \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} (C_M - C_I) \right. \\ \left. \left[C_M + fC_M(S - I) \right. \right. \\ \left. \left. \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} (C_M - C_I) \right]^{-1} \right] \quad (20)$$

と表わされる。また、 A, B, D, E, F はすべて4階のテンソルで次のように定義した。

$$A \equiv \left[I + fC_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right. \\ \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (21a)$$

$$B \equiv \left[I + C_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right. \\ \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \\ \left[I + fC_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right.$$

$$\left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (21b)$$

$$D \equiv \left[I + fC_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right. \\ \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1}$$

$$\left[fC_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} C_I \right] \quad (21c)$$

$$E \equiv \left[C_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} C_I \right. \\ \left. - \left[I + C_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \right.$$

$$\left. \left[I + fC_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \right.$$

$$\left. \left[fC_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} C_I \right] \right] \quad (21d)$$

$$F \equiv I - \left[fS \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} C_I \right. \\ \left. + \left[I + fS \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} (C_M - C_I) \right] \right. \\ \left. \left[C_M + fC_M(S - I) \right. \right. \\ \left. \left. \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} (C_M - C_I) \right]^{-1} \right. \\ \left. \left[fC_M(S - I) \{C_M - (C_M - C_I)S\}^{-1} C_I \right] \right] \quad (21e)$$

3.2 界面剥離基準

式(19b)を累積させて算定される介在物中の応力の第1引張主応力が、ある応力 σ_d (以下、剥離強度)に達したときに、その主方向を法線とする界面に剥離が生じたものとする。それ以降は、式(19b)の応力計算において、介在物の弾性テンソル C_I を前章で説明した式(5)の仮想ファイバーの弾性テンソル C_I^d で置き換えることにする。ただし、この弾性テンソルは、剥離をした面の法線方向つまり引張主方向の剛性が零の横等方テンソルとして定義されている。

3.3 母材部分の流れ則

母材の降伏条件は von Mises の降伏条件に従うものとし、その降伏関数は次のように与えられるものとする。

$$f_M = \sqrt{(J_2)_M} - F_M(\epsilon_M^p) \quad (22)$$

ここに ϵ_M^p は母材の塑性ひずみテンソルである。降伏曲面の半径に相当する硬化関数については代表的な文献²¹⁾でよく用いられている power law に従うものとして

$$F_M = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sigma_M^y + h_M (\epsilon_M^{eq})^{n_M} \right\} \quad (23)$$

と仮定する。ここに σ_M^y は母材の単軸引張り初期降伏応力で、 h_M, n_M は硬化パラメータを表し、材料の単軸引張り実験等から同定される。また相当応力、相当塑性ひず

み増分は次のように定義した。

$$\sqrt{(J_2)_M} = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_M : \sigma'_M} \quad (24a)$$

$$\varepsilon_M^{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_M^p : \varepsilon_M^p} \quad (24b)$$

ここにプライムは偏差成分を表わす。

なお、各増分ステップにおける塑性ひずみ増分を求めるために、Simo²²⁾の radial return mapping アルゴリズムを用いる。関連流れ則によって、母材部分の塑性ひずみ増分は

$$\dot{\varepsilon}_M^p = \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} \dot{\sigma}_M \quad (25)$$

と表わされる。ここに H_M は硬化係数で

$$H_M = \frac{n_M h_M}{3} (\varepsilon_M^{eq})^{(n_M-1)} \quad (26)$$

と定義した。

3.4 2相複合材料の弾塑性接線係数

前節の流れ則を用いて、有限要素解析のために必要な巨視的な応力ひずみ関係の接線係数を求める。まず式(25)に式(19a)を代入すると

$$\dot{\varepsilon}_M^p = \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \dot{\sigma} + \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \dot{\varepsilon}_M^p \quad (27)$$

となり、母材部分の塑性ひずみ増分は

$$\dot{\varepsilon}_M^p = \left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\}^{-1} \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \dot{\sigma} \quad (28)$$

と表現できる。これを式(19c)に代入すると

$$\dot{\varepsilon} = \bar{C}^{-1} \dot{\sigma} + F \left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\}^{-1} \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \dot{\sigma} \quad (29)$$

