

不連続面の摩擦すべりが亀裂進展挙動へ及ぼす影響に関する一考察

Effects of Frictional Slip between Crack Interfaces to Crack Growth in Quasi-brittle Solids

石井建樹*・京谷孝史**・寺田賢二郎***

Tateki ISHII, Takashi KYOYA and Kenjiro TERADA

*正会員 博(工) 木更津工業高等専門学校講師 環境都市工学科 (〒292-0041 千葉県木更津市清見台東 2-11-1)

**正会員 工博 東北大学大学院教授 土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

***正会員 Ph.D. 東北大学大学院准教授 土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

Failure processes of quasi-brittle solids like a rock mass generally involve not only cracking within constituents but also slippage between crack interfaces, especially when they are subjected to compressive loading. In this paper, these processes under uni-axial compressive loading are simulated in terms of the numerical analysis method based on the finite cover method (FCM). The results of several numerical tests demonstrate the effects of slippage between the crack interfaces to crack propagation.

Key Words : failure, frictional slip, crack, Finite Cover Method (FCM)

1. はじめに

岩盤には、不連続性岩盤と称する節理などの無数の亀裂や弱部が含まれており、強い不均質性を有している¹⁾。そのため、その変形強度特性は、節理など不連続面における摩擦すべり挙動と、それら不連続面の発生・進展挙動などが絡み合った結果として現れる。したがって、岩盤の挙動を予測するためには、こうした破壊メカニズムを把握することが重要である。不連続面を含む構造体における亀裂進展メカニズムについては、実験²⁾や論理的な検討^{3),4)}が既に行われている。これらの知見に加え、種々の力学量を算出可能な数値実験を行えば、より詳細に破壊メカニズムを検討することができると考えられる。

しかしながら、既往の不連続性岩盤を対象とした数値シミュレーションの多くは、解析モデルに結果が左右されてしまうという問題点を有していた¹⁾。例えば、連続体モデルでは亀裂進展など不連続性挙動の表現に難があり、一方で離散体の集合として岩盤を捉えた解析モデルでは、設定する不連続面の位置によって得られる結果が異なってしまう。こうした事情により、X-FEM^{5),6)}などに代表される一般化有限要素法に基づく解析手法が近年注目を集めている。これらの手法は、そのメッシュフリー的な特性により、要素分割に依存せずに亀裂進展を追跡することが可能である。

著者らも、一般化有限要素法の一つである有限被覆法(Finite Cover Method: 以下、FCM と略す)のメッシュフリー的な特性を活かして、亀裂進展解析法⁷⁾を提案している。この手法では、Lagrange 未定乗数法⁸⁾、Cohesive crack モデル⁹⁾と組み合わせることにより、不連続面での摩擦接触、破壊進行領域の挙動までを加味した亀裂進展挙動を追跡できる。

一般に、一般化有限要素法による解析例では引張・曲げ荷重下での亀裂進展を対象としている。そのため、不連続面での摩擦接触までを考慮した数値解析例は極めて少なく、それらの結果も、既存不連続面先端でのエネルギー解放率の評価¹⁰⁾や亀裂進展挙動を表現する¹¹⁾にとどまっている。

そこで本論文では、先に開発した FCM 亀裂進展解析法⁷⁾を用いて、物体内部に存在する不連続面での摩擦すべり挙動と亀裂進展挙動との関連性の把握を試みる。例題解析では、単一の不連続面を中央に配置した供試体モデルに対する一軸圧縮試験の数値実験を行い、不連続面の接触状態や摩擦特性の違い、摩擦すべり挙動と亀裂進展挙動がどのように変化するかを検討する。

2. 摩擦接触を考慮した亀裂進展解析法の概要

著者らが開発した摩擦接触を考慮した FCM 亀裂進展解析法の詳細については参考文献⁷⁾に譲ることとし、ここではその概要を述べるにとどめる。

2.1 不連続面を含む物体の静的つり合い問題

図-1 に示すように、ある状態において不連続面が生じた物体 Ω の静的つり合い問題を考える。線形弾性材料であることを仮定すると、微小ひずみ理論の枠組みで領域 Ω での静的つり合い問題は以下のような方程式群によって記述される。

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma n = \hat{t} \quad \text{on } \Gamma_{\sigma} \quad (2)$$

$$\varepsilon = \nabla^s u = \frac{1}{2} \{ \nabla u + (\nabla u)^T \} \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$u = \hat{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (4)$$

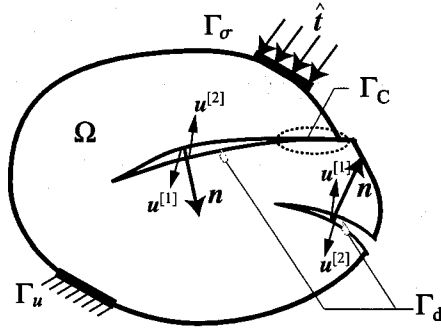


図-1 不連続面を含む物体

$$\sigma = C : \varepsilon \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

ここで、 $\sigma, \varepsilon, u, C, b$ はそれぞれ Ω における Cauchy 応力テンソル、微小ひずみテンソル、変位ベクトル、弾性係数テンソル、物体力ベクトルであり、 t は外向き単位法線ベクトル n で規定される面に作用する表面力ベクトルである。

