

砂の平面ひずみ供試体における変形局所化挙動と有限要素法による数値分岐解析との比較

Comparative study on strain localization behavior in plane strain sand specimens with finite element-based numerical bifurcation analysis

山川優樹*・森田耕平**・池田清宏***・Jacques Desrues****

Yuki Yamakawa, Kohei Morita, Kiyohiro Ikeda, Jacques Desrues

*正会員 工博 東北大学 助教 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

**学生会員 工修 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (同上)

***正会員 Ph. D. 東北大学 教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同上)

****Dr. Ing., Professor, Laboratoire 3S, CNRS-INPG-UJF, Grenoble, France.

Deformation behaviors of soil specimens, such as strain localization and formation of shear band with some geometric patterns, are very complex and quite diversified. Recently, experimental failure behaviors of soil deformation have been extensively studied with the aid of image processing techniques such as stereophotogrammetry. This research aims to capture these failure behaviors of soils from a viewpoint of diffuse bifurcation, which engenders non-homogeneous or localized deformation from a homogeneous state. FE-based numerical bifurcation analysis and plane-strain biaxial experiments on sand by ALERT-Geomaterials are compared to provide a clear insight into the complex phenomena in soil deformation. Fully nonlinear finite deformation FE-analysis with Cam-clay or Drucker-Prager plasticity models formulated in the framework of the multiplicative finite strain theory is utilized to simulate the soil deformation. Analysis results reveal that such complex failure modes of soils are arguably caused by clustered bifurcation points and repeated occurrences of the diffuse mode bifurcations. Moreover, these analyses quantitatively well estimate the location of the bifurcation points and the degradation and oscillation of stress in the post-bifurcation regimes.

Key Words : ALERT experimental database, diffuse mode bifurcation, finite element analysis, plane strain sand specimen, plasticity, shear band, strain localization

1. はじめに

地盤材料の要素試験では、様々な形態の局所変形やある種の周期的パターンを有するせん断帯の形成など変形の多様性が見られる¹⁾。こうした現象には分岐が関与していることが明らかになりつつある^{2),3),4)}。変形ひずみ局所化の素因である分岐は、樽型など供試体の全体的な変形形態を支配する拡散型分岐と、帯状のひずみ集中領域や不連続なすべり面の形成を支配するせん断帯分岐とに分類される⁵⁾。実験・理論解析・数値解析など各種のアプローチから、地盤材料の変形・破壊における分岐現象の解明を目的とした研究が盛んに進められている。

実験での局所変形の計測においては、目視による観察では変形の定量化は困難であるため、近年では X 線 CT 法^{6),7),8),9),10)}や立体写真測量¹¹⁾などの画像処理技術など様々な手法が導入され、ひずみ・変位の精緻な定量化や 3 次元的可視化が可能となっている。現在では、こうして得られる定量的情報を如何にして物理的に有意に分析・解釈し、分岐現象の解明に活用するかが課題となっている^{12),13),14)}。さらに、多様な変形形態をもたらすという分岐現象の本質的性質により、実

験的手法に基づく現象論的観察・記述だけで分岐現象を解明するのは困難であり、理論的・数値的解析手法を援用したアプローチが不可欠である。

理論解析による分岐現象の解明も進んでおり、一様な応力・変形場から多様な局所変形形態が発現することが明らかにされている。非圧縮性材料の平面ひずみ引張り状態における分岐問題を検討した Hill and Hutchinson⁵⁾の先駆的研究をはじめとして古くから研究が行われ、最近では Yatomi et al.^{15),16)}により非共軸 Cam-clay モデルの提案とせん断帯発生に関する検討や、Yatomi and Shibi¹⁷⁾、志比ら^{18),19)}により非共軸 Cam-clay モデルを用いた平面ひずみおよび円柱(軸対称)供試体の拡散型モードに関する検討が行われるなど、地盤材料についても広範に研究が行われている。また、Hashiguchi and Tsutsumi^{20),21),22)}により降伏面(あるいは塑性ポテンシャル面)に対する接線方向の応力速度成分の影響を非弾性ひずみ速度に加えた構成モデル(接線塑性)の提案ならびにひずみ勾配依存性の導入がなされ、せん断帯の形成やせん断帯の方向・幅に関する検討が行われている。また、同様の構成モデルを用いて Khojastehpour and Hashiguchi^{23),24)}は平面ひずみおよび軸対称条件下での拡散型モードの分岐

解析を行っている。これらの研究は、地盤材料の分岐現象において構成モデルの性質が非常に重要な役割を有することを示すものである。

一方、数値解析的アプローチとしては、Asaoka and Noda²⁵⁾が局所化発生に対する幾何学的初期不整の影響を調べている。小林ら²⁶⁾は漸次的なモード遷移について論じている。中井ら²⁷⁾、宮田ら²⁸⁾は修正応力を導入した下負荷面 Cam-clay モデルを用いた微小変形・有限変形の有限要素解析を行い、局所変形の発生による基本経路からのつり合い経路の「離脱」について検討している。Oka et al.²⁹⁾、Kimoto et al.³⁰⁾は弾粘塑性モデルを用いた飽和土の土・水連成解析を行い、ダイレイタンシー・透水性・構造劣化が局所変形に及ぼす影響を調べている。また、初期不整を有しない完全系の分岐解析や分岐後の局所変形の追跡^{31),32)}、数値分岐解析と理論解との比較^{33),34)}などが行われ、地盤材料の複雑な変形挙動における分岐の介在を明らかにしている。

以上に挙げた実験以外の解析的研究アプローチでは、実験事実に基づく精緻な数理モデル（構成モデルなど）と強固な理論的基盤に基づく解析手法（有限要素法による変形解析手法など）の構築と活用が基本となる。その際、実験事実のうちのどこまでの事象を数理モデル化すべきなのか、また、その数理モデルが有する内在的性質による実現象の表現能力はどの程度なのかについて、最大限の注意を払いつつ研究を進める必要がある。より具体的には、地盤材料そのものの性質として構成式によるモデル化が必要な事象と、応力・変形に関する境界値問題の解の性質として表れるべき事象とを正しく明確に区別すべきである。このことは、たとえば要素試験であっても当てはまることであり、常に解析結果と実験事実との整合性を正当に検証しながら研究にあたる必要がある。しかしながら、実験結果と分岐解析結果との比較に主眼を置き、定量的レベルで比較検討した研究はこれまでなされていない。

そこで本研究では、実験結果と有限要素法を用いた数値分岐解析結果との比較を行い、供試体の変形過程における分岐発生について定量的検討を行う。検討対象としては、ALERT-Geomaterials がベンチマーク・データベースとして公開している砂の平面ひずみ試験結果³⁵⁾を取り上げる。このデータベースには応力・ひずみ等の要素試験の一般的な計測量だけでなく、立体写真測量により定量化されたひずみ分布やせん断帯の発生状況などの情報も含まれており、本研究で行う数値分岐解析の検証には検討対象として最適である。有限要素解析では地盤材料の基本的な力学挙動を表現しうる 2 種類の構成モデル（Cam-clay モデルと Drucker-Prager モデル）を用い、構成モデルによる分岐発生時点や分岐モードの違いを調べる。また、局所変形モードの漸次的変化と分岐との関連についても考察する。今回の数値分岐解析では拡散型分岐モードのみを対象とし、せ

ん断帯分岐モードは考慮しない。支配方程式の楕円性喪失と関わるせん断帯分岐発生³⁶⁾の判定や弱/強不連続変形としてのせん断帯進展解析^{32),37)}は行っていないが、弾塑性体の連続変形解析でも帯状のひずみ集中域が再現される。そのひずみ集中域（本論文では便宜的にこれを「せん断帯」と呼ぶこととする）が発生する位置・方向についても、拡散型分岐モードや弾塑性構成モデルの性質との関連性も考慮しつつ考察する。なお、解析においてそのような局所化が顕著になった段階では、つり合い方程式は既に楕円性を喪失して双曲型となっていることが考えられるが、その検討は本論文では対象としない。

2. ALERT による実験データベース

2.1 実験データベースの概要

本研究では“ALERT Biaxial Benchmark Data”（2002 年版）として Alliance of Laboratories in Europe for Research and Technology (ALERT-Geomaterials) が公開している砂供試体の試験結果データベース³⁵⁾を比較対象として、著者らによる有限要素法を用いた数値分岐解析との比較検討を行う。