となり、最終的に巨視的な応力ひずみ関係が

$$\dot{\sigma} = \left[\bar{C}^{-1} + F \left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\}^{-1} \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \right]^{-1} \dot{\varepsilon} \quad (30)$$

のように表わすことができる。以下、便宜上、この関係を

$$\dot{\sigma} = X \dot{\varepsilon} \quad (31)$$

と書くことにする。数値解析におけるテンソル計算は、文献²³⁾にある手法を用いて行列計算で行った。

3.5 有限要素

平均化の際に考慮できる介在物の種類は1種類として定式化しているため、一つの有限要素毎に、あるいは場合によっては積分点一箇所毎には、一種類の介在物の量・配置しか定義できない。しかし、要素毎にその介在物の特性を定義すれば、任意の配置・形状・量の介在物

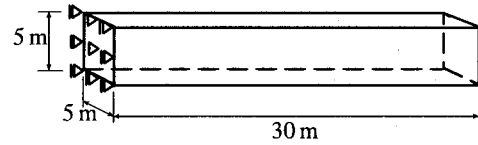


図-1 解析対象 (1920 要素)

を有限要素近似としてモデル化できると考えた。また界面剥離についても同様であり、要素毎に剥離の有無は一意に定められる。

一般的な有限要素の定式化手法の接線係数を式(31)にすればいいので、要素の定式化にあたっての特別な配慮は必要ない。要素は、文献²⁴⁾等に詳しい8節点アイソパラメトリック6面体要素とし、非線形解析に対応させるためにそれを増分型に適用する。例えば、要素 e の要素接線剛性方程式は次のように書ける。

$$K_e d_e = F_e \quad (32)$$

ここに、 d_e は節点変位ベクトル増分、 F_e は節点荷重ベクトル増分である。また、 K_e は要素接線剛性行列で、

$$K_e = \int_{\Omega_e} (\partial N_e)^T X (\partial N_e) dV \quad (33)$$

と定義される。 N_e は形状関数で、 ∂ は増分ひずみ増分変位関係を表わす適切な微分演算子からなる行列である。

3.6 Newton-Raphson 法と界面剥離による応力再分配

降伏でも生じるが、剥離が発生したときも、全体のつり合いが成り立つように応力分布が変化する。ここでも、通常使われるNewton-Raphson法をそのまま使用する。つまり、ある計算ステップのつり合い力 R は

$$R \equiv F_{ext} - F_{int} = 0$$

で定義される。 F_{int} は有限要素の節点での反力を用いて算定する。これを

$$KU = R$$

を用いて修正し、誤差が許容範囲に入るまで繰り返し計算をする。ここで K は、式(33)の接線係数を用いた全体剛性行列である。

4. 数値解析結果

4.1 1軸引張

解析対象のモデルを図-1に示した。構成則を数値的に求めるために均質変形が得られるような「要素試験」として引張試験をしているため、巨大な試験片になっているが、寸法には特に意味はなく、結果がそれに左右されるような因子は含まれていない。材料試験に対応する1軸引張の解析では、右端の全節点で右向きに、1ステッ