Ω において不連続面を Γ_d と表す。 Γ_d では、向かい合う面の変位ベクトル $u^{[1]}, u^{[2]}$ および法線ベクトル $n = n^{[1]} = -n^{[2]}$ を図-1 のようであるとして、相対変位を

$$g := u^{[1]} - u^{[2]} \quad (6)$$

と定義する。ただし、 $(\cdot)^{[1]}, (\cdot)^{[2]}$ は不連続面両側の量を表すものとする。

不連続面 Γ_d では、接触条件として以下の「相補性条件」を満足する。

$$t_N u_p = t_N (g \cdot n - g_0) = 0 \quad \text{on } \Gamma_d \quad (7)$$

ここで、 u_p は開口変位、 t_N は不連続面 Γ_d 上の表面力ベクトル t の垂直成分である。また、初期開口変位 g_0 は不連続面が新たに発生し進展する場合 $g_0 = 0$ である。

さらに、不連続面 Γ_d が接触して圧縮力が作用している部分 Γ_C には、面の接線方向に摩擦抵抗が発生する。

$$\Gamma_C = \{x \in \Gamma_d \mid t_N < 0\} \subset \Gamma_d \quad (8)$$

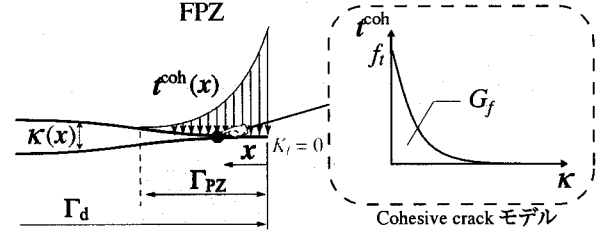
摩擦則には Coulomb 則を仮定する。

$$\|t_T\| \leq \nu |t_N| \quad \text{on } \Gamma_C \quad (9)$$

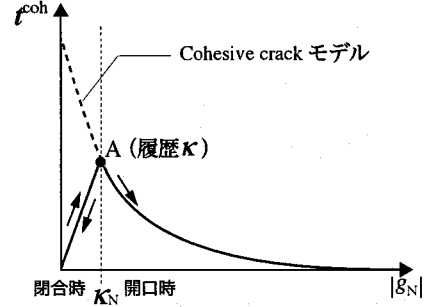
ここで、 ν は摩擦係数である。

2.2 破壊進行領域の取り扱い

亀裂進展問題では、亀裂先端近傍に生じる破壊進展領域(以下、FPZ と略す)の取り扱いが重要となる。ここで導入している FCM 亀裂進展解析法では、FPZ の応答を表現するために図-2 にその概念を示すような Cohesive crack モデル⁹⁾を採用している。Cohesive crack モデルでは、FPZ は潜在的な不連続面 Γ_{PZ} ($\Gamma_{PZ} \subset \Gamma_d$) としてモデル化され、 Γ_{PZ} に FPZ での段階的な亀裂形成挙動を表現する結合力 t^{coh} が分布して付与される。著者



(a) Cohesive crack モデル



(b) 不連続面開閉時の結合力 t^{coh}

図-2 破壊進行領域における結合力の挙動

らが提案したモデル⁷⁾では、 Γ_{PZ} 上の各位置 x における t^{coh} を次式のように与えている。

$$t^{\text{coh}} = t^{\text{coh}} \frac{g}{\|g\|}, \quad t^{\text{coh}} - f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_{PZ} \quad (10)$$

ここに、 f_t は引張強さ、 G_f は破壊エネルギーパラメータであり、履歴変数 κ は载荷履歴における最大の相対変位のノルムである。

また、接触解析へのスムーズな移行を考慮して、閉合時の結合力 t^{coh} を次式により与えるものとした。

$$t^{\text{coh}} = \frac{|u_p|}{\kappa_N} f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \quad \text{on } \Gamma_{PZ} \quad (11)$$

ここで、 $|u_p|$ は開口変位 u_p の大きさであり、 κ_N は载荷履歴内で最大となったときの開口変位を表す ($\kappa_N > 0$)。

式(10)、(11)により与えられる不連続面 Γ_{PZ} での結合力-開口変位関係を図-2(b)に示す。開口変位 $|u_p| = 0$ となるとき結合力 $t^{\text{coh}} = 0$ となる関係を与えることで、接触解析へのスムーズな移行が可能になる。

2.3 亀裂発生・進展の取り扱い

亀裂発生・進展条件には、最大主応力 σ_1 に基づく破壊条件を用いる。

$$F = \sigma_{\max} - \sigma_{cr} = 0 \quad (12)$$

ここで、 $\sigma_{\max}$ は解析モデル内に分布する最も大きな最大主応力 σ_1 であり、 σ_{cr} は亀裂発生に関する応力の基準値であり、ここでは解析対象を構成する材料の引張強さ f_t を与える。

亀裂は最大主応力 $\sigma_{\max}$ に直交する方向に発生するものとする。こうした亀裂進展について、FCM では不連続性を要素分割に依存しないで表現するため、要素の再分割を行うことなく任意方向への亀裂の発生・進展を扱うことができるのが特徴である⁷⁾。

