

直交基底気泡関数要素を用いた陽的有限要素流れ解析

Explicit Finite Element Flow Analysis using Orthogonal Basis Bubble Function Element

松本純一*

Junichi MATSUMOTO

*正会員 工博 独) 産業技術総合研究所 先進製造プロセス研究部門 (〒 305-8564 つくば市並木 1-2-1)

An explicit finite element method with orthogonal basis bubble function element is proposed in this paper. As the numerical approach, the spacial discretization is applied the mixed interpolation for velocity and pressure fields by the bubble element and linear element, respectively. The two-level three-level formulation with bubble function that is bubble function element stabilization method is proposed for the incompressible viscous flow. The special bubble function with two-level partition is extended as orthogonal basis bubble function element. Three-level bubble function is applied the induction of stabilized operator control term. To verify applicability of presented method, standing vortex problem and cavity flow are performed for the numerical examples.

Key Words : *orthogonal basis bubble function element, explicit finite element method, incompressible Navier-Stokes equations, LES, two-level three-level finite element approximation*

1. はじめに

時間方向の離散化に, Runge-Kutta 法や多段階法などを用いる場合, 解析すべき未知量を求めるために質量行列の逆行列が必要となる. 上記の方法を採用して計算を行なうときには, 有限要素法での質量行列は, 一般的に疎な分布行列 (整合質量行列) となるため, 記憶容量・計算時間の計算効率を考え, 通常は質量行列の各行の成分を足し合わせて対角項のみに成分をもたせた近似行列 (集中質量行列) が使用される¹⁾. 集中質量行列を使用した場合, 集中質量行列が元の質量行列の近似行列であるので, 非定常移流方程式などでは計算精度が悪く, 得られた結果の信頼性に問題がある. 本研究では, この問題を解決するため, 気泡関数要素を使用した有限要素解析において, 質量行列の近似を行わずに, 質量行列が対角行列となる気泡関数を適用する²⁾. すなわち, 気泡関数要素の基底 (形状関数) が直交する条件を導入して, 計算精度の落ちない (近似のない) 対角行列となる質量行列を用いることが可能な, 直交基底気泡関数要素による信頼性の高い陽的有限要素法を提案する.

本論では時間方向の離散化として, Jameson-Baker の m ステップ Runge-Kutta 法³⁾による多段階陽解法を採用し, 移流拡散方程式, Navier-Stokes 方程式の解析, LES (Large Eddy Simulation)⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾に対する直

交基底気泡関数要素安定化法を提案する. まず, 検証の計算として移流拡散方程式における Rotating Cone 問題をとりあげ, 既往提案されている代表的な陽解法との比較検討を行い, 陽的有限要素法による本提案手法の優位性を示す. 次に, Navier-Stokes 方程式における Standing Vortex 問題, Cavity 流れ解析により, 本提案手法の計算性能について検討する. 最後に, 球周流れ解析を用いて, LES モデルを適用したことによる効果についての検証と考察を行う.

2. 気泡関数要素

三角形 (四面体) 要素の気泡関数要素は, 各要素において三角形 (四面体) を形成する 3(4) 点と重心点の 4(5) つの節点を用いて図-1 のアイソパラメトリック座標系で式 (1) のように表される (表現形式 1).

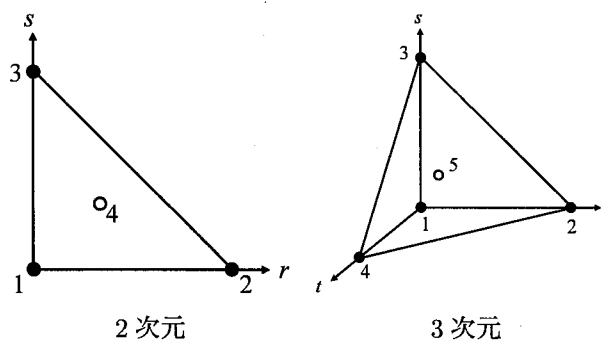


図-1 気泡関数要素

$$u_h|_{\Omega_e} = \sum_{\alpha=1}^{N+1} \Phi_\alpha u_\alpha + \phi_B u_B \quad (1)$$

$$\Phi_\alpha = \Psi_\alpha - \frac{1}{N+1} \phi_B, \quad \alpha = 1 \cdots N+1 \quad (2)$$

式 (2) 中の Ψ_α は、2次元および3次元の一次要素を用いた形状関数、 N は空間次元数であり

$$2D: \Psi_1 = 1 - r - s, \Psi_2 = r, \Psi_3 = s \quad (3)$$

$$3D: \Psi_1 = 1 - r - s - t, \Psi_2 = r, \Psi_3 = s, \Psi_4 = t \quad (4)$$

である。また、 ϕ_B は気泡関数である。気泡関数は要素境界上においてその値が0となり、重心点で値が1となるように要素毎に定義される。気泡関数要素の補間関数は、三角形（四面体）一次要素の補間関数と気泡関数を用いて式 (5) のように書き換えることができる（表現形式2）。

$$u_h|_{\Omega_e} = \bar{u}_h|_{\Omega_e} + u'_h|_{\Omega_e} \quad (5)$$

$$\bar{u}_h|_{\Omega_e} = \sum_{\alpha=1}^{N+1} \Psi_\alpha u_\alpha \quad (6)$$

$$u'_h|_{\Omega_e} = \phi_B u'_B \quad (7)$$

$$u'_B = u_B - \frac{1}{N+1} \sum_{\alpha=1}^{N+1} u_\alpha \quad (8)$$

3. 移流拡散方程式における直交基底気泡関数要素安定化法

3.1 移流拡散方程式

移流拡散方程式は以下のように表される。

$$\dot{u} + a_j u_{,j} - \nu u_{,jj} = f \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (9)$$

u, a_j, ν, f はある物理量、流速、拡散係数、外力である。

3.2 気泡関数要素安定化法^{2),9)}

近似空間に2レベル、重み空間に3レベルを採用する2レベル-3レベル近似に基づいた気泡関数要素の定式化では、次の1次要素の有限要素空間 $\hat{V}^h$ と気泡関数の空間 $V^{h'}$ を用いる。

$$\bar{V}^h = \{\bar{v}^h \in H_0^1(\Omega); \bar{v}^h|_{\Omega_e} \in P1(\Omega_e)\} \quad (10)$$

$$V^{h'} = \{v^{h'} \in H_0^1(\Omega); v^{h'}|_{\Omega_e} \in \phi_B v'_B, v'_B \in \mathbf{R}\} \quad (11)$$

$$\hat{V}^h = \{\hat{v}^h \in H_0^1(\Omega); \hat{v}^h|_{\Omega_e} \in \varphi_B v'_B, v'_B \in \mathbf{R}\} \quad (12)$$