この一連のデータベースは、フランス・グルノーブル Laboratoire 3S の Jacques Desrues を中心とする研究コミュニティが Desrues³⁸⁾、Hammad³⁹⁾、Mokni⁴⁰⁾ら複数の研究者が過去 20 年に渡って実施した実験の結果を取りまとめたもので、その一部は非排水平面ひずみ試験について文献⁴¹⁾に、排水平面ひずみ試験について文献⁴²⁾にそれぞれ紹介されている。また、過去 20 年に渡り蓄積された試験結果の概要が文献¹¹⁾に包括的に述べられている。公開データベースは主にひずみ局所化に関連した諸研究の基本ベンチマークとして利用されることを意図して提供されているものであり、本研究ではこのうち 2002 年版のデータベースを利用した。一連の実験では試料として Hostun RF 砂が用いられ、様々な密度（密詰め・緩詰め）・供試体形状・排水条件・端面境界条件で試験が行われている。全ての試験結果が公開されている訳ではないが、データベースには平面ひずみ試験のほか、軸対称（円柱形）供試体を用いた三軸試験、および等方圧密試験（載荷・除荷）の結果も含まれており、応力-ひずみ関係など要素試験での一般的な計測量は公開されている全ケースについて提供されている。さらに一部のケースについては、変形状況を写真撮影した postscript 画像、および立体写真測量により求めた各変形段階間の増分的な変位場・ひずみ場⁴³⁾の数値データも含まれているほか、変形の進行状況の連続録画記録も入手可能である。一連の実験の方法や試験結果の詳細は文献¹¹⁾に記されているが、ここでは本研究で数値分岐解析との比較対象としたケースについて、以下に簡潔に述べる。

表-1 ALERT Biaxial Benchmark Data (2002 年版) で公開されている排水平面ひずみ試験^{11),35)}

データ名	相対密度 D_r (%)	初期高さ H_0 (mm)	初期幅 L_0 (mm)	初期形状比 H_0/L_0	初期質量密度 ρ_0 (kN/m ³)	初期間隙比 e_0	有効拘束圧 σ'_3 (kPa)
shf54	緩詰め	336.5	101.0	3.33	14.03	0.852	400
shf89	密詰め	164.0	173.0	0.95	15.77	0.647	100

2.2 本研究で検討対象としたデータ

今回入手したデータベース (2002 年版) の実験ケース一覧には平面ひずみ試験 16 ケース, 三軸試験 12 ケース, 等方圧密試験 2 ケースが挙げられている。三軸試験と等方圧密試験は全ケースが公開されているが, 平面ひずみ試験で公開されているのは排水条件 2 ケース, 非排水条件 2 ケースの計 4 ケースのみである。本研究で行う有限要素解析は土骨格・間隙水の連成解析ではなく固相のみの単相解析であるため, それとの比較を前提とし, ここでは表-1 に挙げる排水条件での平面ひずみ試験 2 ケースを利用した。"shf54" は緩詰め, "shf89" は密詰めの供試体である。供試体形状比 H_0/L_0 はそれぞれ 3.33, 0.95, 有効拘束圧 σ'_3 はそれぞれ 400 kPa, 100 kPa (側圧 (セル圧) σ_c はそれぞれ 500 kPa, 130 kPa; 間隙水圧 (背圧) u はそれぞれ 100 kPa, 30 kPa) であり, 試験条件が異なっている。供試体形状比^{1),44),45)}や拘束圧は変形の局所化現象に大きく影響することが知られており, これらの条件を同一にして緩詰め・密詰めの比較もしたかったが, 公開データがなかったために今回はこの検討は行わなかった。2 ケースともに供試体の奥行き方向の厚さは 35.4 mm で, 供試体と試験装置が接する面は全て摩擦低減処理が施されている。下端面のペダスタルは固定されているが, 上端面は平面を保ちつつも自由に水平変位と回転ができる。緩詰め供試体 "shf54" は落下高さをゼロとした静的な乾燥堆積法で, 密詰め供試体 "shf89" は既定の落下高さでの空中落下法によりそれぞれ作成されている。载荷は上端面に対し 1.2 mm/min での強制変位により行われている。

2.3 実験データの整理法

本データベースで用いられている試験結果の整理法¹¹⁾を述べる。後述する数値解析結果の整理もこの方法に従う。応力は Cauchy 応力 σ , ひずみは対数ひずみ ε を用い, 結果整理の際は応力・ひずみともに便宜的に圧縮を正と表示する。例えば, 軸ひずみは $\varepsilon_a := -\ln(H/H_0)$, 体積ひずみは $\varepsilon_v^* := -\ln(V/V_0)$ とする。ここで H, V はそれぞれ供試体の高さ・体積であり, 下添字 '0' が付いている場合は変形前の値を, 添字が付いていない場合は現配置での値を意味する。但し, 数値解析の基礎となる第 3 章の定式化では引張りを正と定義する。また本論文ではとくに注記しない限り, 「応力」や「ひずみ」は供試体スケールでの巨視的観測量を指すものとする。この原則に基づき, たとえ供試体内部で変形に不均一性や局所化が生じて, 試験の始終に渡って (巨

視的な) 「応力」と「ひずみ」の主軸は互いに一致し, なおかつ各々の主軸は変化しないと見なす。実験結果は有効応力 $\sigma' := \sigma - u\mathbf{1}$ で整理するが, 数値解析は固相のみの解析 ($u = 0$) であるため全応力 σ を実験での有効応力 σ' と比較して差し支えない。本論文で対象とするのは平面ひずみ試験なので, 面外 (奥行き) 方向の主ひずみは $\varepsilon_2 = 0$ であり, また中間主応力 σ_2 は計測されていない。最大 (圧縮) 主応力 σ_1 は軸方向応力に等しく, 最小 (圧縮) 主応力 σ_3 は側圧 (セル圧) σ_c に等しい。また, 主ひずみ ε_1 は軸ひずみ ε_a に等しく, ε_3 は側方ひずみである。文献¹¹⁾と同様に, 有効応力の等方・偏差不変量をそれぞれ次の通り定義しておく。

$$p^* := \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3), \quad s^* := \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| \quad (1)$$

式 (1) の定義の下で, 供試体スケールでの巨視的な動員摩擦角 ϕ'_{mob} は次のように表される。

$$\sin \phi'_{\text{mob}} = \frac{s^*}{p^*} \quad (2)$$

また, ひずみの不変量も等方・偏差成分についてそれぞれ次の通り定義しておく。

$$\varepsilon_v^* := \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \quad \varepsilon_s^* := \frac{1}{2}|\varepsilon_1 - \varepsilon_3| \quad (3)$$

対数ひずみが弾性・塑性部分に加算分解されることを仮定すると, 式 (3) の 2 つのひずみ不変量も同様にそれぞれ弾性・塑性部分に加算分解でき, それらの塑性部分のひずみ速度を用いて巨視的な動員ダイレイタンシー角 ψ_{mob} は次のように表される。

$$\sin \psi_{\text{mob}} = -\frac{\dot{\varepsilon}_v^*}{2\dot{\varepsilon}_s^*} = -\frac{\dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_3^p}{\dot{\varepsilon}_1^p - \dot{\varepsilon}_3^p} \quad (4)$$

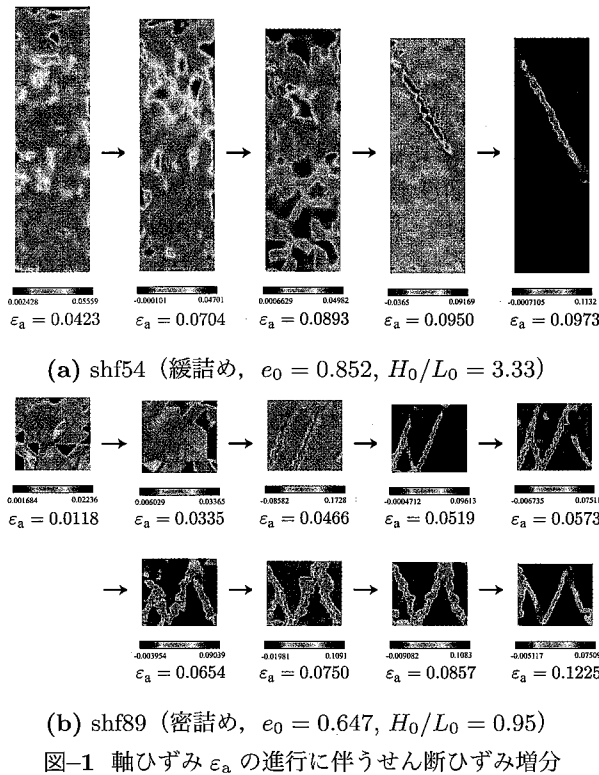
上添字 'p' はひずみの塑性部分を, 上付きドットは時間微分をそれぞれ意味する。式 (4) 右辺に負の符号が付いているのは, $\dot{\varepsilon}_v^*$ では圧縮が正であるのに対して ψ_{mob} は膨張を正と定義するためである。本論文では, 実験・解析結果の表示には式 (1), (3) で定義した不変量を用いる。なお, これらの不変量はいずれも 2 次元応力場・ひずみ場に関するものであり, 一般的な 3 次元場の不変量と区別するために上添字 (*) を付している。

2.4 試験結果の概要

試験で得られた応力-ひずみ関係などは第 4 章で数値解析結果と比較しながら示すこととし, ここでは図-1(a), (b) にそれぞれ shf54 と shf89 の変形の進行過程のみを示しておく。各図は, 前の図から当該図まで軸ひずみ ε_a が進行する間の局所的なせん断ひずみの増

表-2 shf54 と shf89 におけるせん断帯の発生^{11),35)}

データ名	軸ひずみ ε_a (せん断帯発生時)	せん断帯の平均的な角度 θ_b (発生時)	せん断帯の幅 h_b (発生時)
shf54	0.09	$28.5 \pm 1.0^\circ$	$8.9 \pm 1.0 \text{ mm}$
shf89	(記載無し)	$24.0 \pm 1.0^\circ$	$9.5 \pm 1.0 \text{ mm}$