亀裂発生条件式 (12) を満たし亀裂が発生した後、亀裂面に Cohesive crack モデルに基づく結合力

$$\mathbf{t}^{\text{coh}} = \sigma_{\max} \mathbf{n}_{\max} \quad (13)$$

を作用させ、Cohesive crack モデルを有効にすることで亀裂進展をスムーズに追跡することができる⁷⁾。また、Cohesive crack モデルの効果により、本解析で得られる亀裂進展挙動は要素寸法にあまり依存しない¹²⁾。

2.4 摩擦接触を考慮した亀裂進展問題

以上の式群によって記述される不連続面の摩擦接触を考慮した亀裂進展問題は、Lagrange 未定乗数法と鞍点定理を適用すると、最終的には次の連立変分方程式により与えられる。ただし、連立変分不等式の求解における有効制約条件法⁸⁾の適用に呼応して、式 (14) の接触部分に関する積分範囲は真の接触部分 $\bar{\Gamma}_C$ にとるものとする⁷⁾。

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\bar{\Gamma}_C} (\delta g_N \bar{\lambda}_N + \delta g_T \cdot \bar{\lambda}_T) \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{PZ}} \delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}^{\text{coh}} \, d\Gamma \\ & \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \\ & \int_{\bar{\Gamma}_C} (\delta \lambda_N \bar{u}_p + \delta \lambda_T \cdot \bar{\mathbf{g}}_T) \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \lambda_N, \forall \delta \lambda_T, \\ & \bar{\lambda}_N \geq 0, \bar{u}_p \leq 0, \bar{\lambda}_N \bar{u}_p = 0 \quad \text{on } \Gamma_d \\ & \|\bar{\lambda}_T\| \leq \nu |\bar{\lambda}_N| \quad \text{on } \Gamma_C \end{aligned} \right. \quad (14)$$

ここに、 $\bar{\Gamma}_C$ を除く不連続面 $\Gamma_d \setminus \bar{\Gamma}_C$ での表面力ベクトルは、Cohesive crack モデルにおける結合力 $\mathbf{t}^{\text{coh}}$ だけを考えればよく、第 1 式の右辺第 3 項が対応する。不連続面進展に伴う境界の逐次変化を考慮しながら、接触条件・摩擦条件を満足する連立変分方程式 (14) を解けば、不連続面での摩擦接触を考慮した進展問題の解が得られる。

3. 不連続面の摩擦特性の影響

3.1 一軸圧縮試験の概要

本論文では、図-3 に示すように、単一不連続面を配置した供試体の上面に載荷変位を与え、平面ひずみ条件下での変位制御による一軸圧縮試験の数値実験を行う。供試体の寸法は $70 \times 140 \text{ mm}$ 、その中央に水平からの角度 $\theta = 45^\circ$ で長さ 25 mm の不連続面を配置する。この既存不連続面は、過去に完全に開口した不連続面 ($\mathbf{t}^{\text{coh}} = \mathbf{0}$) であるとする。

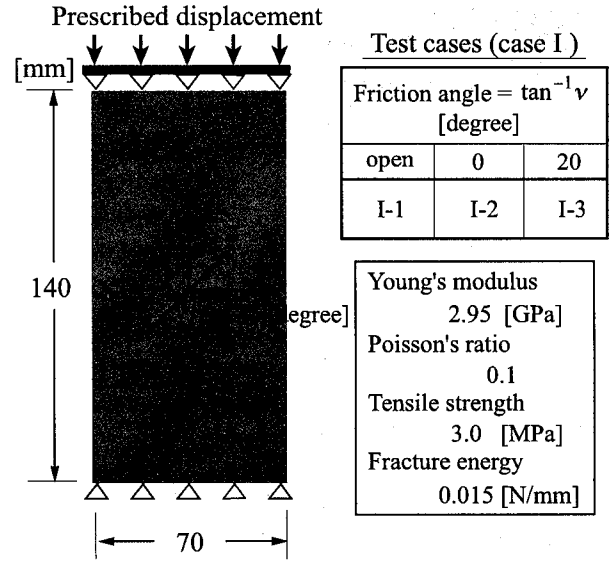


図-3 45° で配置した不連続面を含む供試体の一軸圧縮試験

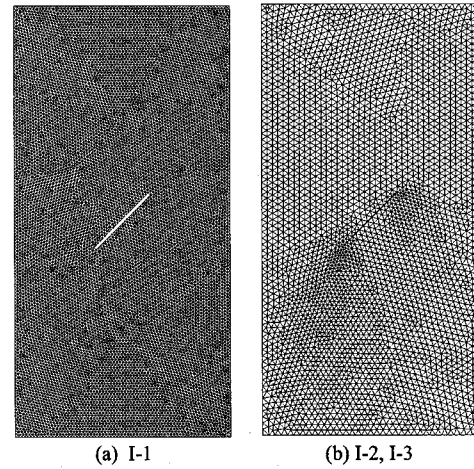


図-4 $\theta = 45^\circ$ の不連続面を含む解析モデル

図-4 にその解析モデルを示す。図-4(a) に示すモデルには幅 1.0 mm の開口不連続面を配置し、図-4(b) に示すモデルには摩擦角 0° および 20° の摩擦特性を持つ閉じた不連続面を配置する。これら 3 種類のモデルともに、基質部材料の材料パラメータを図-3 のように設定した。これらのパラメータは、石膏供試体に対する既往の実験¹³⁾より得られたものを設定している。これらのパラメータを用いた数値解析では、図-5 に示すように、寸法 $70 \times 140 \times 40 \text{ mm}$ の石膏供試体を用いた一軸圧縮試験で得られた亀裂進展経路をほぼ再現できる。なお呼称に関する混乱を避けるために、供試体が初期状態に有している既存の不連続面のみを不連続面と呼ぶものとし、載荷により新たに形成された不連続面については亀裂と呼ぶものとする。