Ω, Ω_e は全体領域、要素領域であり、 $P1(\Omega_e)$ は要素領域 Ω_e で定義される一次多項式を示す。 $H_0^1(\Omega)$ は Sobolev 空間 $H^1(\Omega)$ の元であり、0回以下の導関数が全体領域 Ω の境界 Γ ですべて0になるものの集合を示す。 ϕ_B, φ_B は要素領域 Ω_e を台とする2レベル気泡関

数、3レベル気泡関数（安定化作用制御項を導く気泡関数）である。2レベル気泡関数は近似解の補間を用いる関数であり、適合型の気泡関数であれば任意のものが採用できる。3レベル気泡関数は安定化作用制御項を導出するための条件として、下記式を満たす気泡関数である。

$$\langle 1, \varphi_B \rangle_{\Omega_e} = \langle \phi_B, \varphi_B \rangle_{\Omega_e} = 0 \quad (13)$$

$\langle u, v \rangle := \sum_{e=1}^{N_e} \langle u, v \rangle_{\Omega_e} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} uv \, d\Omega$ であり、 N_e は要素数である。有限要素空間として $V^h = \bar{V}^h \oplus V^{h'}$ を用いて有限要素近似解 $u^h \in V^h$ を見いだす次の近似問題が得られる。

$$\langle \dot{u}_h + a_j^h u_{,j}^h - \nu u_{,jj}^h - f, \hat{v}^h \rangle = 0 \quad \forall \hat{v}^h \in \hat{V}^h \quad (14)$$

V^h に属する近似解 u^h と

$$\hat{V}^h = \bar{V}^h \oplus \{v^{h'} + \hat{v}^{h'}; v^{h'}|_{\Omega_e} + \hat{v}^{h'}|_{\Omega_e} = (\phi_B + \varphi_B) v'_B\},$$

に属する重み関数 $\hat{v}^h$ は次のようになっている。

$$u^h = \bar{u}^h + u^{h'}, \quad \hat{v}^h = \bar{v}^h + v^{h'} + \hat{v}^{h'} = v^h + \hat{v}^{h'} \quad (15)$$

式 (14) は、以下のように書きかえることができる。

$$\langle \dot{u}^h + a_j^h u_{,j}^h - \nu u_{,jj}^h - f, v^h \rangle$$

$$+ \sum_{e=1}^{N_e} \nu' \langle \phi_{B,j}, \phi_{B,j} \rangle_{\Omega_e} u'_B v'_B = 0 \quad \forall v^h \in V^h \quad (16)$$

$$\nu' \langle \phi_{B,j}, \phi_{B,j} \rangle_{\Omega_e} u'_B := \langle \dot{u}^h + a_j^h u_{,j}^h - \nu u_{,jj}^h - f, \varphi_B \rangle_{\Omega_e}$$

本研究では、 a_j は一次要素の節点を要素内で平均化した要素定数値として近似する。式 (16) の $\nu' \langle \phi_{B,j}, \phi_{B,j} \rangle_{\Omega_e} u'_B$ は気泡関数要素の安定化作用を制御する項である。安定化作用制御項の安定化制御パラメータ ν' は、次式によって決定する。

$$(\nu + \nu') \langle \phi_{B,j}, \phi_{B,j} \rangle_{\Omega_e} = \frac{\langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{A_e} \tau_{eR}^{-1} \quad (17)$$

$A_e := \int_{\Omega_e} d\Omega$ である。 τ_{eR} は安定化パラメータ¹⁰⁾¹¹⁾

$$\tau_{eR} = \left[\left(\frac{2|a_i^h|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

であり、 h_e は各要素の代表長さである。

3.3 質量行列と直交基底気泡関数

2節の表現形式1を採用した2次元気泡関数要素の各要素 e の質量行列は、 ϕ_B を任意の適合型気泡関数、

形状関数のベクトルを $\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \phi_B]^T$ として式 (19) のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \Phi^T \rangle_{\Omega_e} = M_{mn}^{(e)} = & \begin{bmatrix} \frac{A_e}{6} & \frac{A_e}{12} & \frac{A_e}{12} & 0 \\ \frac{A_e}{12} & \frac{A_e}{6} & \frac{A_e}{12} & 0 \\ \frac{A_e}{12} & \frac{A_e}{12} & \frac{A_e}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{9} \langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_e} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{9} \langle \phi_B, \phi_B \rangle_{\Omega_e} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 9 \end{bmatrix} \quad (19) \\ & m = 1, \dots, 4, \ n = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

式 (19) より気泡関数要素の質量行列は、気泡関数 ϕ_B の二つの積分値

$$\langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_e}, \langle \phi_B, \phi_B \rangle_{\Omega_e} \quad (20)$$

によって決定されることがわかる。適合型気泡関数 ϕ_B として線形気泡関数¹²⁾を採用した場合には、式 (20) の積分値は、

$$\langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_e} = \frac{1}{3} A_e, \quad \langle \phi_B, \phi_B \rangle_{\Omega_e} = \frac{1}{6} A_e \quad (21)$$

となり、次式の (整合) 質量行列が得られる。

$$M_{mn}^{(e)} = \frac{A_e}{36} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad (22)$$

式 (22) の質量行列は対角行列ではないので、時間方向に陽解法を用いる場合には、計算効率を向上させるために式 (23) 示す各行の成分を足し合わせた整合質量行列の近似行列 (集中質量行列) が一般的に採用される。

$$M_{mn}^{(e)} \approx \text{diag} \left(\sum_{n=1}^4 M_{mn}^{(e)} \right) = \frac{A_e}{9} \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

一方、適合型気泡関数 ϕ_B として直交基底気泡関数²⁾を採用した場合には、式 (20) の積分値は、

$$\langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_e} = \langle \phi_B, \phi_B \rangle_{\Omega_e} = \frac{N+1}{N+2} A_e, \quad N = 2 \quad (24)$$