分値を表しており、文献¹¹⁾で立体写真測量を用いて定量化されたひずみ（この値もデータベースに含まれる）をもとに、文献¹¹⁾の著者の許諾を得た上で描画しなおしたものである⁴⁶⁾。但し、ここではせん断ひずみ増分の分布のみを描いており、供試体の変形（輪郭の変化）は描いていない。局所的なひずみの算定方法（画像解析によるひずみ定量化の方法）は文献¹¹⁾に述べられている。対数ひずみを用いているので、ある物質点に着目して各図のひずみ増分を加算していけば全ひずみが求められる。表-2 には、データベースに記載されている shf54 と shf89 でのせん断帯の発生状況を示す。表中の θ_b はせん断帯と最大圧縮主応力 σ_1 方向とがなす角で表示しており、複数のせん断帯が存在する場合には平均値を取っている。なお、何らかの定量的規準に基づいてせん断帯発生を判断した旨の記述は関連文献^{11),35)}に見当たらず、目視による判断と思われる。

以下、後に示す数値解析との比較の準備として、簡単に実験結果を考察しておく。図-1(a)を見ると、shf54 では初期段階で混然としたひずみ分布であるが、 $\varepsilon_a = 0.0893$ 付近で供試体の上半分に×印状の弱いひずみ集中域が見られ、その後 $\varepsilon_a = 0.09$ 以降では表-2 の記述

と同様に供試体の上半分を斜めに貫く明瞭な1本のせん断帯が発生している。一方、図-1(b)を見ると、shf89 でも $\varepsilon_a = 0.0335$ までの初期段階ではせん断ひずみ分布は混然としているが、 $\varepsilon_a = 0.0466$ 以降で数本の平行ないしは共役方向のせん断帯が発生し、その後はそれらが進展・消失を繰り返している。shf54 では1本のせん断帯形成以降はさほどモードの変化が無いが、これと比較して shf89 では複雑なモードの変化を経ている。各図のひずみ増分のコンターレベルに着目すると、両ケースともにせん断帯発生以降でレベル最大値が大きくなっており、これは急激かつ局所的にひずみが進行していることを意味する。一方、せん断帯発生以降でレベル最小値は負値となっており、これはせん断帯以外の部分での除荷の発生を示唆している。

3. 有限要素解析と分岐解析の方法

本研究では、有限要素法による弾塑性有限変形解析を行う。また、各増分ステップのつり合い点において分岐条件の判定を行い、分岐発生の可能性が確認された場合にはつり合い経路の切替え手続き (branch switching) を行い分岐後挙動の追跡を行う。本章では、本研究で用いる有限要素法および分岐解析の手法と定式化を述べる。なお、飽和地盤材料の数値解析では一般には土・水連成解析が必要であるが、第2章で述べたように、比較対象である平面ひずみ試験は透水性の高い砂を対象としており、また緩速な単調載荷の試験であることから、間隙水の影響を考慮しない固体の単相解析で十分であると判断した。

3.1 有限要素法

本研究で用いる有限要素解析は、変形勾配の乗算分解と超弾性構成式に基づく弾塑性有限変形理論を基礎としている。弾塑性解析時の応力評価（応力積分）においては後退差分に基づく陰解法リターンマッピングを採用し、増分ステップを大きく設定しても誤差の蓄積が小さく、また、非線形つり合い式の反復解法において Newton-Raphson 法本来の2次収束が保証され、効率的な数値解析が可能である。

3.2 弾塑性構成モデル

第4章の数値解析では、比較対象とする実験ケースに応じて Cam-clay モデルと Drucker-Prager モデルの2種類の構成モデルを使い分けた。いずれの構成モデルともに地盤材料の構成モデルとしては最も基本的な

ものであり、とくに分岐現象の表現を意図した特殊なものではない。各構成モデルの応答については第4章で詳述するが、構成モデルによる分岐挙動の違いを調べる目的も含め、ここでは敢えて全く系統の異なる2種類の構成モデルにより検討を行った。砂であれば緩詰め・密詰め、粘土であれば正規圧密・過圧密などによる挙動の違いを材料定数の設定のみで統一的に表現できる構成モデルの開発は大いに意義があり、そのような構成モデルを用いた場合の分岐挙動を明らかにする必要もあるが、それは著者らの今後の課題としたい。

なお、ここでは両構成モデルともに等方性を仮定して主ひずみと主応力を用いた定式化を採用しており、有限変形にも対応するよう対数ひずみを用いている⁴⁷⁾。一般に有限変形弾塑性モデルの定式化では Kirchhoff 応力 τ を用いることが多い。しかし、地盤材料のように大きな塑性体積ひずみを示す材料では、実験曲線へのフィッティングによって材料定数を設定する際に有利であるとして Cauchy 応力 $\sigma (= \tau/J)$ を用いた定式化が提案されている⁴⁸⁾ (一般的な要素試験で制御・計測する応力は、真応力 (Cauchy 応力) ないしは公称応力 (第1 Piola-Kirchhoff 応力) に相当する)。ここではその定式化に則り、降伏関数・塑性ポテンシャル関数・塑性硬化則などを Cauchy 応力の関数として表す定式化を採用する。両モデルともに Lode 角の影響 (応力の第3不変量の影響) は考慮しないこととすると、等方性の仮定により、降伏関数などは次式で定義される Cauchy 応力の2不変量の関数として表すことができる。

$$p := \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma], \quad q := \sqrt{\frac{3}{2}} \|\hat{\sigma}\| \quad (5)$$

ここでは前述の通り応力は引張りを正としており、演算子 'tr' はトレースを表す。また $\hat{\sigma} := \sigma - p\mathbf{1}$ は偏差応力である。上式(5)で定義した不変量は3次元応力場に対するもので、先に式(1)で定義した2次元場のものとは異なる。以下に2種類の構成モデルそれぞれの定式化を簡潔に示す。但し数値解析で必要なリターンマッピングの手続きに関する説明は既往の文献^{31), 47), 48), 49)}にあるため、ここでは省略する。また、材料定数の設定については、第4章で各実験ケースに対する解析条件の説明の際に示す。

(1) Cam-clay モデル

本解析で用いた Cam-clay モデルは、Hashiguchi⁵⁰⁾ による比体積 $v (= 1 + e)$ と圧密応力 p_c の両対数関係を採用して Borja and Tamagnini⁴⁹⁾ が有限変形に拡張した修正 Cam-clay モデルを、さらに著者が Cauchy 応力を用いた定式化に書き改めたものであり、その降伏関数 f は次の通りである。

$$f(p, q, p_c) = \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) \leq 0 \quad (6)$$

とした。ここで M は限界状態定数である。塑性ひずみ硬化に関わる内部変数として先行圧密応力 p_c を採用

している。塑性流れ則は関連流れ則に従うものとした。弾性部分は文献⁴⁹⁾で提案されている2不変量表示の超弾性モデルであり、体積・せん断の弾性係数ともに応力状態に依存するものとなっている。圧密挙動を表す構成式としては、弾塑性 (正規圧密) および弾性 (除荷・再圧密) の圧縮係数をそれぞれ $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\kappa}$ として

$$\dot{\varepsilon}_v \left(= \frac{\dot{v}}{v} \right) = -\tilde{\lambda} \frac{\dot{p}_c}{p_c}, \quad \dot{\varepsilon}_v^e \left(= \frac{\dot{v}}{v} \right) = -\tilde{\kappa} \frac{\dot{p}}{p} \quad (7)$$

という関係を用いた。ここで $\varepsilon_v := \text{tr}[\varepsilon]$ は対数体積ひずみである。圧密応力 p_{c0} による正規圧密時の比体積を v_0 として式(7)をそれぞれ時間積分すると、次の両対数関係⁵⁰⁾を得る ($\varepsilon_v = \ln(v/v_0)$)。

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= -\tilde{\lambda} \ln \frac{p_c}{p_{c0}} \quad \text{for } p = p_c, \\ \varepsilon_v &= -(\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{p_c}{p_{c0}} - \tilde{\kappa} \ln \frac{p}{p_{c0}} \quad \text{for } p > p_c \end{aligned} \quad (8)$$

ここでは弾性・塑性圧縮ともに、応力比 q/p の変化による体積変化⁵¹⁾ (ダイレイタンス) は考慮していない。式(8)より、次の塑性硬化則が導かれる。

$$p_c = p_{c0} \exp[-\Theta \varepsilon_v^p] \quad (9)$$

ここで係数 Θ は微小変形理論の場合 ($\Theta = 1/(\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa})$) とは異なっており、 $\Theta := 1/[\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}(1 - \tilde{\lambda})/(1 - \tilde{\kappa})]$ である。なお、前述の通り本モデルでは関連流れ則を用いているが、Cauchy 応力を用いた定式化であるため弾塑性接線係数は対称性を有しない。従って、有限要素法における接線剛性行列も対称とはならない。