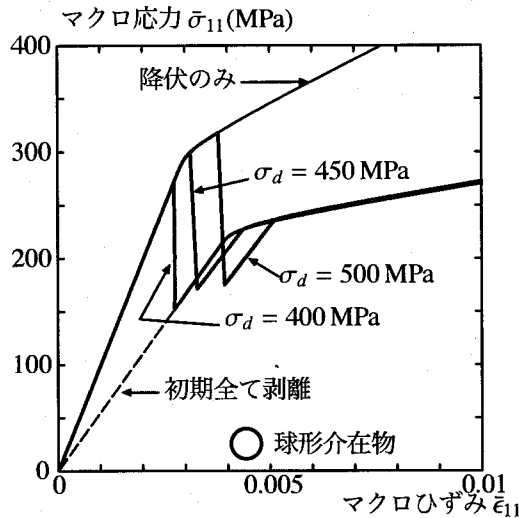


図-2 引張試験：剥離強度の影響

プ毎に強制変位 8.35×10^{-5} m で強制変位増分を与えた。材料は、5456Al の母材のヤング率が $E_M = 73$ GPa, ポアソン比が $\nu_M = 0.33$ で、初期降伏応力が $\sigma_y = 230$ MPa であり、硬化パラメータを $h_M = 68$ MPa と $n = 0.135$ とした。介在物は SiC で、球形あるいは形状比が 1:1:3 の回転楕円体とし、ヤング率を $E_I = 485$ GPa, ポアソン比を $\nu_I = 0.20$ とし、その体積率は $f = 20\%$ とした。母材の硬化パラメータは文献²⁵⁾で紹介されている設定値とは若干異なるが、これは母材だけの実験結果を用いて、我々が再度同定し直したものである。

図-2 には、介在物を球形とした場合に、剥離強度が $\sigma_d = 400$ MPa, 450 MPa, 500 MPa のように異なる場合についての、マクロ応力ひずみ関係を示した。球形介在物なので全要素で同時に剥離が発生し、応力は急に低下する。同図に示した破線は、最初から軸方向に剥離した状態を持つ場合のマクロ応力ひずみ曲線で、介在物の剛性を最初から式 (5) の C_1^d としたまま変形挙動を追跡した履歴である。 $\sigma_d = 400$ MPa の場合には、降伏前の弾性状態で既に剥離が発生しているので、この場合のマクロ応力ひずみ曲線は上記の破線にすぐ重なって、その後もほぼ一致した挙動を示している。また、それ以外の降伏が先行するような場合でも、剥離直後には変形を止めて応力の再配分を行っているため、母材も一旦弾性状態になり、剥離後はどの場合でも弾性勾配でしばらく応力が上昇している。最終的に再度降伏した後は、剥離強度の違いによる影響が解消され、三つの場合ともに破線の履歴とほぼ同じ抵抗を示した。また、この結果は均質化法を用いたもの²⁶⁾ともよく整合している。

次にやや細長い回転楕円体介在物の向きによる影響について検討する。図-3 には、介在物の長軸が引張軸方向に整列した場合（実線）と、ランダムに分布した場合（破線）のマクロ応力ひずみ関係を示した。ここでの剥離強度は $\sigma_d = 950$ MPa と固定した。介在物がこのよ

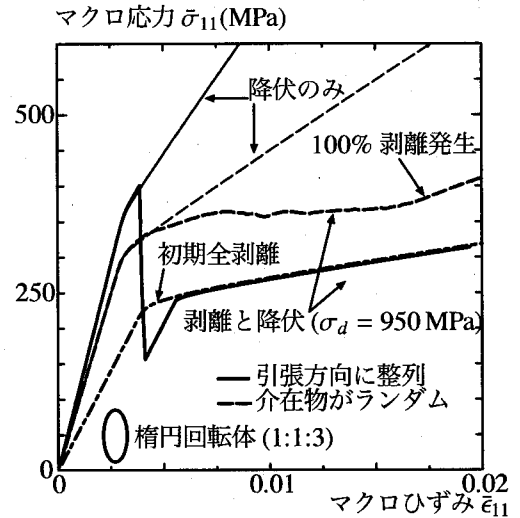


図-3 引張試験：介在物の向きの影響

うに整列する場合には引張方向に剛な直交異方性を持つことから、剥離前には大きい剛性を示したが、剥離後はランダムに分布する場合よりも挙動が軟らかくなっている。これは、介在物の向きがランダムに分布する場合には剥離が徐々に生じていることと、剥離する界面の位置もランダムなのが原因で、整列した場合よりも剛な挙動を示したからである。また介在物が整列している場合には、すべての剥離が長軸方向を法線とする面で発生しているため、全てが剥離してしまった後の挙動はランダムな場合とは一致しない。なお、図中の「初期全剥離」というのは、前述の図の破線と同様、最初から長軸方向にすべて剥離した場合の剛性で追跡した挙動である。

最後に、楕円体の場合の剥離強度の違いを見るために、形状比 1:1:3 の回転楕円体の向きをランダムに分布させた場合を解析する。前述のように、降伏との順番による違いを見るために、何回かの試行錯誤の後、 $\sigma_d = 450$ MPa, 700 MPa, 950 MPa の場合を比べ、図-4 に示し