となり、式 (25) の (整合) 質量行列が得られる。

$$M_{mn}^{(e)} = \frac{A_e}{12} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 9 \end{bmatrix} \quad (25)$$

式 (25) の質量行列は人為的に各行の成分を足し合わせるなどの操作を行わずに対角行列となっている。3次元の場合も同様に、適合型気泡関数 ϕ_B として直交基底気泡関数 (気泡関数の積分値は式 (24) で $N = 3$ とした値となる) を採用した場合には、形状関数のベクトルを $\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \Phi_4 \ \phi_B]^T$ として式 (26) の対角質量行列となる。

$$\langle \Phi, \Phi^T \rangle_{\Omega_e} = \frac{A_e}{20} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 16 \end{bmatrix} \quad (26)$$

3.4 時間方向の離散化

時間方向の離散化には、以下に示す Jameson-Baker の m ステップ Runge-Kutta 法³⁾による多段階陽解法を採用する。

$$\begin{aligned} l = 0, 1, \dots, m-1, \quad u^{hn+1/(m+1)} &= u^{hn}, \\ \langle u^{hn+1/(m-l)}, v^h \rangle &= \langle u^{hn}, v^h \rangle - \frac{\Delta t}{m-l} F(u^{hn+1/(m+1-l)}) \end{aligned} \quad (27)$$

$$F(u^h) = \langle a_j^h u_{,j}^h - \nu u_{,jj}^h - f, v^h \rangle + \sum_{e=1}^{N_e} \nu' \langle \phi_{B,j}, \phi_{B,j} \rangle_{\Omega_e} u_B' v_B'$$

3.5 Rotating Cone 問題

検証計算として、Rotating Cone 問題の解析を行う。図-2 に領域モデルとメッシュ (節点数: 4921, 要素数: 9600) を、図-3 に初期条件の鳥瞰図を示す。流速は図-2(a) のように与えられ、図-3 の u の Cone (円錐) の分布は $0.0 \leq u \leq 1.0$ の範囲で三角関数により定義されている。

(1) Rotating Cone 問題での数値不安定性と安定化

まず、Rotating Cone 問題での数値解析上の不安定性を検証するため、整合質量行列を用いた一次要素、線形気泡関数要素の数値安定化を考慮しない場合 (安定化項なし) と考慮した場合 (安定化項あり) の5週後の計算結果を図-4 に示す。一次要素の安定化には SUPG(Streamline Upwind/Petrov-Galerkin) 法¹⁰⁾ (安定化パラメータ τ_{eR} は式 (18) を使用) を、線形気泡

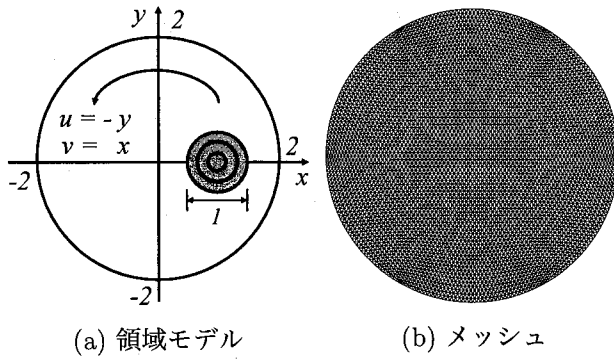


図-2 Rotating Cone 問題

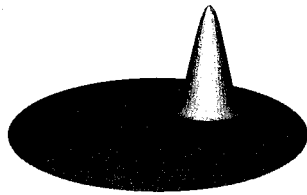


図-3 初期条件の鳥瞰図

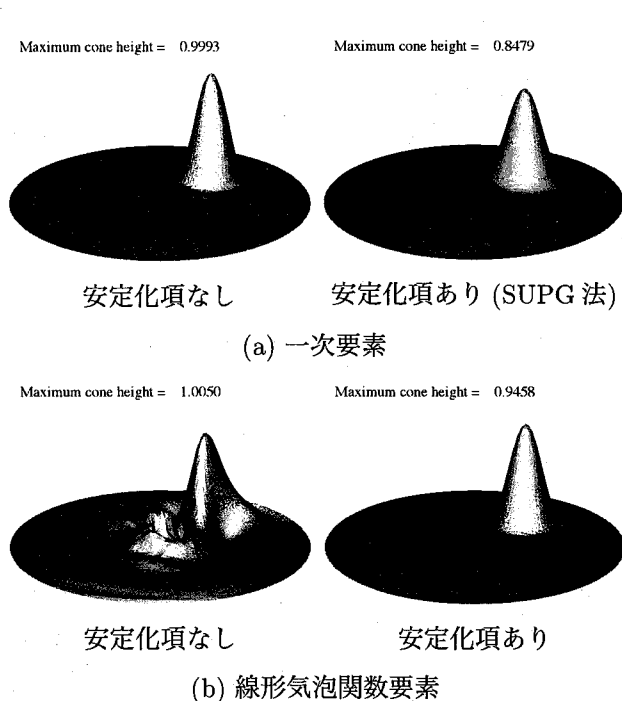


図-4 整合質量行列を使用した 5 周後の計算結果

関数要素の安定化には 3.2 節の方法を用いている。時間方向の離散化には 4 段階法 ($m = 4$) を採用した。一次要素の安定化項なしの計算結果は、円錐の高さ (Maximum cone height)・形状は保たれているが、円錐の進行方向からみて後方に数値振動が発生している。線形気泡関数要素の安定化項なしの計算結果は、円錐の高さは保たれているが、円錐の形状は崩れており、解析領域の中心部に大きな数値振動が見られる。一次要素、

線形気泡関数要素の安定化項ありの計算結果は、ともに円錐の高さは安定化項なしの結果より低くなっているものの、円錐の形状は保たれており、安定化項なしの結果で見られたような数値振動は発生しておらず安定化を考慮したことの有効性が確認できる。なお、一次要素の安定化項ありの計算 (SUPG 法) では質量行列に作用する勾配行列の安定化項が質量行列に加わるため非対称行列を解く必要がある。線形気泡関数要素の安定化ありの計算 (3.2 節の方法) は、SUPG 法のように質量行列に対する安定化項は現れないので対称行列を解けばよい。

(2) 集中 (対角) 質量行列を使用した計算結果の比較

続いて、質量行列に一次要素、線形気泡関数要素の集中質量行列と直交基底気泡関数要素の対角質量行列を採用した場合の計算結果について比較検討を行う。図-5(a) に一次要素、(b) に線形気泡関数要素、(c) に直交基底気泡関数要素の計算結果を示す。