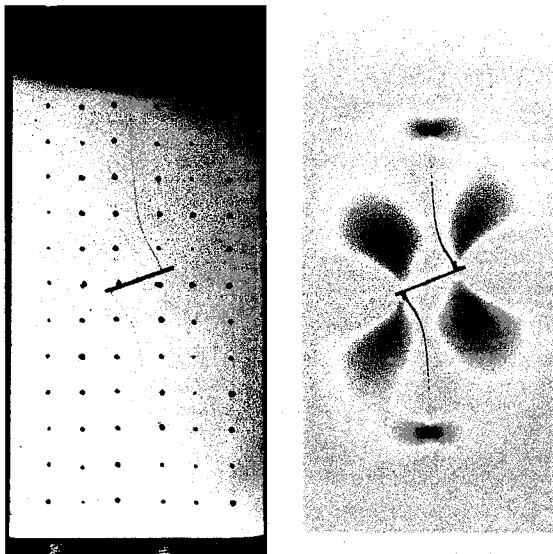


図-5 荷重変位 0.6mm 時の亀裂進展経路 (配置角度 22.5° , 左:実験結果, 右:数値シミュレーション結果)

3.2 各モデルにおける亀裂進展経路

図-6 に荷重変位 0.8mm 後の亀裂進展経路および最大主応力分布を示す。I-1 において、荷重変位 0.8mm までに不連続面の接触は生じなかった。図では、3つの供試体すべてで、亀裂が既存不連続面先端から進展している。しかし、各供試体の様子は接触の有無によって大きく異なっている。最大主応力分布を見ると、図-6(a)に示す開口不連続面を有する I-1 では、最大主応力が広範囲に分布している。これに対して、図-6(b), (c)の閉じた不連続面を有する I-2, 3 では、最大主応力は亀裂先端でのみ大きな値を示しており、局所的な箇所引張応力が集中する様子が見て取れる。

図-7 に各モデルにおける亀裂先端の軌跡を示す。開口不連続面を有する I-1 では既存不連続面に対してほぼ垂直に亀裂が発生しているのに対して、I-2, 3 ではそれよりも鉛直方向に亀裂が発生している。このような既存不連続面の接触の有無と亀裂発生方向に関する傾向は、Hoek・Bieniawski によるガラス板を用いた実験結果²⁾とほぼ一致している。また不連続面が接触している場合でも、I-2 と I-3 とではわずかに亀裂進展方向が異なっている。図-7 では不連続面の摩擦を考慮する I-3 の方が I-2 よりも鉛直方向に向かって亀裂が進展している。こうした現象は、Nemat-Nasser・Horii³⁾の指摘と整合している。

3.3 不連続面の摩擦特性と亀裂進展挙動

図-8 に荷重変位と亀裂進展距離との関係を示す。亀裂は、I-2, I-1, I-3 の順に小さい荷重変位で発生する。全てのモデルにおいて亀裂はある荷重段階で急激に進展する様子がみてとれるが、その様相は不連続面の接触状態・摩擦特性に依存して異なっている。摩擦のない

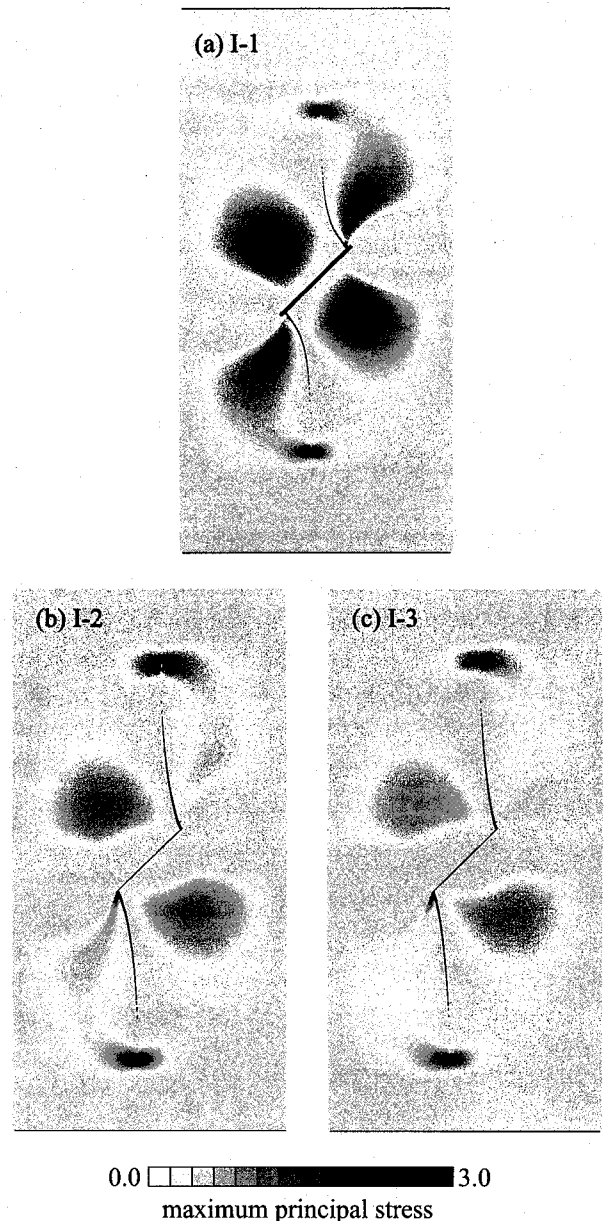


図-6 最大主応力分布・亀裂進展経路 (荷重変位 0.8mm)