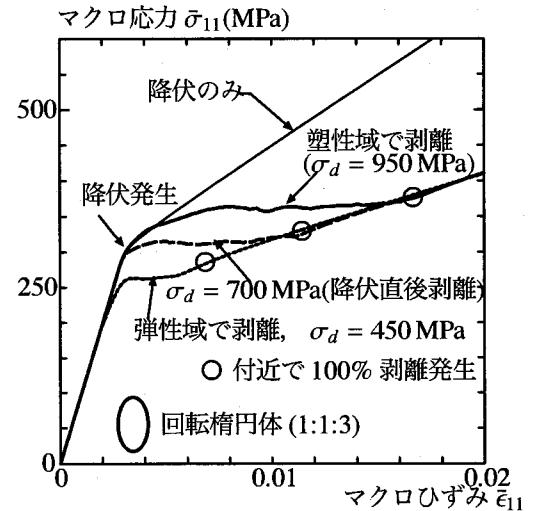


図-4 細長い介在物の剥離強度の影響

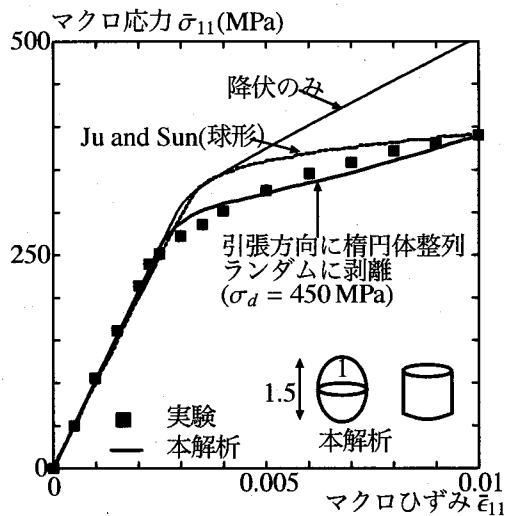


図-5 引張試験：実験結果との比較

た、介在物の向きがランダムに分布しているため、剥離も同時には発生せず、徐々に起こる。したがって、応力ひずみ曲線には急激な変化は見られない。どの場合も、初期剥離のあとは、連鎖的に剥離が起こり始めるため、一旦ほぼ剛性がゼロの挙動を示すが、ある程度剥離が進行してしまうと剛性が大きくなる。図-4に丸で示した変形状態は、すべての介在物で剥離が生じている状態であるが、そこまでは連鎖的な剥離が発生しているため、剛性が小さいままになっている。最終的には三つとも同じような抵抗を示す。

4.2 実験結果等との比較

実験との比較のために、Sun ら²⁵⁾も引用している実験を取り上げる。材料は、前節の引張試験のシミュレーションと同じであるが、前述のように母材の硬化係数は我々が同定した値を用いている。文献には実験で剥離が観察されたとは書かれていないが、Sun らは剥離を考慮して実験との比較を論じている。介在物の形はSun らは球形にしている一方で、同じデータを有限要素解析したPapazian と Adler²⁷⁾は、寸法が1:1:1 くらいの短い円柱で介在物 SiC を表現していた。そこでここでは、図-5の右下に示したように、円柱と球の中間的な1:1:1.5の回転楕円体介在物を仮定した。またSun らの設定に合わせて、長軸を引張軸方向に整列させたが、そうすると剥離が同時に生じてしまう。これに対しSun らは徐々に剥離を導入しているのだから、それと対比させるために、剥離の向きだけは無理やりランダムに設定した。実際、一度に剥離が生じた場合には、もっと柔らかい挙動しか得られないことは、前節の結果から推測できる。同図の黒四角が実験値である。文献には剥離強度が記述されていなかったため、試行錯誤で、本実験が比較的实验結果に近くなるような値を求めたところ、剥離強度が $\sigma_d = 450$ MPa となった。そのため、剥離後の本予測曲線は実