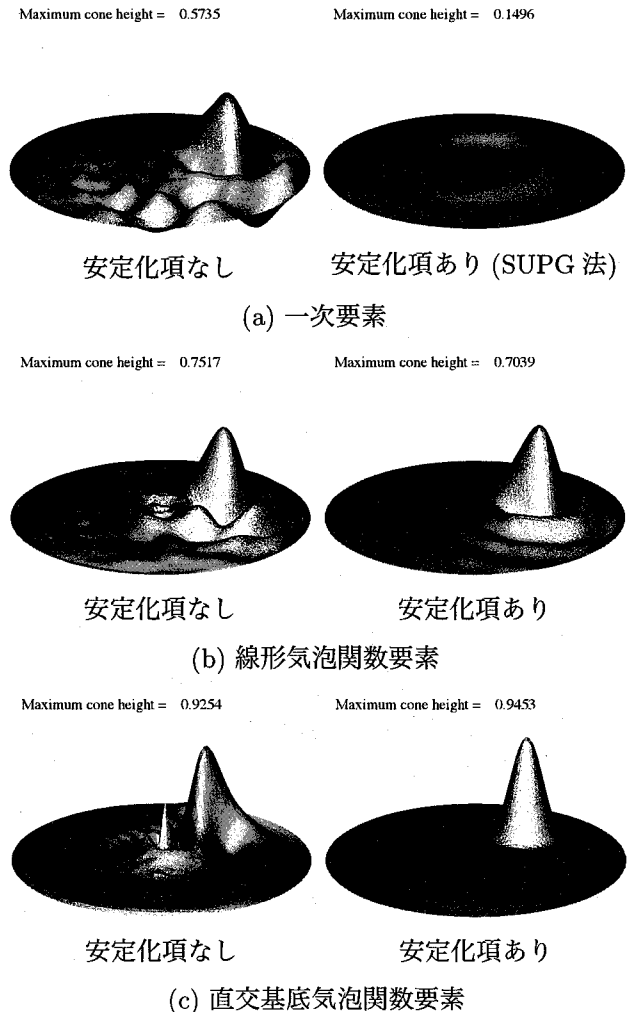


図-5 集中 (対角) 質量行列を使用した 5 周後の計算結果

安定化の方法、時間方向の離散化は 3.5(1) と同様で

ある。一次要素，線形気泡関数要素の安定化項なしの計算結果は，図-4の安定化項なしの結果に比べて，円錐の高さ・形状ともに大きく崩れており，円錐の進行方向からみて後方に非常に顕著な数値振動が発生しており，集中質量行列を使用したことの影響がはっきりと確認できる。直交基底気泡関数要素の安定化項なしの計算結果は，円錐の高さは保たれているが，円錐の形状は崩れており，解析領域の中心部に大きな数値振動が見られる。また，一次要素の安定化項ありの計算結果は，初期条件の形状を全く留めていない結果となっている。この原因は，集中質量行列を使用したことの影響以外に，SUPG法での質量行列に作用する勾配行列を転置した形となる安定化項が質量行列の行の成分を足し合わせた集中化により，本来作用すべきである安定化の効果が失われてしまったためであると考えられる。線形気泡関数要素の安定化項ありの計算結果は，整合質量行列の集中化により円錐の高さ・形状ともに安定化項なしの結果とほぼ同程度に崩れているが，安定化項なしの結果で見られる解析領域全体で発生している数値振動は抑制されている。これに対して，直交基底気泡関数要素の安定化項ありの計算結果は，円錐の進行方向の後方に振動が発生しておらず，円錐の分布も崩れておらず，図-4の線形気泡関数で整合質量行列を使用した計算結果と同等の計算精度を得ていることがわかる。

(3) 他の代表的安定化手法との比較

最後に，一次要素において他に提案されている代表的な安定化手法との比較検討を行う。SUPG法の安定化パラメータはいくつか提案されており式(18)以外に，下記式(28)の安定化パラメータ¹³⁾が良く採用される。

$$\tau_{eR} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2|a_i^b|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

また，一次要素における安定化を考慮した代表的な陽解法としてBTD(Balancing Tensor Diffusivity)¹⁴⁾が提案されている。BTD法は時間方向における2階微分を空間方向の微分で表し，流線方向の空間2階微分の安定化項(BTD項)を導出して計算を行う時間方向に対する2次精度解法である。形式上は陽的オイラー法に時間2階微分を空間2階微分に置き換えたBTD項を付加して計算を行う解法であるので，SUPG法のように質量行列に対する安定化項は現れない。なお，SUPG法において質量行列に作用する安定化項を無くし，集中質量行列，安定化パラメータ τ_{eR} には $\frac{\Delta t}{2}$ を採用した陽的オイラー法は，集中質量行列を使用したBTD法

と等価になる。図-6に，安定化パラメータに式(28)を時間方向の離散化に4段解法を採用したSUPG法，及びBTD法の計算結果を示す。

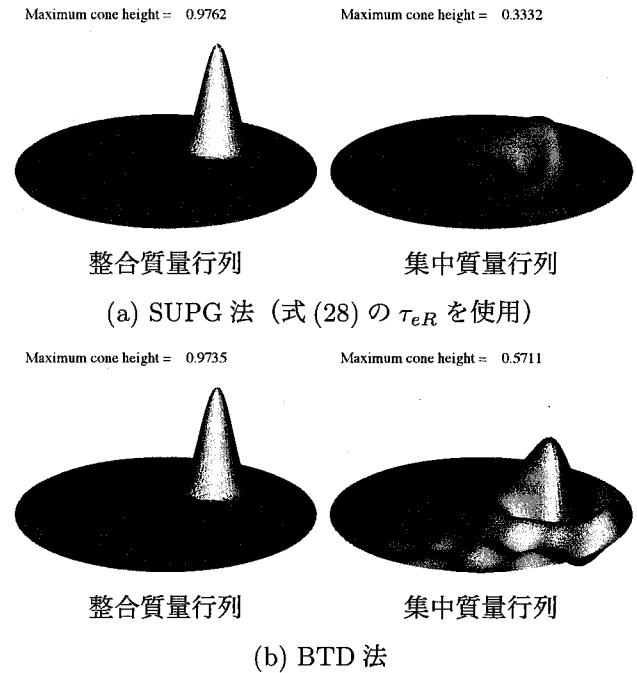


図-6 5周後の計算結果

SUPG法，BTD法の整合質量行列の計算結果は，ともに円錐の高さはほぼ同じ結果であり図-4の一次要素の安定化項なしの結果より低くなっているものの，円錐の形状は保たれており，安定化項なしの結果で見られたような数値振動はほとんど発生していない。SUPG法の集中質量行列の計算結果は，図-5の結果と同様に初期条件の形状を全く留めていない結果となっている。SUPG法においては，整合質量行列，集中質量行列の双方の場合で式(28)の安定化パラメータを用いた方が，円錐の高さを保つことが出来ている。BTD法の集中質量行列の計算結果は，整合質量行列の集中化により円錐の高さ・形状ともに図-5の安定化項なしの結果とほぼ同程度に崩れているが，安定化項なしの結果で見られる解析領域全体で発生している数値振動は抑制されている。