(2) Drucker-Prager モデル

本解析で用いた Drucker-Prager モデルの降伏関数 f は次の通りである。

$$f(\sigma, \mathbf{k}) := q + \alpha(p, \mathbf{k}) \cdot p - q_0(\mathbf{k}) \leq 0 \quad (10)$$

塑性ポテンシャル関数 g は式(10)中の α を β に置き換えた式であり、 $\alpha \neq \beta$ の場合は非関連流れ則となる。 $\mathbf{k}$ は塑性ひずみ硬化に関わる内部変数であり、地盤材料の場合には塑性ひずみの体積・せん断成分 ε_v^p , ε_s^p などが採用されることが多い。内部摩擦角 ϕ およびダイレイタンス角 ψ の塑性ひずみ履歴依存性 (動員) や等方応力依存性はないものとして、係数 α および β は一定値としている。 $q_0(\mathbf{k})$ は p - q 面における降伏面の q -切片であり降伏応力に相当するが、ここでは塑性ひずみ硬化・軟化はないものとして一定値とした。このとき、粘着力 c および ϕ , ψ と α , β , q_0 との関係は平面ひずみ条件の場合は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3\sqrt{3} \tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}, \quad \beta = \frac{3\sqrt{3} \tan \psi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \psi}}; \\ q_0 &= \frac{3\sqrt{3}c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \end{aligned} \quad (11)$$

本研究では砂を対象としているため $c = 0$ と考え、 $q_0 \equiv 0$ とした。なお、 $\alpha = \beta$ (関連流れ則) であっても弾塑

性接線係数は対称性を有しないことは前述の Cam-clay モデルと同様である。

3.3 拡散型分岐の発生条件 (Hill による解の唯一性の規準)

拡散型分岐は、一様な応力・変形場が持続する変形状態から一様性を喪失して不均一変形モードへと遷移する発端となるものである。分岐の後、供試体は樽型などの変形形態を呈し、負荷・除荷域が複雑に変化しながら局所化した変形となっていく。こうした拡散型分岐が発生することは、応力・変形問題の解が唯一性を失うことに相当する。Hill⁵²⁾は解の唯一性に対する十分条件を次のように与えている。

$$\int_{\varphi(B)} \Delta \bar{\sigma} : \Delta l \, dv > 0 \quad (12)$$

ここで、 Δl は基本経路・分岐経路に相当する相異なる2つの速度場 $v^{(0)}$ と $v^{(1)}$ による速度勾配 $l := v \otimes \nabla_x$ の差 ($\Delta l := l^{(1)} - l^{(0)}$) である。 $\Delta \bar{\sigma}$ は、2つの速度場に対してそれぞれ弾塑性構成式から計算される公称応力速度 $\bar{\sigma}$ の差である。式(12)で等号成立のときに解が唯一性を喪失し、基本変形モード $v^{(0)}$ と異なる解 $v^{(1)}$ が存在し、分岐の可能性が生じる。

Hill は関連流れ則に従う弾塑性体に限定し、さらに $\Delta \bar{\sigma}$ と Δl との間に一価的対応関係がある線形比較体について議論を進めている。本研究の数値分岐解析では線形比較体に対する条件式で分岐の判定を行ったが、これは式(12)よりも弱い条件であり安全側の評価となる。しかし、多くの地盤材料のように関連則に従わない弾塑性体では、材料接線係数は対称性を持たず、この場合、上述の規準では分岐点の上限値を評価していることになる⁵³⁾。これに対し、Raniecki and Bruhns⁵⁴⁾は適切な比較体を導入することにより分岐荷重の上界・下界を評価する方法を提案している。これは法線則に従わない材料に対してポテンシャルの存在を許容するような1つのパラメータを有する関数族を仮定するものであり、このパラメータの各値について分岐の可能性を検討することにより分岐荷重の上界・下界を評価できるとしている。この方法によれば式(12)よりも十分な条件で安全側に分岐点の下限値を評価できるが、この方法を用いた厳密な分岐の判定は今後の課題としたい。

3.4 数値分岐解析の手続き

数値分岐解析上の手続き⁵⁵⁾は、基本的には文献³¹⁾に準じる。しかし第3.3節で述べた通り本解析では接線剛性行列が非対称であるため、行列の対称性を前提とした LDL^T モード⁵⁶⁾は適用できない。この手法を非対称行列に一般化した手法⁵⁷⁾は現在開発中であり、ここでは行列の対称性によらず適用できる scaled corrector 法⁵⁸⁾を用いた。一般に弾塑性分岐では、分岐点が近接・集積して発生することが指摘されている⁵⁾。多重分岐点の場合、scaled corrector 法により得られる分岐モー

ドはゼロ固有値の重解に対応する複数の固有ベクトルの線形結合となり、個別の分岐モードは求められない。従って近接分岐点の場合にも、この方法で求められる分岐モードには当該分岐点に隣接する分岐点の影響が含まれることが懸念される。そこで本研究では予め試行計算を1ケース行い、厳密な固有値解析で求めた固有ベクトルと scaled corrector 法で得られた分岐モードが十分な精度で一致することを確認した上で、scaled corrector 法を用いることとした。検討結果の詳細はここでは省略するが、正規化したベクトルの内積で評価した誤差は 1.0×10^{-5} 未満程度であり、典型的な弾塑性分岐問題での分岐点の近接の程度では、隣接分岐点の影響は実用上殆ど無視できると判断した。

4. 数値解析

ここでは、第2章で紹介した“shf54”および“shf89”の有限要素解析を示す。これら2ケースの実験概要は、先に表-1に示した通りである。はじめに実験曲線に対して一様変形解析による構成式シミュレーションを行い、材料定数を決定する。その材料定数を用いて有限要素法による分岐解析を行い、分岐後の局所変形挙動を追跡する。分岐発生時点や分岐後の局所変形モードの漸次的変化過程について検討する。また、局所化の最終状態であるせん断帯の位置・方向と分岐モードや構成モデルの性質との関連性についても考察する。

4.1 shf54 供試体の数値分岐解析

(1) 実験曲線の Cam-clay 構成式シミュレーション

実験と同一の供試体形状比・側圧・端面条件で Cam-clay モデルを用いた1要素の有限要素解析を行い、一様変形時の構成式の応答曲線と実験曲線とのフィッティングにより材料定数を決定した。実験曲線と構成式応答をまとめて図-2に示す。当然ながら、1要素解析では拡散型分岐は発生せず一様変形が持続する。shf54 は緩詰め砂のため同図(c)では収縮挙動を始終示しており、そのため膨張挙動を示す Drucker-Prager モデルではなく、ここでは Cam-clay モデルを用いた。同図(a)では、軸ひずみ $\varepsilon_a = 0.09$ 付近までは曲線の傾きが次第に小さくなりながらも応力は増加を続けるが、そこから曲線は急激に折れ曲がって応力は一旦低下に転じ、その後再度増加している。この曲線の折れ曲がり局所化の発生によるものと判断される。先に示した図-1(a)でも局所化の発生は明らかである。従って、応力-ひずみ曲線の折れ曲がり後の応力低下を軟化挙動として構成式応答で表すことはせず、折れ曲がるまでの範囲だけをフィッティングの対象とした。なお、実験結果には最終段階に除荷挙動が含まれているが、これは無視している。こうして定めた材料定数の値を表-3に示す。なお、表中の先行圧密応力 p_{c0} は実験での実際の圧密応力を意味するものではなく、ここでは「初期降伏面の大きさ」という構成モデル上の意味しか持たない。

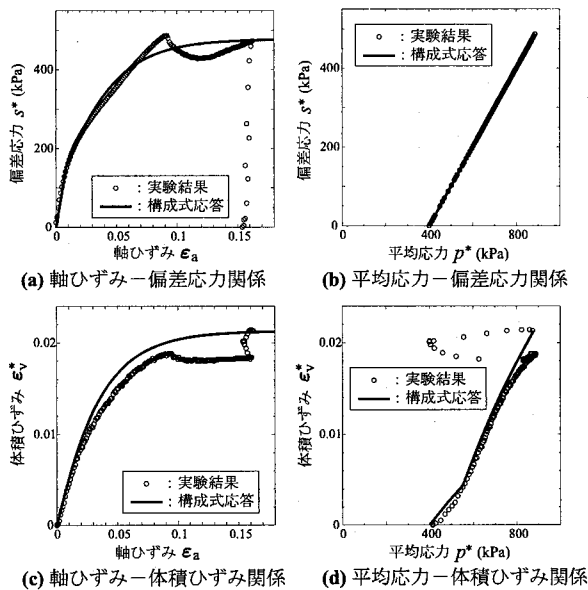


図-2 1要素解析による shf54 実験曲線の Cam-clay 構成式シミュレーション

表-3 shf54 に対する Cam-clay モデルの材料定数

弾塑性圧縮係数	λ	0.025
弾性圧縮係数	$\tilde{\kappa}$	0.015
せん断弾性係数	μ_0	12.31 MPa
μ の等方応力依存性	α	0
限界状態定数	M	0.943
内部摩擦角	ϕ_{PS}	35.0°
初期比体積	$v_0 (= 1 + e_0)$	1.852
初期等方応力	p_0	-400 kPa
先行圧密応力	p_{c0}	-680 kPa