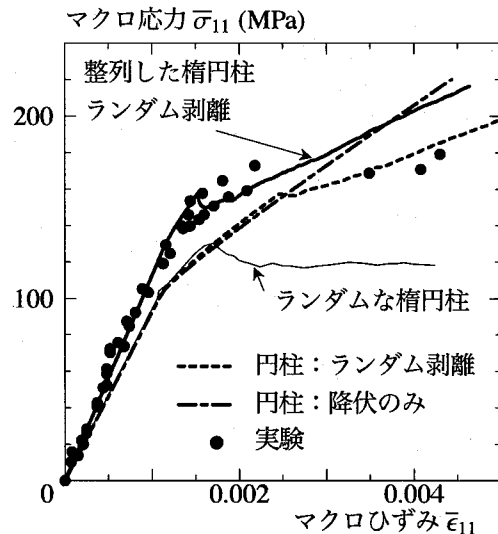


図-6 剥離が観察された実験との比較

験結果に近づいている。剥離が無く降伏のみを取り入れた細い線は、実験値を過大評価している上に、やはり剥離を考慮していないPapazian と Adler²⁷⁾の有限要素解も同様に過大評価していたことから、もしかしたらこの実験でも、Sun らがそうしているように剥離の影響があったのではないと思われる。参考までに、高次のEshelby テンソルを用いたSun ら²⁵⁾の球形介在物の場合の結果も破線で示したが、剥離も存在したとして損傷理論を併用している。

次に、明らかに剥離が観察されたと報告された実験結果との比較を図-6に示した。文献²⁸⁾より、母材は2024Alで、ヤング率 $E_M = 55.85$ GPa、ポアソン比 $\nu_M = 0.32$ 、降伏強度 $\sigma_y = 79.29$ MPa、また、文献の結果から同定した母材の硬化パラメータは $h_M = 68$ MPa、 $n = 0.135$ であった。介在物はボロンで、材料定数はヤング率 $E_i = 379.23$ GPa、ポアソン比 $\nu_i = 0.20$ で、体積率 $f = 34\%$ を占めている。

介在物は、文献では無限に長い円柱で引張方向と直交していたとしているので、ここでも引張軸と直交する方向に無限に長い円柱とした場合の結果を図に示した。一点鎖線が剥離がなく降伏のみの場合である。その下の破線が、剥離を伴う変形であるが、円柱の場合は $\sigma_d = 230$ MPaとしたところ、ひずみが0.004付近の三つの実験値に近づく結果が得られた。ただし、円柱介在物ではすべての剥離が同時に起きてしまうため、この破線は前の比較結果の場合と同様、ランダムな向きに剥離を発生させている。次に剥離基準として主応力を用いた場合を試すために、材料定数と介在物体積率は変えずに、介在物の寸法について試行錯誤をして、1:1:2.5の回転楕円体介在物をランダムな向きで分布させてみた。このときは $\sigma_d = 285$ MPaとした。これが図中の「ランダムな楕円柱」と記した実線で、剥離が増加するまでの挙動がほぼ円柱の場合と同じになるようにしてある。この場合に