以上の検討により，本提案手法は，従来提案されている集中質量行列を使用した代表的な陽的有限要素法に比べて，質量行列の集中化の影響が無く，かつ，流体解析で必要となる数値安定化の作用を適切に考慮することが可能な陽的有限要素法であると考えられる。

4. Navier-Stokes 方程式における直交基底 気泡関数要素安定化法

4.1 LES(Large Eddy Simulation) の基礎方程式

非圧縮粘性流れにおける Navier-Stokes 方程式に Grid フィルターを施した Grid Scale での運動方程式と連続式は次式によって表される。

$$\begin{aligned} & \bar{u}_i + (\bar{u}_j \bar{u}_i)_{,j} + P_{,i} \\ & -(\nu + \nu_T)(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})_{,j} = f_i \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (29) \end{aligned}$$

$$\bar{u}_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (30)$$

$\bar{u}_i$, $P = \bar{p} + \overline{u'_k u'_k}/3$, f_i は流速, 総圧 (力), 外力, また $\nu = 1/Re$ であり, Re はレイノルズ数, ν_T は SGS(Smagorinsky) 渦動粘性係数 (SGS 応力項を渦粘性近似によりモデル化) である。境界 Γ は Γ_1 と Γ_2 に分けられ, 以下の境界条件が規定される。

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i|_{\Gamma_1} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (31)$$

$$\{-P\delta_{ij} + (\nu + \nu_T)(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})\} n_j = t_i|_{\Gamma_2} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (32)$$

δ_{ij} はクロネッカーのデルタ関数, n_j は境界 Γ_2 の外向き法線ベクトルである。

4.2 Dynamic SGS モデル

本研究では, SGS 渦動粘性係数の計算方法として Germano らによって提案された Dynamic SGS モデル¹⁵⁾を用い, モデル定数 $\bar{C}_S$ の算出は Lilly の提案した最小二乗法¹⁶⁾による方法を用いて以下のように求める。

$$\nu_T = (\bar{C} \bar{\Delta}^2) |\bar{S}_{ij}|, \quad \bar{C} = \bar{C}_S^2 \quad (33)$$

ここで,

$$|\bar{S}_{ij}| = \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \quad (34)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (35)$$

$$\bar{C} \bar{\Delta}^2 = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij}^* M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (36)$$

$$L_{ij}^* = L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} \quad (37)$$

$$L_{ij} = \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (38)$$

$$M_{ij} = \alpha^2 |\widetilde{\bar{S}_{ij}}| \widetilde{\bar{S}_{ij}} - |\widetilde{\bar{S}_{ij}}| \bar{S}_{ij} \quad (39)$$

である。式 (39) の α は, 推奨値として一般的に用いられている $\alpha = 2$ を採用し, 式 (38), (39) の Test フィルター操作は次式によって行なう。

$$\widetilde{\bar{u}}(x_i) = \bar{u}(x_i) + \frac{\bar{\Delta}^2}{24} \bar{u}(x_i)_{,kk} \quad (40)$$

$$\bar{\Delta}^2 = (\alpha^2 - 1) \bar{\Delta}^2, \quad \bar{\Delta} = \sqrt[3]{J} \quad (41)$$

式 (41) の J は, 有限要素分割された各要素に対する座標変換のヤコビアンであり, 四面体要素の場合は $J = 6A_e$ (A_e : 各四面体要素の体積) である。式 (40) を有限要素法で求めるためには質量行列の逆行列が必要になる。既往研究⁸⁾では, 集中質量行列を採用して式 (40) を求めている。本研究では, 式 (40) においても直交基底気泡関数要素を採用することにより, 対角質量行列を用いて式 (40) を求める。

4.3 時間方向の離散化

時間方向の離散化として, 運動方程式には Jameson-Baker の m ステップ Runge-Kutta 法を適用し, 連続式 (30) は完全陰的 ($\bar{u}_{i,i}^{n+1} = 0$) に表す。圧力 Poisson 方程式の導出については, 連続式 ($\bar{u}_{i,i}^{n+1} = 0$) を完全に満足しない中間流速 ($\bar{u}_i^{*n+1}$) を用いて圧力 Poisson 方程式を導き, 流速場と圧力場を分離した式 (42)~(44) の手順に従って圧力 P^{n+1} と流速 $\bar{u}_i^{n+1}$ を求める¹²⁾。

$$l = 0, 1, \dots, m-1, \quad \bar{u}_i^{*n+1/(m+1)} = \bar{u}_i^n,$$

$$\bar{u}_i^{*n+1/(m-l)} = \bar{u}_i^n - \frac{\Delta t}{m-l} F_i(\bar{u}_i^{*n+1/(m+1-l)}, P^n) \quad (42)$$

$$\Delta t (P_{,ii}^{n+1} - P_{,ii}^n) = \bar{u}_i^{*n+1} \quad (43)$$

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^{*n+1} - \Delta t (P_{,i}^{n+1} - P_{,i}^n) \quad (44)$$

$$F_i(\bar{u}_i, P) = (\bar{u}_j \bar{u}_i)_{,j} + P_{,i} - (\nu + \nu_T)(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})_{,j} - f_i$$

4.4 MINI 要素

流体の基礎方程式における空間方向の定式化として, MINI 要素を用いる。すなわち, 流速に関しては気泡関数要素を圧力に関しては 1 次要素を補間関数に採用する (図-7 参照)。