接触である I-2 では、荷重変位が 0.2~0.3mm にかけて急激に亀裂が進展しているのに対して、I-1 では、全体として荷重変位に対してなだらかに増加している。さらに、摩擦接触の I-3 では、荷重初期では I-1 と比べても亀裂は進展していないが、荷重変位 0.35mm 付近になると急激な亀裂進展が生じて、I-2 の亀裂進展量に迫るところまで亀裂が伸びている。

しかしながら、既存不連続面中央での接線方向相対変位と亀裂進展距離の関係をみると、図-9 に示すように、I-2, 3 は同じ変形モード（不連続面に沿ってすべるというモード）であるため、接線方向相対変位と亀裂進展距離は一致している。したがって、すべり（接線方向相対変位）の発生の挙動が摩擦特性に依存して大きく異なることが、図-8 における亀裂進展挙動の違い

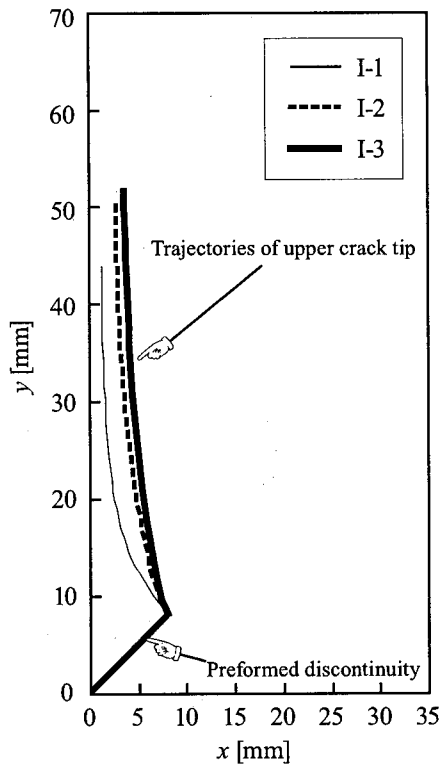


図-7 各モデルにおける亀裂進展経路 (case I)

に現れていると考えられる。

そこで、図-10の不連続面中央のすべり量(接線方向相対変位)の推移に着目すると、図-8と似通った傾向を示していることが見て取れる。I-1,2では全体的になだらかに不連続面に沿った相対変位が増加しているのに対して、I-3では荷重変位0.4mmの手前から急激にすべり量が増加している。これは、図-8でみられる急激な亀裂進展にわずかに遅れて生じた現象である。また計算過程においてある要素で亀裂が発生すると、続いてその先にある要素で次々と亀裂が生じていく現象が認められた。これらの現象は、接触面を含む物体では亀裂発生がすべりを、すべりが亀裂進展を促進することを示唆している。そして、摩擦抵抗力が存在する場合には、そうした現象が、ある荷重段階により集中する傾向があると考えられる。

以上より、摩擦接触面を有する物体における亀裂進展メカニズムは次のようにまとめられる。

1. 荷重初期段階では、摩擦抵抗力により大きな変形は生じないため、亀裂は徐々に進展する。
2. ある程度亀裂が進展すると、それにより解放された力により摩擦接触面ですべらせようとする力が増加する。
3. 結果として不連続面でのすべり量が増加し、更なる亀裂進展を促す。
4. 2., 3. の挙動が互いに作用しあうことで、ある荷重段階において急激な亀裂進展が発生する。

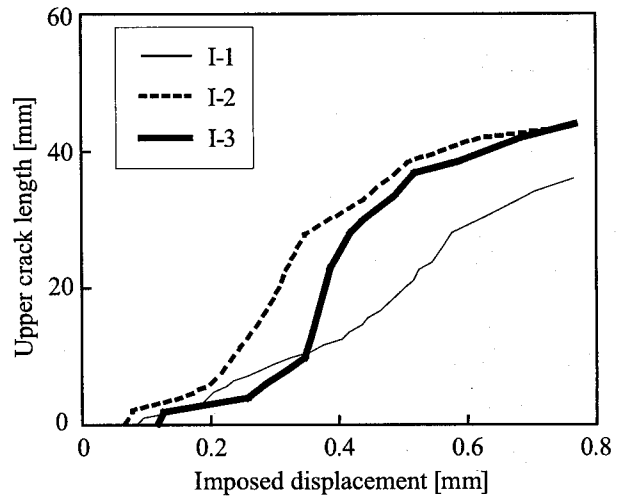


図-8 荷重変位と亀裂進展距離との関係 (case I)