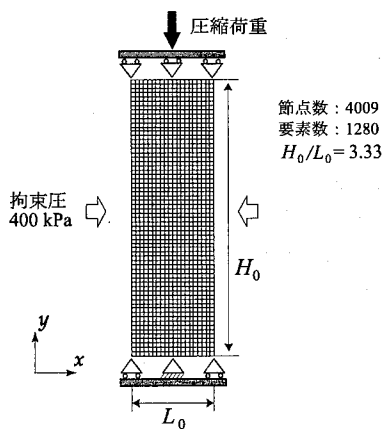


図-3 shf54 の有限要素解析モデル

(2) 有限要素法による分岐解析

表-3 の材料定数を用いて、有限要素法による分岐解析を行った。解析モデルは図-3 に示す通り 20×64 要素（節点数 4009）に分割した。有限要素は 8 節点 2 次アイソパラメトリック要素を用い、 3×3 点 Gauss 完全積分を行った。地盤の極限支持力解析などでは低減積分が用いられることが多いが、アワーグラスモードなどの要素自体の不安定挙動と分岐との誤認を避けるため、ここでは完全積分を用いた。実験では摩擦低減

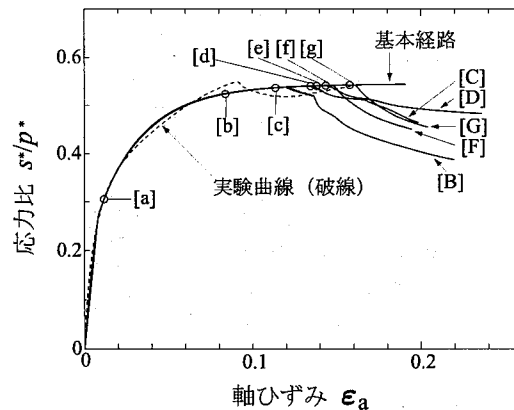


図-4 shf54 の実験曲線および FEM による基本経路と分岐経路

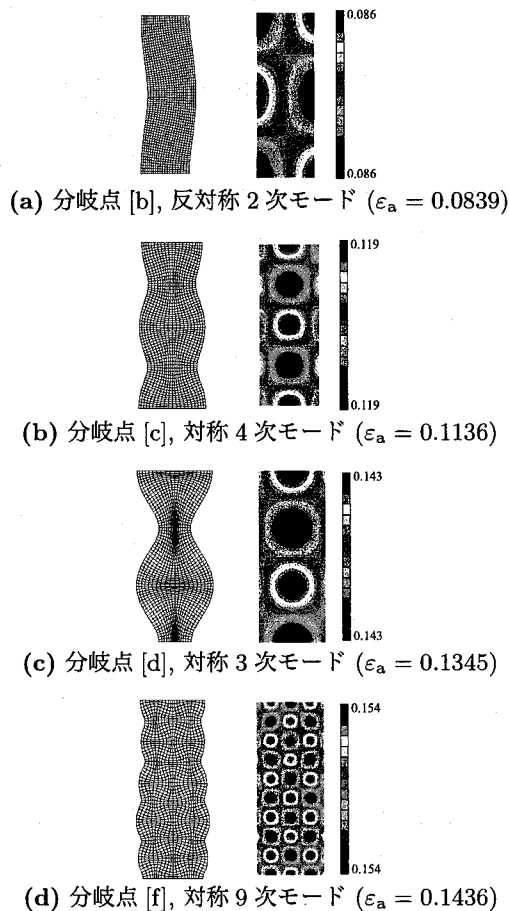


図-5 shf54 の FEM 解析で得られた分岐モード (各図左) と分岐直後のせん断ひずみ分布 (各図右)

のため上下端面に潤滑層を設けているのを考慮し、解析でも水平方向の変位は拘束していない。

解析により得られた基本経路（一様変形）と分岐経路を実線で、分岐点を (o) で図-4 に示す。比較のため、同図には実験曲線も破線で示してある。基本経路上には図-4 中 [a]~[g] で示す拡散型モードの分岐点が 7 個検出された。実験曲線が急激に折れ曲がる付近 ($\epsilon_a = 0.09$ 付近) から [b], [c], と続いて分岐点が発生し、実験でもこの付近で分岐が発生していることを示唆している。その後、解析では限界状態に近付くにつれて次第に近接

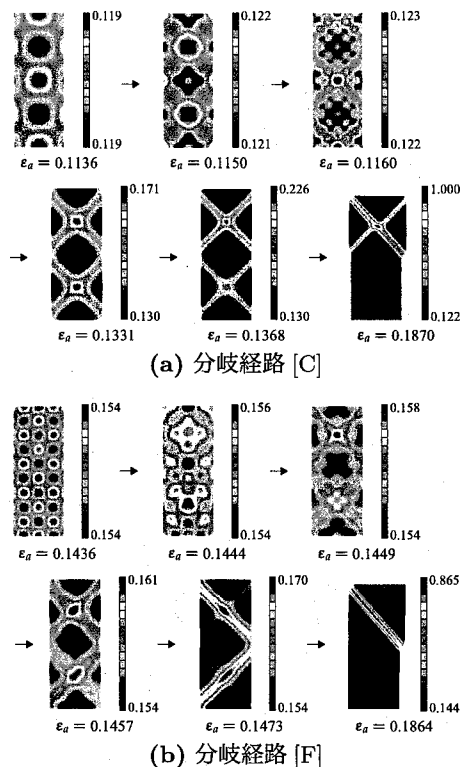


図-6 shf54 の各分岐経路上での変形形態とせん断ひずみ分布 (分岐経路 [C], [F])

して分岐点が発生するようになる。幾つかの分岐点から分岐経路を追跡した (図中に分岐点に対応するアルファベットの大文字で示す)。いずれの分岐経路においても、分岐の少し後から実験曲線と同様に応力比 s^*/p^* は低下に転じる。なお、分岐点 [a] はかなり早い段階で発生した。その分岐モードは供試体上端が水平変位する座屈状の反対称 1 次モード (図示は省略) であったが、実験でそのモードは発生していない。実験でも上端の水平変位は拘束していないため、理想的にはこのモードも発生しうることになるが、実際には装置の摩擦等の影響を受けて発生しなかったものと考えられる。

各分岐点での分岐モードと分岐直後のせん断ひずみ分布を、ここでは分岐点 [b], [c], [d], [f] について図-5 に示す。対称・反対称の様々な波数の分岐モードが得られているが、変形が進行した後で発生する分岐モードほど高次モードとなる傾向がある。図-6 に分岐経路上での変形の様子を、ここでは分岐経路 [C], [F] の 2 つを取り上げて示す。それぞれ、分岐発生から最終状態に至るまでの変形過程は各々異なっている。例えば分岐経路 [C] では、軸ひずみ 0.1331 まで上下・左右対称性を保ち×印状せん断帯が上下 2 つ発生しているが、軸ひずみ 0.1368 では上下対称性を失って上側の×印状せん断帯のみが卓越し、最終的に軸ひずみ 0.1870 では左右対称性を喪失して×印のうち一方のせん断帯のみが卓越している。一方、分岐経路 [F] では、軸ひずみ 0.1457 までは [C] と同様に上下・左右対称性を保ち上下 2 つの×印が発生しているが、軸ひずみ 0.1473 で左右対称

表-4 shf89 に対する Drucker-Prager モデルの材料定数

体積弾性係数	κ	12.50 MPa
せん断弾性係数	μ	5.77 MPa
限界応力比	α	0.943
ダイレイタンス係数	β	0.299
内部摩擦角	ϕ_{PS}	35.0°
ダイレイタンス角	ψ_{PS}	10.0°

性を失い、軸ひずみ 0.1864 で上下対称性を喪失して斜め方向 1 本のせん断帯のみが卓越している。このように対称性を喪失する順序は各々異なっているが、最終的に卓越したせん断帯の位置は 2 つとも同一となっており、その結果として図-4 では分岐経路 [C], [F] の最終的な応力比の値もほぼ同一 ([C] もこれらと同様) となっている。以上は解析で多数確認された分岐挙動の一部に過ぎないが、複雑な高次モードから何段階かを経て低次モードへと局所化していく様子は、図-1(a) の実験挙動をよく表している。ただし、分岐後の変形挙動は複雑であり、本解析で判定や制御をしていない 2 次分岐の発生もあり得るため、shf54 供試体がどの分岐経路を辿ったかを厳密に同定するのは困難である。