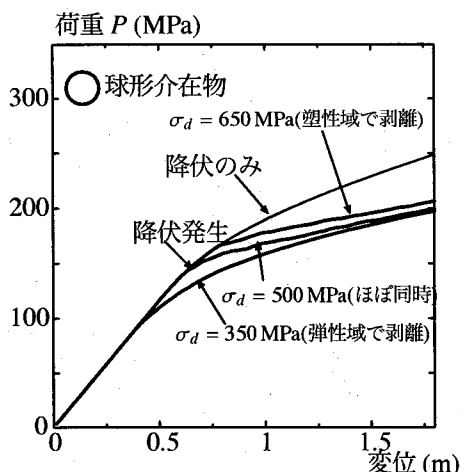


図-7 曲げに対する剥離強度の影響

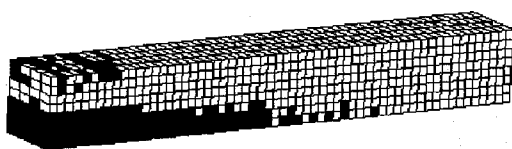


図-8 介在物の向きがランダムに分布する場合の剥離分布

は、剥離強度を上げてあるが、剥離の発生の開始が円柱の場合よりかなり早くなって、軟化を示した。

ただ、いずれの場合も、弾性挙動に既に実験値との差が出てしまったので、試しに、この1:1:2.5の回転楕円体介在物の長軸方向を引張方向に整列させた場合の結果を同図に示した。剥離強度は同じく $\sigma_d = 285 \text{ MPa}$ とした。図の「整列した楕円柱」と記した実線がその結果である。この場合も剥離が徐々に起こるように、介在物はランダムな方向に剥離させた。図の右の方の剥離を観察した三つの実験値までは到達していないが、弾性挙動から降伏後の剥離の発生と、その後の剛性が小さくなる段階までの挙動はよく追跡できている。

4.3 片持ち梁の曲げ

引張試験は構成則を確認するための要素試験と位置づけたので、最後に境界値問題への適用例として、簡単な片持ち梁の曲げを解析し、どのような3次元的效果があるかを検討する。引張と同じ解析対象の右端の節点に、1ステップ当たり0.001 mの上向き増分強制変位を与えた。材料は、引張試験のシミュレーションと同じであるが、前述のように母材の硬化係数は我々が同定した値を用いている。図-7には、球形介在物を用いて剥離強度が $\sigma_d = 350 \text{ MPa}$, 500 MPa , 650 MPa とした場合についての荷重変位関係を示した。縦軸 P は左端の反力から求めた外力である。

曲げ問題では、界面剥離が徐々に発生するため、荷重

変位曲線には剥離による勾配の急変は現れない。剥離強度 $\sigma_d = 500 \text{ MPa}$ の場合は降伏直後に剥離が発生し、母材の塑性変形による影響が小さいので、ある程度変形が進んだ後は、弾性域で剥離が発生した場合の荷重変位曲線に近づいていく。同様の計算を、楕円体介在物の向きがランダムに分布する場合にも実施したが、その剥離の進展挙動と剛性低下は、球形介在物の場合とほぼ同じだった。図-8には、剥離強度 $\sigma_d = 650 \text{ MPa}$ の場合で、楕円体介在物がランダムな向きで分布させた場合の、強制変位 $u = 1.4 \text{ m}$ 付近での剥離した要素の分布を、黒色で示した。圧縮側（上面付近）にも黒い領域があり、それでも剥離が生じている要素が存在するが、これは、棒の軸と直交する水平方向の主応力が引張となって生じたもので、3次元解析で予測できた現象である。

5. おわりに

仮想介在物という非常に簡単な概念を用いた界面剥離モデルを解析的な平均化手法と組み合わせ、新たに剥離基準を仮定することによって、3次元的な剥離の発生と進行を予測する手法を提案した。剥離後の応力算定で用いる Eshelby テンソルが正確なものではないものの、既存の均質化法による結果と整合する解を求めることができた。実験値との比較で得られる比較的柔かい挙動が、今回導入した return mapping による応力の再配分で得られていることも確認した。

剥離についての特性としては、次のようなことが明らかになった。剥離強度の違いは、剥離が発生する段階の材料の挙動には大きな影響を及ぼすが、剥離の進展がある程度進みきった後の挙動にはあまり影響を及ぼさない。剥離による応力再配分の結果、最初の剥離が発生した後にさらなる界面剥離が周辺で誘発的に発生する現象も追跡できた。剥離が観察された実験との比較からは、剛性が減少する程度や、マクロな挙動の実験値との整合性を示すことができた。このように、既存のモデル同士の組み合わせで、ある程度適用可能なことが明らかになったので、我々の汎用的な平均化手法¹²⁾等を同様の手法に当てはめ、弾塑性挙動の上下界のようなものを、今後解析してみようと考えている。

参考文献

- 1) 土木学会構造工学委員会 FRP 橋梁研究小委員会: FRP 橋梁 — 技術とその展望 —, 構造工学シリーズ 14, 2004.
- 2) 武者浩透, 大熊光, 大竹明朗, 児玉明彦, 関文夫, 小林忠司: 無機系複合材料 (RPC) を用いた酒田みらい橋の設計と施工, 橋梁と基礎, Vol.36, pp.2-11, 2002.
- 3) 武者浩透, 大竹明朗, 児玉明彦, 小林忠司: 超高強度コンクリート系新素材「ダクトル」を用いた PC 橋梁の設計・施工 — 酒田みらい橋 —, プレストレストコンクリート, Vol.45, pp.40-48, 2003.
- 4) 寺田賢二郎, 菊池昇: 均質化法入門, 丸善, 2003.