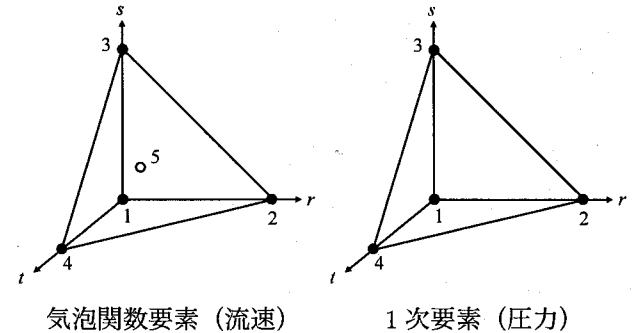


図-7 3次元の MINI 要素

4.5 2レベル-3レベル有限要素近似^{2),9),17)}

近似空間に2レベル¹⁸⁾, 重み空間に3レベル¹⁹⁾を採用した2レベル-3レベル有限要素近似²⁾を行う。2レベル-3レベル近似に基づいた気泡関数要素の定式化では、次の1次要素の有限要素空間 V_{Li}^h, Q^h と気泡関数の空間 $V_{Bi}^h, \hat{V}_{Bi}^h$ を用いる。

$$V_{Li}^h = \{v_{Li}^h \in (H_0^1(\Omega))^N, v_{Li}^h|_{\Omega_e} \in (P1(\Omega_e))^N\} \quad (45)$$

$$V_{Bi}^h = \{v_{Bi}^h \in (H_0^1(\Omega))^N, v_{Bi}^h|_{\Omega_e} = \phi_B v_{Bi}^h, v_{Bi}^h \in \mathbf{R}^N\} \quad (46)$$

$$\hat{V}_{Bi}^h = \{\hat{v}_{Bi}^h \in (H_0^1(\Omega))^N, \hat{v}_{Bi}^h|_{\Omega_e} = \varphi_B v_{Bi}^h, v_{Bi}^h \in \mathbf{R}^N\} \quad (47)$$

$$Q^h = \{q^h \in H_0^1(\Omega), q^h|_{\Omega_e} \in P1(\Omega_e), \int_{\Omega} q^h d\Omega = 0\} \quad (48)$$

ϕ_B, φ_B は要素領域 Ω_e をコンパクトな台とする2レベル気泡関数 (直交基底となる気泡関数), 3レベル気泡関数 (安定化作用制御項を導く気泡関数) である。 $V_{Bi}^h, \hat{V}_{Bi}^h$ は気泡関数による近似空間に対応している。なお, 3レベル気泡関数は式 (13) を満足する気泡関数として下記式 (49) を用いている。

$$\varphi_B = \frac{\nu_{\varphi i}}{(\nu + \nu_T)} \frac{\delta_1 \varphi_{B1} + \delta_2 \varphi_{B2} + \varphi_{B3}}{\delta_1 + \delta_2 + 1}, -\infty < \nu_{\varphi i} < \infty \quad (49)$$

$$\nu_i'(\nu_{\varphi i}) := \langle \bar{u}_i^h + (\bar{u}_j^h \bar{u}_i^h)_{,j} + P_{,i}^h - (\nu + \nu_T)(\bar{u}_{i,j}^h + \bar{u}_{j,i}^h)_{,j} - f_i, \varphi_B \rangle_{\Omega_e} / \langle (\bar{u}_{Bi,j}^h + \bar{u}_{Bj,i}^h), \phi_{B,j} \rangle_{\Omega_e} \quad (50)$$

4.6 有限要素方程式

有限要素空間として速度場に対して $V_i^h = V_{Li}^h \oplus V_{Bi}^h$ を圧力場に対して Q^h を用いることにより, 有限要素近似解 $(u_i^h, P^h) \in V_i^h \times Q^h$ を見いだす次の近似問題が得られる。

$$l = 0, 1, \dots, m-1, \quad \bar{u}_i^{h*n+1/(m+1)} = \bar{u}_i^{hn},$$

$$\langle \bar{u}_i^{h*n+1/(m-l)}, v_i^h \rangle = \langle \bar{u}_i^{hn}, v_i^h \rangle - \frac{\Delta t}{m-l} \langle F_i(\bar{u}_i^{h*n+1/(m+1-l)}, P^{hn}), v_i^h \rangle \quad (51)$$

$$\langle \Delta t (P_{,ii}^{hn+1} - P_{,ii}^{hn}), q^h \rangle = \langle \bar{u}_{i,i}^{h*n+1}, q^h \rangle \quad (52)$$

$$\langle \bar{u}_i^{hn+1}, v_i^h \rangle = \langle \bar{u}_i^{h*n+1}, v_i^h \rangle - \langle \Delta t (P_{,i}^{hn+1} - P_{,i}^{hn}), v_i^h \rangle \quad (53)$$

気泡関数要素安定化法を適用し, 式 (51) に弱形式を施した場合の式 (51) の右辺第2項は次式によって表される。

$$\begin{aligned} \langle F_i(\bar{u}_i^h, P^h), v_i^h \rangle &= \langle (\bar{u}_j^h \bar{u}_i^h)_{,j}, v_{Li}^h \rangle \\ &+ \langle (\bar{u}_{Lj}^h \bar{u}_{Li}^h + \bar{u}_{Lj}^h \bar{u}_{Bi}^h + \bar{u}_{Bj}^h \bar{u}_{Li}^h)_{,j}, v_{Bi}^h \rangle \\ &+ (\nu + \nu_T) \langle (\bar{u}_{Li,j}^h + \bar{u}_{Lj,i}^h), v_{Li,j}^h \rangle \\ &+ \sum_{e=1}^{N_e} (\nu + \nu_T + \nu_i') \langle (\bar{u}_{Bi,j}^h + \bar{u}_{Bj,i}^h), v_{Bi,j}^h \rangle_{\Omega_e} \end{aligned}$$

$$-\langle P^h, v_{i,i}^h \rangle - \langle f_i, v_i^h \rangle - \langle t_i, v_i^h \rangle_{\Gamma_2} \quad (54)$$