4.2 shf89 供試体の数値分岐解析

(1) 実験曲線の Drucker-Prager 構成式シミュレーション

Drucker-Prager モデルを用いて構成式の応答曲線と実験曲線とのフィッティングにより材料定数を決定した。実験曲線と構成式応答を図-7 に示す。shf89 は密詰め砂のため、同図 (c) では軸ひずみ $\epsilon_a = 0.01$ 付近まではわずかに収縮挙動を示すが、それ以降は膨張挙動となる。同図 (a) と (c) とを比較すると、軸ひずみ $\epsilon_a = 0.01 \sim 0.04$ の範囲では体積膨張に伴う偏差応力の増加 (材料挙動として考えれば硬化) を示しており、この挙動は shf54 で用いた古典弾塑性論による Cam-clay モデルでは表現できない。そのため、ここでは Drucker-Prager モデルを用いた、下負荷面モデル⁵⁹⁾などの非古典弾塑性モデルを用いれば、こうした密詰め砂や過圧密粘土に見られる膨張硬化挙動も表現でき、緩詰め・密詰めなど状態によらず統一的に取り扱えるが、これは今後取り入れていきたい。同図 (a) では、軸ひずみ $\epsilon_a = 0.04$ 付近で実験曲線が急激に折れ曲がって応力は低下に転じるが、その後しばらくすると応力は小さな増減を繰り返しながら漸増していく。第 4.1.(1) 項と同様に、局所化の影響で実験曲線が急激に折れ曲がる前の段階までのフィッティングにより定められた材料定数の値を表-4 に示す。

(2) 有限要素法による分岐解析

表-4 の材料定数を用いて分岐解析を行った。解析モデルは図-8 に示す通り 32×32 要素 (節点数 3201) に分割した。供試体形状比と側圧が異なる以外、変位境

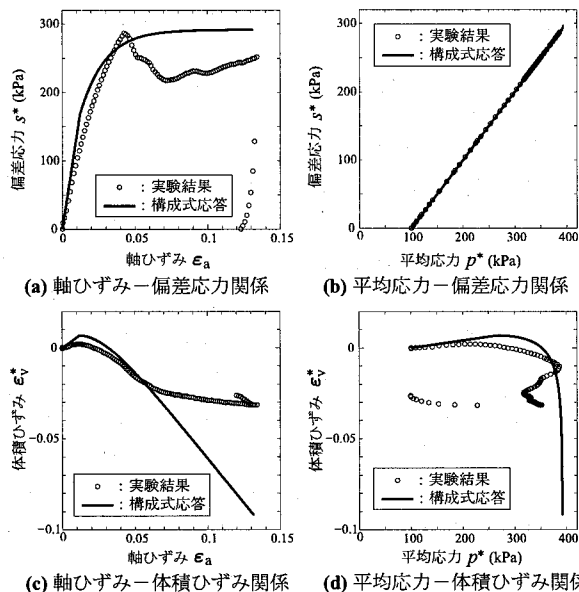


図-7 1要素解析による shf89 実験曲線の Drucker-Prager 構成式シミュレーション

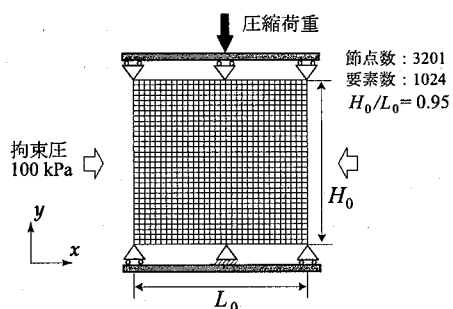


図-8 shf89 の有限要素解析モデル

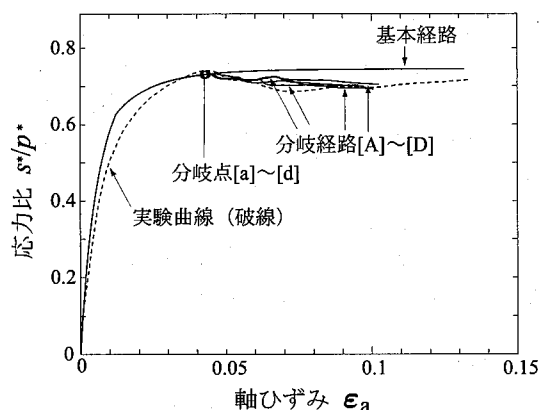


図-9 shf89 の実験曲線および FEM による基本経路と分岐経路

界条件や要素の種類などは shf54 の時と同じである。

解析により得られた基本経路と分岐経路を実線で、分岐点を (o) で図-9 に示す。また、実験曲線も破線で示してある。基本経路上には図-9 中 [a]～[d] で示す分岐点が 4 個検出された。実験曲線が折れ曲がる付近 ($\epsilon_a = 0.04$ 付近) に 4 つの分岐点が集積しており、Cam-clay を用いた shf54 の解析と比べて近接度合いが非常に高い。各分岐点から分岐経路を追跡した。いずれの経路におい

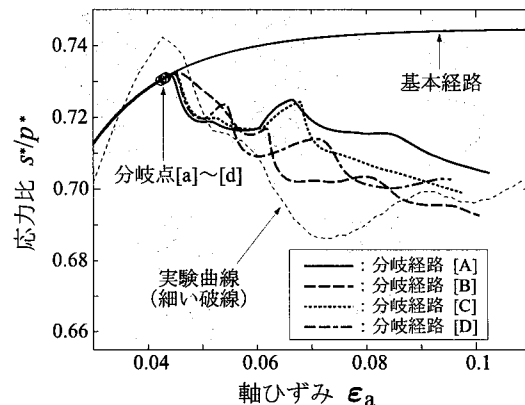
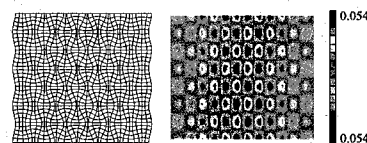
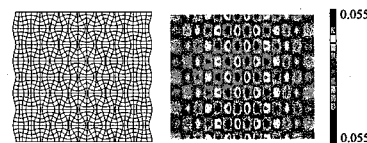


図-10 shf89 の実験曲線および FEM による基本経路と分岐経路 (分岐点近傍の拡大図)



(a) 分岐点 [b], 反対称 7 次モード ($\epsilon_a = 0.0430$)



(b) 分岐点 [d], 反対称 8 次モード ($\epsilon_a = 0.0433$)

図-11 shf89 の FEM 解析で得られた分岐モード (各図左) と分岐直後のせん断ひずみ分布 (各図右)

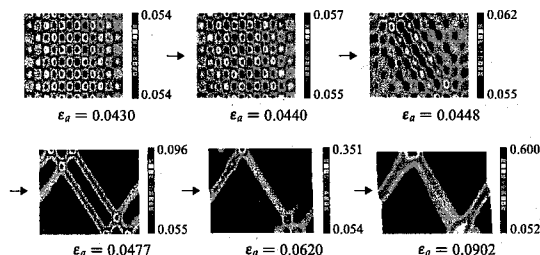
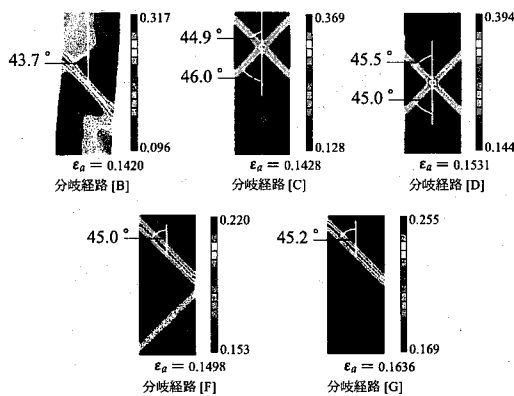


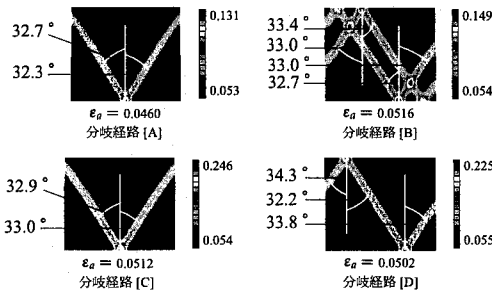
図-12 shf89 の分岐経路上での変形形態とせん断ひずみ分布 (分岐経路 [B])

ても、分岐の少し後から応力比 s^*/p^* が低下に転じており、その挙動は実験曲線を非常に良く再現している。各経路は非常に近接しているため、拡大図を図-10 に示す。実験曲線・解析結果ともに応力比は小さな増減を伴いながら全体として低下している。なお、本解析ではつり合い計算の収束規準 (残差力ベクトルのノルムで判定) を 1.0×10^{-7} kN 未満としており、この応力増減挙動はつり合い計算の誤差によるものではない。

各分岐点での分岐モードと分岐直後のせん断ひずみ分布を、ここでは分岐点 [b], [d] について図-11 に示す。先に示した Cam-clay モデルによる shf54 の分岐モード (図-5) と比べて、波数の多い高次モードが得られている。分岐モードの波数は材料の性質や供試体形状と関連していると考えられる。ここでは分岐モードの



(a) Cam-clay モデルを用いた shf54 の解析



(b) Drucker-Prager モデルを用いた shf89 の解析

図-13 各解析で得られたせん断帯の位置と角度

波数と構成モデルの性質との関連について結論付けることは出来ないが、供試体の形状比と分岐モードとの関連については報告¹⁾がある。図-12に、ここでは分岐経路[B]を取り上げて分岐後の様子を示す。分岐直後は非常に細かな網目状のひずみ分布となっているが、次第に卓越しているせん断帯の本数が少なくなっていく様子が分かる。shf54と比べて高次の分岐モードであることからせん断帯の本数が多く、またそれらの生成・消失の挙動はより複雑であり、このことが図-10に示した応力の増減挙動を引き起こしているものと推定される。このように局所化発生後に応力が増減を示す挙動は、複数のせん断帯発生時の現象として文献⁶⁰⁾でも報告されている。