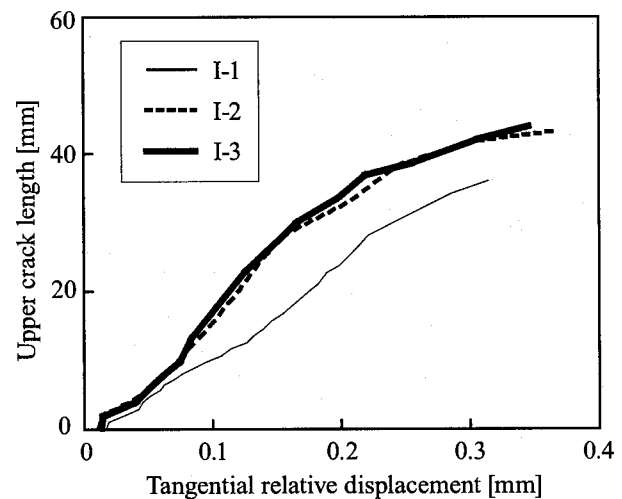


図-9 接線方向相対変位と亀裂進展距離 (case I)

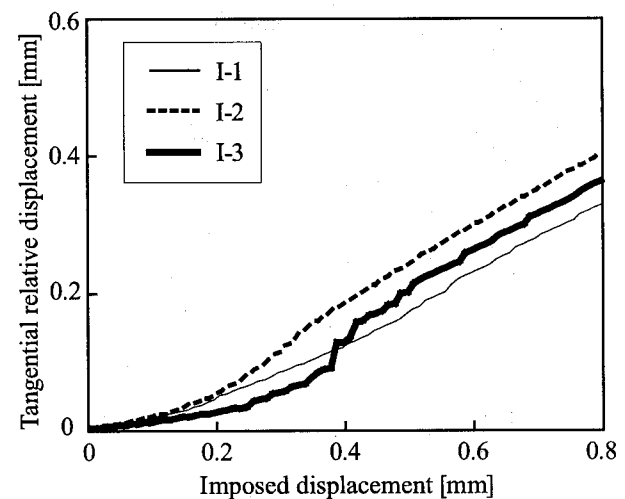


図-10 不連続面中央の接線方向相対変位の推移 (case I)

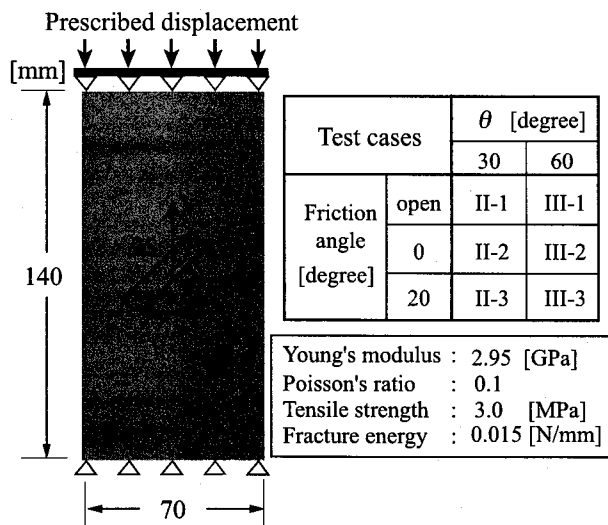


図-11 不連続面の配置角度を変化させた一軸圧縮試験

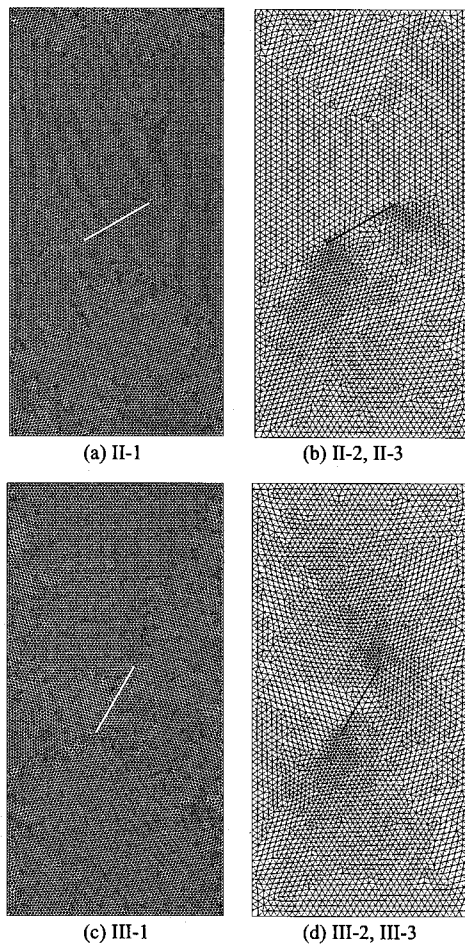


図-12 $\theta = 30^\circ, 60^\circ$ の不連続面を含む解析モデル

4. 不連続面の配置角度による亀裂進展挙動への影響

ここでは、不連続面のその中央に水平からの角度 $\theta = 30^\circ$ および 60° として、図-3と同様の数値実験を行う。

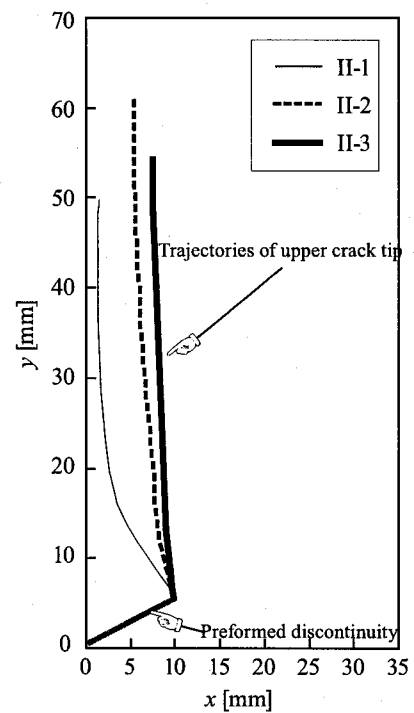


図-13 亀裂進展経路 (case II)