- 5) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ., Hague, 1982.
- 6) Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
- 7) 賛川拓, 河原佳武, 岩熊哲夫, 王峰: 解析的手法を利用した複合材料有限要素の確率有限要素法への応用と最適化の試行, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.7, pp.355-364, 2004.
- 8) 野瀬哲郎: 超低温膨張セラミックスの開発, 東北大学—新日鉄シンポジウム「鉄と社会」, 東北大学未来科学技術共同研究センター/新日鉄技術開発本部, 2000.
- 9) Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213-222, 1965.
- 10) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 11) Ju, J.W. and Chen, T.-M.: Micromechanics and effective elastoplastic behavior of two-phase metal matrix composites, *J. Eng. Mater. Tech.*, ASCE, Vol.116, pp.310-318, 1994.
- 12) Iwakuma, T. and Koyama, S.: An estimate of average elastic moduli of composites and polycrystals, *Mech. Mater.*, Vol.37, pp.459-472, 2005.
- 13) Gamstedt, E.K. and Sjögren, B.A.: Micromechanisms in tension-compression fatigue of composite laminates containing transverse piles, *Composite Sci. and Tech.*, Vol.59, pp.167-178, 1999.
- 14) Zhao, Y.H. and Weng, G.J.: Transversely isotropic moduli of two partially debonded composites, *Int. J. Solids Structures*, Vol.34, pp.493-507, 1997.
- 15) Zhao, Y.H. and Weng, G.J.: Plasticity of a two-phase composite with partially debonded inclusions, *Int. J. Plasticity*, Vol.12, pp.781-804, 1996.
- 16) Ju, J.W. and Sun, L.Z.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part I: micromechanics-based formulation, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.183-201, 2001.
- 17) Sun, L.Z. and Ju, J.W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part II: applications, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.203-225, 2001.
- 18) 河原佳武, 谷田貝圭介, 小山茂, 岩熊哲夫: 進行する界面剥離の簡易モデルと複合材料有限要素, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.9, pp.367-375, 2006.
- 19) Tandon, G.P.: Evaluation of interfacial normal strength in a SCS-0/epoxy composite with cruciform specimens, *Comp. Sci. Tech.*, Vol.60, pp.2281-2295, 2000.
- 20) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S.: Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals, *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol.A394, pp.87-119, 1984.
- 21) Ju, J.W. and Tseng, K.H.: Effective elastoplastic behavior of two-phase ductile matrix composites: a micromechanical framework, *Int. J. Solids Structures*, Vol.33, pp.4267-4291, 1996.
- 22) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R.: *Computational Inelasticity*, Springer, New York, 1998.
- 23) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- 24) 富田佳宏: 数値弾塑性力学—有限要素シミュレーション基礎と応用—, 養賢堂, 1990.
- 25) Sun, L.Z., Ju, J.W. and Liu, H.T.: Elastoplastic modeling of metal matrix composites with evolutionary particle debonding, *Mechanics of Materials*, Vol.35, pp.559-569, 2003.
- 26) 松井和己, 寺田賢二郎: 界面剥離を考慮した弾塑性体のマルチスケール解析, 計算工学講演会論文集, Vol.7, pp.513-516, 2002.
- 27) Levy, A. and Papazian, J.M.: Tensile properties of short fiber-reinforced SiC/Al composites: part II. finite-element analysis, *Metall. Trans*, Vol.21.A, pp.411-420, 1990.
- 28) Ju, J.W. and Zhang X.D.: Effective elastoplastic behavior of ductile matrix composites containing randomly located aligned circular fibers, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.4045-4069, 2001.

(2007年4月12日受付)