4.3 分岐後の最終変形形態とせん断帯の位置・傾き

せん断帯の角度とピーク荷重時の巨視的な動員摩擦角・ダイレイタンシー角との関連については文献¹¹⁾で検討されている。ここでは、実験結果とこれまで示した数値解析結果との比較を行い、せん断帯の角度と構成モデルとの関連を調べる。なお、本論文の数値解析ではひずみ勾配依存型モデル²²⁾のような局所化領域の幅を制御できるような構成モデルは用いていないため、せん断帯の幅に関する議論はしない。

せん断帯の角度 θ_b については、Arthur et al.⁶¹⁾や Vardoulakis⁶²⁾が実験的・理論的に次式を提案している(角度 θ_b の定義は第2章の表-2での定義と同様)。

$$\theta_{b1} = 45^\circ - \frac{\phi'_{mob} + \psi_{mob}}{4} \quad (13)$$

また、いわゆる Coulomb 解として次式がある。

$$\theta_{b2} = 45^\circ - \frac{\phi'_{mob}}{2} \quad (14)$$

文献¹¹⁾には、実験でのピーク荷重時の ϕ'_{mob} , ψ_{mob} と式(13), (14)から計算したせん断帯の角度 θ_{b1} , θ_{b2} と実測値 θ_b との比較結果が報告されている。一方、先に解析で用いた材料定数を式(13), (14)に代入してみると、表-3の Cam-clay モデル(限界時)で $\theta_{b1} = 36.25^\circ$, $\theta_{b2} = 27.5^\circ$; 表-4の Drucker-Prager モデルで $\theta_{b1} = 33.75^\circ$, $\theta_{b2} = 27.5^\circ$ となる。

先に表-2に示したように、実験で発生したせん断帯の角度は shf54 で $\theta_b = 28.5 \pm 1.0^\circ$, shf89 で $\theta_b = 24.0 \pm 1.0^\circ$ である。一方、これまでの数値解析からせん断帯の角度を目視計測したものを図-13に示す。Cam-clay モデルによる shf54 の解析では $\theta_b = 43.7^\circ \sim 46.0^\circ$, Drucker-Prager モデルによる shf89 の解析では $\theta_b = 32.2^\circ \sim 34.3^\circ$ となっており、いずれの解析結果においても角度 θ_b は実験結果より大きい。前者(Cam-clay モデル)よりも後者(Drucker-Prager モデル)の方が実験結果に近い。その原因として、式(13)のようにせん断帯の角度 θ_b はダイレイタンシー角 ψ_{mob} の影響を受けることが挙げられる。Cam-clay モデルは限界状態において実質的に $\psi_{mob} = 0$ となるのに対し、今回用いた Drucker-Prager モデルは始終膨張を示す($\psi_{mob} > 0$)ことから、構成モデルによってせん断帯の角度に違いが生じることが分かる。以上の結果から、せん断帯の発生位置(の候補)は局所化が顕著となる前の段階の拡散型分岐と深く関連しているが、せん断帯の角度は構成モデルの性質が支配的と考えられる。

せん断帯の角度と構成モデルとの関連についてはこれまでも広範に検討がなされており、非共軸項の影響^{22), 63), 64), 65)}や、下荷路面モデルでは荷路面と初期降伏面との大きさの比(粘性土では過圧密比に相当)の影響²²⁾などが指摘されている。今回の解析ではせん断帯の角度の再現性については課題が残されたが、既往の研究成果を取り入れて改善の必要がある。

5. 結論

本研究では、実験結果と数値分岐解析結果との比較を行い、分岐発生時点や分岐応力の定量的検討を行った。ALERT-Geomaterials が公開している砂の平面ひずみ試験結果を比較対象とし、応力-ひずみ関係などの巨視的観測量の定量的比較だけでなく、分岐後の局所変形形態の漸次的変化過程についても考察した。

密詰め・緩詰め²⁾の2ケースの実験結果を対象とし、2種類の構成モデル(Cam-clay モデルと Drucker-Prager モデル)を用いた有限要素分岐解析を行った。その結果、地盤材料の基本的な力学挙動を最低限表現できるような単純な構成モデルであっても、構成モデルの種類によらず、分岐点の位置は実験結果と定量的に良好

な整合を示した。また、分岐後の複雑な局所変形の進展に伴う荷重-変位曲線の不安定な挙動も再現できた。

最後に、供試体の最終的な変形形態であるせん断帯の位置や角度について考察を行った。解析に用いる構成モデルの種類によってせん断帯の角度に違いが生じることを確認したが、実験結果との整合性については課題が残された。今後は実験と解析との整合性に更に注意しながら、より精緻な構成モデルや分岐判定方法を導入し、分岐現象の解明に臨んでいきたい。

参考文献

- 1) 山川優樹, 池田清宏, 須藤良清, 寺井信夫, 鳥居邦夫: 砂の三軸試験供試体の分岐変形モードと寸法・形状効果. 土木学会論文集, No. 701/III-58, pp. 357-371, 2002.
- 2) I. Vardoulakis, M. Goldscheider, G. Gudehus: Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 2, pp. 99-128, 1978.
- 3) K. Ikeda, K. Murota, Y. Yamakawa, E. Yanagisawa: Mode switching and recursive bifurcation in granular materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 45, No. 11/12, pp. 1929-1953, 1997.
- 4) K. Ikeda, K. Murota: Recursive bifurcation as sources of complexity in soil shearing behavior. *Soils and Foundations*, Vol. 37, No. 3, pp. 17-29, 1997.
- 5) R. Hill, J.W. Hutchinson: Bifurcation phenomena in the plane tension test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 6) J. Otani, Y. Obara, T. Mukunoki: Characterization of failure in soils using X-ray CT scanner. in: A. Asaoka, T. Adachi, F. Oka (eds.), Proc. of IS-Nagoya '97, *Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, pp. 311-314, 1997.
- 7) T. Mukunoki, J. Otani, T. Nagatome, Y. Kikuchi: Evaluation of engineering property of in-situ lightweight soil using X-ray CT method. in: S. Hayashi, J. Sun, C.F. Lee (eds.), Proc. of Second China-Japan Joint Symposium on Recent Development of Theory and Practice in Geotechnology, pp. 292-299, 1999.
- 8) J. Otani, T. Mukunoki, Y. Obara: Application of X-ray CT method for characterization of failure in soils. *Soils and Foundations*, Vol. 40, No. 2, pp. 111-118, 2000.
- 9) 大谷順, 椋木俊文, 永留健, 菊池喜昭: X線CTスキャナを用いた一軸圧縮下における気泡混合処理土の破壊現象解明. 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 3, pp. 57-64, 2000.
- 10) K.A. Alshibli, S. Sture, N.C. Costes, M.L. Frank, M.R. Lankton, S.N. Batiste, R.A. Swanson: Assessment of localized deformations in sand using X-ray computed tomography. *Geotechnical Testing Journal*, American Society for Testing and Materials, Vol. 23, No. 3, pp. 274-299, 2000.
- 11) Jacques Desrues, Gioacchino Viggiani: Strain localization in sand: an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 28, pp. 279-321, 2004.
- 12) 佐々木寛典, 池田清宏, 市村強, 山川優樹, 須藤良清, 高村浩之: 砂の平面ひずみ変形挙動の分岐メカニズムに基づく分析法. 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 7, pp. 493-504, 2004.
- 13) 池田清宏, 市村強, 高村浩之, 須藤良清, 堤成一郎: 土の平面ひずみ供試体の変形挙動の分岐メカニズムに基づく画像処理法. 土木学会論文集, No. 757/III-66, pp. 167-176, 2004.
- 14) Kiyohiro Ikeda, Hironori Sasaki, Tsuyoshi Ichimura: Diffuse mode bifurcation of soil causing convection-like shear investigated by group-theoretic image analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 54, pp. 310-339, 2006.
- 15) C. Yatomi, A. Yashima, A. Iizuka, I. Sano: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-Clay model. *Soils and Foundations*, Vol. 29, pp. 41-53, 1989.
- 16) C. Yatomi: Conditions for the localization of deformation in finite elastic-plastic deformations. in: T. Adachi, F. Oka, A. Yashima (eds.), Proc. of the 4th International Workshop on Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks, pp. 209-218, 1998.
- 17) C. Yatomi, T. Shibi: Antisymmetric bifurcation analysis in a circular cylinder of a non-coaxial Cam-clay model. in: A. Asaoka, T. Adachi, F. Oka (eds.), Proc. of IS-Nagoya '97, *Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, pp. 9-14, 1997.
- 18) 志比利秀, 矢富盟祥, 亀井健史: 平面ひずみ非排水圧縮条件下における供試体寸法比の変化が正規圧密粘土の分岐荷重に及ぼす影響. 土木学会論文集, No. 666/III-53, pp. 181-192, 2000.
- 19) 志比利秀, 亀井健史, 矢富盟祥: 粘性土の平面ひずみ非排水伸張試験における分岐解析とその圧縮試験との比較. 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 5, pp. 357-366, 2002.
- 20) K. Hashiguchi, S. Tsutsumi: Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect. *International Journal of Plasticity*, Vol. 17, pp. 117-145, 2001.
- 21) K. Hashiguchi, S. Tsutsumi: Shear band formation analysis in soils by the subloading surface model with tangential stress rate effect. *International Journal of Plasticity*, Vol. 19, pp. 1651-1677, 2003.
- 22) K. Hashiguchi, S. Tsutsumi: Gradient plasticity with the tangential-subloading surface model and the prediction of shear-band thickness of granular materials. *International Journal of Plasticity*, Vol. 23, pp. 767-797, 2007.
- 23) Mehdi Khojastehpour, Koichi Hashiguchi: Plane strain bifurcation analysis of soils by the tangential-subloading surface model. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 5541-5563, 2004.
- 24) Mehdi Khojastehpour, Koichi Hashiguchi: Axisymmetric bifurcation analysis in soils by the tangential-subloading surface model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 52, pp. 2235-2262, 2004.
- 25) A. Asaoka, T. Noda: Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries. *Soils and Foundations*, Vol. 35, No. 1, pp. 83-100, 1995.
- 26) 小林一三, 飯塚敦, 太田秀樹: 正規粘土供試体せん断時における局所変形の遷移. 土木学会論文集, No. 617/III-46, pp. 1-18, 1999.
- 27) 中井照夫, 檜尾正也, 荒巻景介: 粘性土の変形の局所化メカニズムに関する解析的研究. 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 5, pp. 339-348, 2002.
- 28) 宮田眞由美, 中井照夫, 檜尾正也, 村上一徳: 微小・有限変形理論に基づく粘土の変形の局所化解析. 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 6, pp. 455-465, 2003.
- 29) Fusao Oka, Yosuke Higo, Sayuri Kimoto: Effect of dilatancy on the strain localization of water-saturated elasto-viscoplastic soil. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, Issues 13-14, pp. 3625-3647, 2002.
- 30) Sayuri Kimoto, Fusao Oka, Yosuke Higo: Strain local-