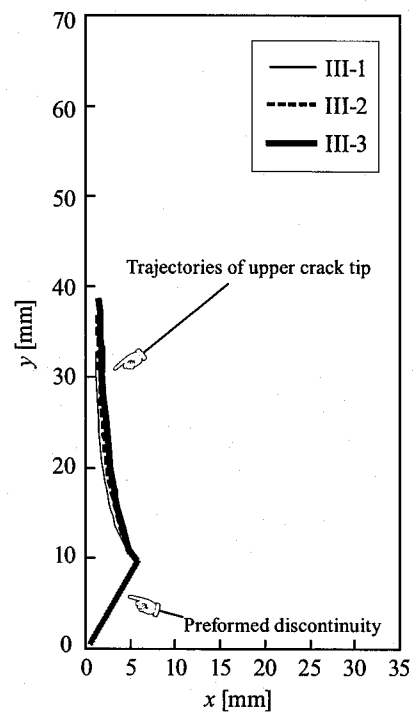


図-14 亀裂進展経路 (case III)

図-11にその試験の概要、図-12に用いた解析モデルを示す。解析パラメータは、 45° に不連続面を配置した数値シミュレーションと同じである。

図-13、図-14に各ケースにおける亀裂先端の軌跡を示す。それぞれのケースにおいて、図-7と同様に、開口不連続面を有するモデルよりも接触面を持つモデル、

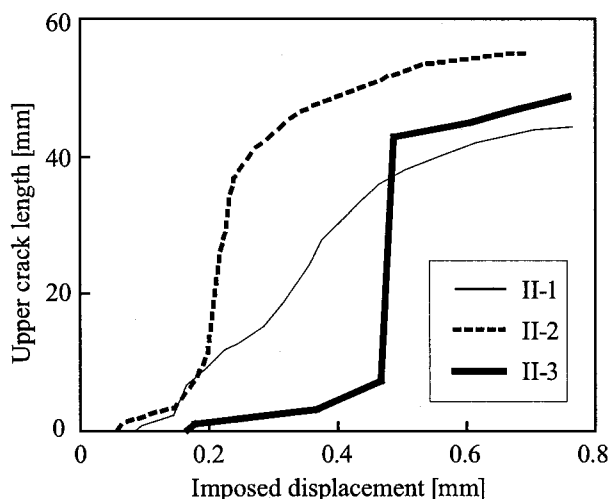


図-15 載荷変位と亀裂進展距離との関係 (case II)

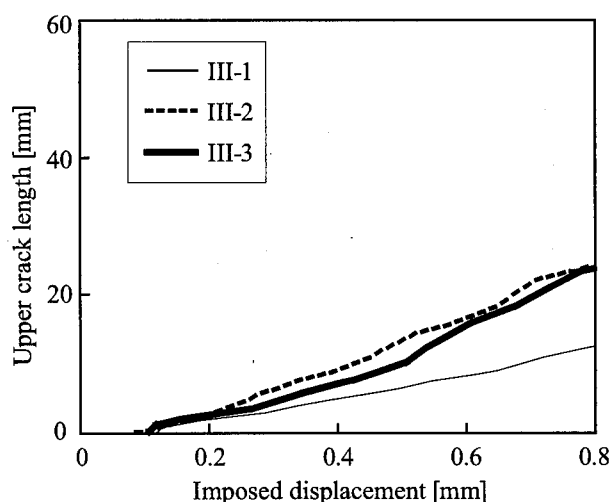


図-16 載荷変位と亀裂進展距離との関係 (case III)

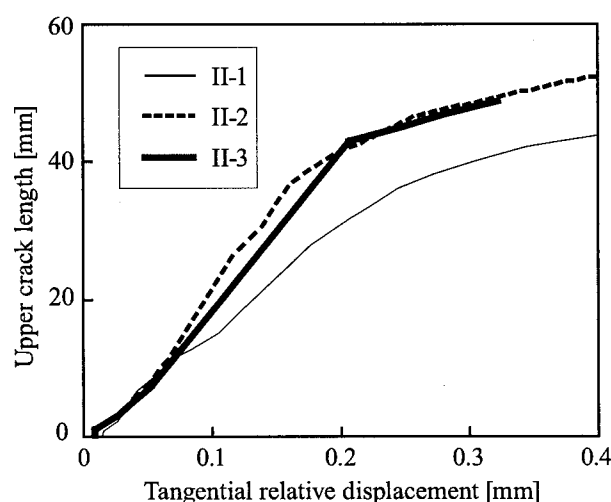


図-17 接線方向相対変位と亀裂進展距離 (case II)