式 (52) の左辺第1項, (53) の右辺第2項に部分積分を施した方程式を用いて計算を行なう。

安定化作用制御項の安定化制御パラメータ $\nu_i'(-(\nu + \nu_T) \leq \nu_i' < \infty)$ は, 非定常問題における Navier-Stokes 方程式と安定化有限要素法との関係^{2),9)} から式 (55) によって決定する。

$$\nu_i' = \left\{ \frac{\langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{A_e} \tau_{eR}^{-1} \bar{u}_{Bi}^h \right. \\ \left. - \langle (\nu + \nu_T)(\bar{u}_{Bi,j}^h + \bar{u}_{Bj,i}^h), \phi_{B,j} \rangle_{\Omega_e} \right\} \\ / \langle (\bar{u}_{Bi,j}^h + \bar{u}_{Bj,i}^h), \phi_{B,j} \rangle_{\Omega_e} \quad (55)$$

$$\tau_{eR} = \left[\left(\frac{2|\bar{u}_{L0i}^h|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4(\nu + \nu_T)}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (56)$$

注意すべき点として, 式 (51), (53) および式 (40) を有限要素法で定式化して求める場合には, 質量行列 M の逆行列が必要となるが, 補間関数として直交基底気泡関数要素を採用した場合には, 質量行列が自然に対角行列となり, その逆行列は対角成分の逆数となるので連立一次方程式を解く必要が無いため効率が良く, 質量行列の人為的な集中化を行なうことによる解の劣化がない。式 (52) は, 正定値対称行列の連立一次方程式を求める必要がある。本研究では, 連立一次方程式の解法にスケーリング処理を施した CG 法を採用し, 疎行列の行列成分格納方法には CRS(Compressed Row Storage) 法²⁰⁾を用いる。

4.7 Standing Vortex 問題

解析例として, Standing Vortex 問題を取り上げる。この問題の目的は, 計算手法がどの程度の数値的な散逸誤差をもつかを調べることである。非粘性流れを仮定し ($\nu = \nu_T = 0$), 初期条件として人工的な渦を発生させ計算を進める。厳密解は初期条件そのものであるが, 安定な計算ならかならず解は減衰する。初期の渦がどの程度の減衰をしたかを調べることによって数値的な散逸誤差を評価する。解析領域 (図-8) は, $1 \times 1 \times 1$ である。

初期条件は領域の中心から極座標 $\{r, \theta, z\}$ により式 (57) で表される。

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\theta = \begin{cases} 5r & r < 0.2 \\ 2 - 5r & 0.2 < r < 0.4 \\ 0 & r > 0.4 \end{cases} \quad (57)$$

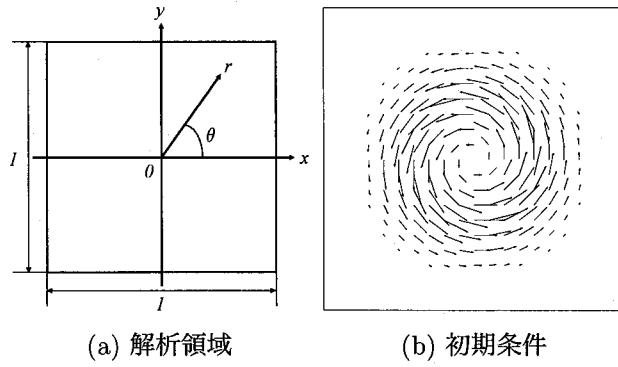


図-8 Standing Vortex 問題

本節では、移流項の近似と運動エネルギーの保存性について検討を行うため、以下の4ケースの移流項の近似に対して比較計算を行っている。

Case 1

$$(\bar{u}_j^h \bar{u}_i^h)_{,j} \quad (58)$$

Case 2

$$\bar{u}_j^h \bar{u}_{i,j}^h \quad (59)$$

Case3

$$\bar{u}_{j,j}^h \bar{u}_{L0i}^h + \bar{u}_{L0j}^h \bar{u}_{i,j}^h \quad (60)$$

Case4

$$\bar{u}_{L0j}^h \bar{u}_{i,j}^h \quad (61)$$

移流項の近似は、式(58)と式(59)に示すように発散型と勾配型がある。勾配型は発散型の移流項において連続式(30)の条件を代入することにより得られる。勾配型は偏微分方程式のレベルで連続式が厳密に満たされている場合には発散型と同じであるといえるが、偏微分方程式の近似解を求める場合には、連続式が厳密に満たされない場合もあり、同じであるとは一概にはいえない。このことから、有限差分法、有限体積法、有限要素法などの近似解を求める方法では、移流項の近似に発散型を用いるか勾配型を用いるかで得られる計算結果が異なる場合がしばしばある。有限要素法では、移流項の定式化の軽減を目的として、式(60)のように発散型の移流速度に対して、一次要素の節点を要素内で平均化した要素定数値 $\bar{u}_{L0i}^h$ を使用する場合がある。また、BTD法、SUPG法などの安定化手法と移流項との整合性から式(61)の勾配型を採用してLESを行っている研究もある^{6), 21), 22)}。本研究では、以上に挙げた式(58)～式(61)の4ケースの移流項の近似において、運動エネルギーの保存性について検討する。

解析にあたって図-9(a)に示す $20 \times 20 \times 20$ の均等な有限要素分割を用いた。図-9(b)に $t=3$ の運動エネルギーの相対変化を示す。時間方向の離散化には4

段解法 ($m=4$) を適用し、時間増分 Δt は0.01と設定した。

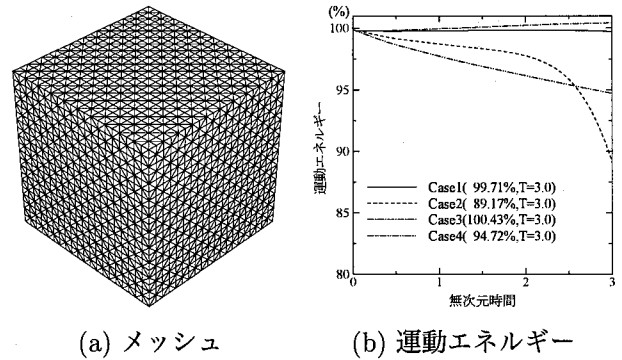


図-9 メッシュと計算結果

エネルギーの相対変化をみると、Case2, Case4の勾配型の移流項の近似では、運動エネルギー減衰が大きくなっているのに対して、Case1の発散型の移流項の近似では数値的な散逸誤差が少ない結果が得られた。Case3の発散型の移流項の近似では運動エネルギーが100%以上になっており計算が数値的に不安定であるといった結果となっている。以上の結果より、本研究では、数値的に安定に計算ができ、かつ、運動エネルギーの保存性が高い結果が得られた式(58)の移流項の近似を採用する。