- ization analysis of elasto-viscoplastic soil considering structural degradation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 2845–2866, 2004.
- 31) 山川優樹, 寺田賢二郎, 池田清宏, 鳥居邦夫: 圧縮場における弾塑性体の分岐解析とパスジャンプ挙動. 土木学会論文誌, Vol. 701/III-58, pp. 73–86, 2002.
 - 32) 山川優樹, 池田清宏, 寺田賢二郎, 佐藤啓介, 鳥居邦夫: セン断帯分岐モードと強不連続変形の有限変形解析. 土木学会論文誌, Vol. 743/III-64, pp. 59–76, 2003.
 - 33) 志比利秀, 亀井健史, 永吉雄大: 分岐理論を用いた有限要素解析によるせん断帯の発生予測. 島根大学総合理工学部紀要, Ser. A, Vol. 34, pp. 29–37, 2000.
 - 34) 佐藤啓介, 山川優樹, 堤成一郎: 平面ひずみ圧縮を受ける乗算分解型超弾性—塑性材料の拡散型分岐条件に関する理論解法と数値解法との比較. 応用力学論文誌, 土木学会, Vol. 8, pp. 519–530, 2005.
 - 35) Jacques Desrues: ALERT Biaxial Benchmark DATA (公開ベンチマークデータの説明文書), 2002.
 - 36) Ronald I. Borja: Bifurcation of elastoplastic solids to shear band mode at finite strain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 5287–5314, 2002.
 - 37) Ronald I. Borja: Finite element simulation of strain localization with large deformation: capturing strong discontinuity using a Petrov–Galerkin multiscale formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 2949–2978, 2002.
 - 38) J. Desrues: La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires. *Thèse de Doctorat es Science*, USMG and INPG, Grenoble, France, 1984.
 - 39) W. Hammad: Modélisation non linéaire et étude expérimentale des bandes de cisaillement dans les sables. *Thèse de Doctorat de l'Université J. Fourier*, Grenoble, France, 1991.
 - 40) M. Mokni: Relations entre déformations en masse et déformations localisées dans les matériaux granulaires. *Thèse de Doctorat de l'Université J. Fourier*, Grenoble, France, 1992.
 - 41) Moncef Mokni, Jacques Desrues: Strain localization measurements in undrained plane-strain biaxial tests on Hostun RF sand. *Mechanics of Cohesive–Frictional Materials*, Vol. 4, pp. 419–441, 1998.
 - 42) Jacques Desrues: Localization patterns in ductile and brittle geomaterials. in: *Material Instabilities in Solids*, René de Borst, Erik van der Giessen (eds.), Wiley Interscience Europe, pp. 137–158, 1998.
 - 43) J. Desrues, B. Duthilleul: Mesure du champ de déformation d'un objet plan par la méthode stéréophotogrammétrique de faux relief. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Vol. 3, No. 1, pp. 79–103, 1984.
 - 44) 佐藤啓介, 山川優樹, 池田清宏, 鳥居邦夫: 分岐解析によるひずみ局所化現象における供試体形状と境界条件の影響に関する検討. 応用力学論文誌, 土木学会, Vol. 5, pp. 329–338, 2002.
 - 45) Kiyohiro Ikeda, Yuki Yamakawa, Seiichiro Tsutsumi: Simulation and interpretation of diffuse mode bifurcation of elastoplastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, pp. 1649–1673, 2003.
 - 46) 田村崇: 砂のせん断変形挙動の画像解析と分岐メカニズムの解明. 東北大学工学部土木工学科卒業論文, 2006.
 - 47) J.C. Simo: Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 99, pp. 61–112, 1992.
 - 48) G. Meschke, W.N. Liu: A re-formulation of the exponential algorithm for finite strain plasticity in terms of cauchy stresses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 173, pp. 167–187, 1999.
 - 49) Ronaldo I. Borja, Claudio Tamagnini: Cam-Clay plasticity Part III: Extension of the infinitesimal model to include finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 155, pp. 73–95, 1998.
 - 50) Koichi Hashiguchi: On the linear relations of $v\text{-}\ln p$ and $\ln v\text{-}\ln p$ for isotropic consolidation of soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, short communication, Vol. 19, pp. 367–376, 1995.
 - 51) 柴田徹: 粘土のダイラタンシーについて. 京都大学防災研究所年報, 第 6 号, pp. 128–134, 1963.
 - 52) R. Hill: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 6, pp. 236–249, 1958.
 - 53) J.R. Rice, J.W. Rudnicki: A note on some features of the theory of localization of deformation. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 16, Issue 7, pp. 597–605, 1980.
 - 54) B. Raniecki, O.T. Bruhns: Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 29, No. 2, pp. 153–172, 1981.
 - 55) 藤井文夫, 大崎純, 池田清宏: 構造と材料の分岐力学. 計算工学シリーズ 3, コロナ社, 2005.
 - 56) 藤井文夫, 野口裕久: 固有値解析を必要としない大規模非線形構造系の分岐屈曲モードの求め方. 構造工学論文誌, 土木学会, Vol. 46A, pp. 241–250, 2000.
 - 57) Fumio Fujii, Yuki Yamakawa: Left and right eigenvectors extracted from the LDU-decomposed Jacobian matrix in stability problems. Proc. of AP-COM '07/EPMESE XI (to appear).
 - 58) 野口裕久, 久田俊明: Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発. 日本機械学会論文誌 (A 編), Vol. 58, No. 555, pp. 2191–2198, 1992.
 - 59) K. Hashiguchi, M. Ueno: Elastoplastic constitutive laws for granular materials. in: S. Murayama, A.N. Schofield (eds.), Proc. of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, *Constitutive Equations of Soils*, JSSMFE, pp. 73–82, 1977.
 - 60) A. Gajo, D. Bigoni, D. Muir Wood: Multiple shear band development and related instabilities in granular materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 52, pp. 2683–2724, 2004.
 - 61) J.R.F. Arthur, Q. Dunstan, Q.A.J. Al-Ani, A. As-sadi: Plastic deformation and failure in granular media. *Géotechnique*, Vol. 27, No. 1, pp. 53–74, 1977.
 - 62) I. Vardoulakis: Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 4, No. 2, pp. 103–119, 1980.
 - 63) 石崎仁: 非共軸項を付加したひずみ硬化弾塑性構成式による 2 次元局所変形解析. 土木学会論文誌, No. 603/III-44, pp. 113–127, 1998.
 - 64) 志比利秀, 亀井健史, 永吉雄大, 武田幸子: 平面ひずみ非排水圧縮せん断中に形成されるせん断帯の傾きと非共軸パラメータの関係. 島根大学総合理工学部紀要, Ser. A, Vol. 35, pp. 61–73, 2001.
 - 65) 志比利秀, 亀井健史: 非共軸パラメータの違いが平面ひずみ非排水伸張条件下における分岐解析結果から予測されるすべり面形状に及ぼす影響. 土木構造・材料論文誌, 九州橋梁構造工学研究会, Vol. 19, pp. 41–47, 2003.

(2007 年 4 月 12 日 受付)