摩擦のないモデルよりも摩擦抵抗のあるモデルの方が鉛直方向に向かって亀裂が進展している様子が見取れる。しかしながら、 60° に配置したモデルでは、3種類のモデルでほぼ同様の亀裂進展経路が得られており、このことは不連続面による影響があまり顕著ではないことを示唆している。また、図-7、図-13、図-14を見比べると、不連続面が低角度で配置されたモデルや接触面を持つモデルほど、亀裂が大きく進展している。

図-15、図-16に載荷変位と亀裂進展距離との関係を示す。図-15では、図-8よりも顕著に亀裂がある載荷段階で急激に進展する様子がみてとれる。これは不連続面で生じるすべりがより亀裂進展を促す方向に変位を生じさせることと、亀裂が発生したときにすべらそうとする力の増加が大きいためと考えられる。これに対して、図-16では全てのモデルにおいてなだらかに増加する亀裂進展が観察されるだけである。このことから、高角度の不連続面を配置した場合には不連続面の影響が小さいと言える。

図-17にケースIIにおけるすべり量と亀裂進展距離の関係を示す。図-9と同様に、II-2,3は同じ変形モードであるため、接線方向相対変位と亀裂進展距離はほぼ一致している。したがって、ケースIIの場合も、ケースIと同様のメカニズムによって亀裂が進展していると考えられるだろう。

5. おわりに

本論文では、不連続性岩盤のような内部に不連続面を有する物体における亀裂進展のメカニズムを検討するために、摩擦接触を考慮したFCM亀裂進展解析法⁷⁾による数値シミュレーションを実施した。その結果として、以下のような知見を得た。

- 不連続面を含む物体では、その面での接触の有無によって、生じる応力分布が異なる。
- 接触する不連続面を有する物体では、亀裂先端に引張応力が集中し、亀裂は接触しない場合よりも最終的には大きく進展する。
- 亀裂の進展方向は、不連続面の接触状態や摩擦特性に応じて変化し、すべりが生じる限りにおいては摩擦抵抗力が大きいほど鉛直方向（載荷軸方向）に進展する。
- 接触する不連続面を有する物体では、ある載荷段階において急激に亀裂が進展する。
- そうした載荷段階は不連続面の摩擦特性によって異なる。しかし、すべり量と亀裂進展量との関係は、摩擦特性に依存しない。
- 亀裂進展は、摩擦接触面においてすべらそうとする力を増長させる。
- すべりは、亀裂先端に引張応力を集中させ、亀裂進展を増長させる。

● 接触する不連続面を含む物体においては、亀裂進展と摩擦すべりの相互作用により破壊は進行する。併せて、予め配置する亀裂の配置角度を変化させた解析モデルでも、上述のメカニズムを確かめた。その際、配置角度が載荷軸方向に近くなると不連続面の応答があまり亀裂進展挙動に影響を与えないことがわかった。

本研究は、基礎的な検討に過ぎないが、今後は例題を増やし検討を行っていく。その際、検証実験や既往研究の知見と比較・検討することで、変形強度特性と密接に関連する破壊のメカニズム解明を目指す。また、亀裂進展挙動に関するスティックスリップ現象を含んだ摩擦すべり挙動の影響や、それに伴う摩擦特性の変化についても今後の課題としたい。

謝辞 : 本研究の一部は、文部科学省科学研究費補助金(若手研究B:18760356)の援助により行った。ここに記して感謝します。

参考文献

- 1) 岩盤崩落問題研究小委員会編: 岩盤崩落の考え方, 土木学会, 2004.
- 2) Hoek, E., Bieniawski, Z.T.: Brittle fracture propagation in rock under compression, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol.1, pp.137-155, 1965.
- 3) Nemat-Nasser, S., Horii, H.: Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation, and rockburst, *Journal of Geophysical Research*, Vol.87, pp. 6805-6821, 1982.
- 4) Nemat-Nasser, S., Horii, H.: Rock failure in compression, *International Journal of Engineering Science*, Vol.22, No.8-10 pp. 999-1011, 1984.
- 5) Belytschko, T., Black, T.: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.45, pp. 601-620, 1999.
- 6) Belytschko, T., Parimi, C., Moës, N., Sukumar, N., Usui, S.: Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.56, pp.609-635, 2003.
- 7) 石井建樹, 京谷孝史, 寺田賢二郎, 岸野佑次: 不連続面の摩擦接触を考慮した破壊進行の解析, 土木学会論文集 A, Vol.62, No.2, pp.371-383, 2006.
- 8) Wriggers, P.: *Computational Contact Mechanics*, John Wiley & Sons Ltd., 2002.
- 9) Hillerborg, A., Modeer, M., Petersson, P.E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement and Concrete Research*, Vol.6, pp. 773-782, 1976.
- 10) 李炳奇, 矢富盟祥: 圧縮荷重下における亀裂進展時のエネルギー解放率の X-FEM 解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.7, pp.643-653, 2004.
- 11) Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T.: A extended finite element method for modelling crack growth with frictional contact, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.194, pp. 6825-6846, 2001.
- 12) 石井建樹, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 岸野佑次: 界面要素を用いた有限被覆法に基づく破壊進展解析, 土木学会論文集, No.794/I-72, pp.213-225, 2005.
- 13) 石井建樹, 京谷孝史: 微視的亀裂進展を考慮したマルチスケール解析に基づく巨視的強度特性の予測評価, 土木学会論文集 C, Vol.63, No.2, pp.322-333, 2007.

(2007 年 4 月 12 日 受付)