4.8 Cavity 流れ解析

非圧縮粘性流れの検証問題として Cavity 流れ解析を取り上げる。解析領域と境界条件を図-10に示す。 $v_T=0$ とし、 $32 \times 32 \times 32$ の均等分割を用いた3次元解析を行う。Bubnov-Galerkin近似に基づくMINI要素の解法では、Stokes流れとなる非常にレイノルズ数(Re)の低い領域に対して、数値粘性が足りなくなり圧力振動が発生することが知られている^{23), 24)}。また、数値粘性が足りるStokes流れとならないレイノルズ数の領域においても、MINI要素による数値粘性を適切に与えない場合には、圧力振動が発生することが報告されている⁹⁾。このことから、本研究では、Stokes流れとなる非常に低いレイノルズ数 $Re=1$ 、Stokes流れとならないレイノルズ数 $Re=400$ を採用して、本提案手法の有効性を検討する。図-11に圧力の計算結果を示す。

図-11をみると、レイノルズ数1と400の双方において直交基底気泡関数要素を用いた気泡関数要素安定化法の計算結果は、適切な数値粘性が与えられており圧力振動が発生していないことが解る。

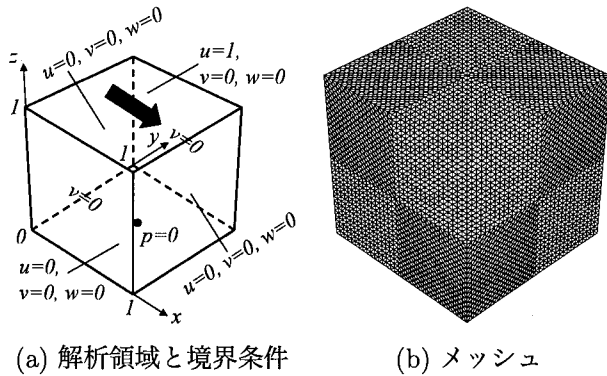


図-10 Cavity 流れ解析

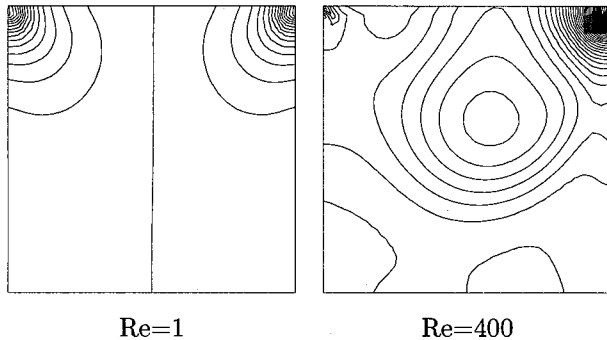


図-11 圧力の計算結果 ($y=0.5$)

4.9 球周り流れ解析

LES の検証問題として球周り流れ解析を取り上げる。解析領域は、球の直径を D とし、 $32D$ (球の前方 $8D$ + 後方 $24D$) $\times 16D \times 16D$ であり、 $D=1$ で球 (円) の周りを図-12 のように 96 分割した四面体メッシュを用いている。節点数、要素数は 101,450、580,608 であり、流速に気泡関数要素、圧力に一次要素を採用した場合の総自由度は 2,147,624 となる。

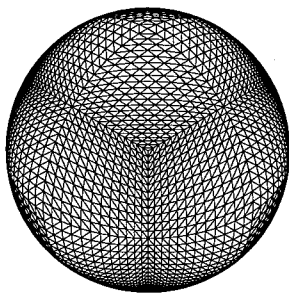


図-12 球周りのメッシュ分割

本解析は、分散メモリ型の並列計算²⁵⁾により行われている。計算に用いた計算機 (PC クラスタ) は Pentium4(Prescott) 3.0GHz/1MB(L2) $\times$ 32 ノード (32CPU) である。ノード間の通信は理論伝送速度 1Gbps (Gigabit Ethernet) のネットワーク装置を採

用している。図-13 にレイノルズ数 500、1000、5000、10000、50000、100000、200000、300000、400000 の (時間平均) 抗力係数の計算結果を示す。

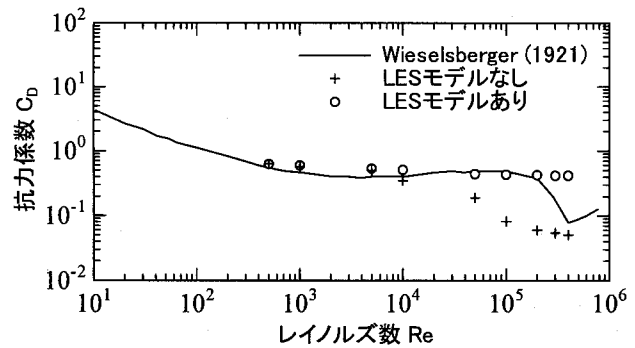


図-13 実験値と計算結果の比較

図-13 の LES モデルなしは直交基底気泡関数要素安定化法 ($\nu_T = 0$) の場合を示し、LES モデルありは直交基底気泡関数要素安定化法 + Dynamic SGS モデルを意味している。(時間平均) 抗力係数は、時間増分 0.0025 として 50000 ステップ (125 時間) まで計算を行ない、75~125 時間での時間平均をして算出した。計算時間は 1 ケース (125 時間) 行なうのに 32CPU を用いた並列計算で約 11 時間であった。図-13 の (時間平均) 抗力係数を見ると、10000 付近から LES モデルなしの抗力係数が実験値²⁶⁾ から離れて行くのに対し、LES モデルありでは実験値と良い一致を示している。また、Drag Crisis が発生する領域 ($Re = 300000, 400000$) では抗力係数が下がらず実験値とは異なる結果となっている。

図-14 にレイノルズ数 500、5000、50000、400000 の抗力係数の時刻歴を、図-15~図-18 にある無次元時刻 T のレイノルズ数 500、5000、50000、400000 の LES モデルなし、LES モデルありの場合の流線、渦度 ($= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$)、圧力を示す。図-15~図-18 の流線、渦度、圧力のカラーインデックスはそれぞれ流速の絶対値、渦度、圧力を表している。

球周りの流れは $Re=300$ をこえると 3 次元的な構造をもった周期的な渦が発生し、 $Re=800$ をこえた辺りから非周期的な渦に遷移する²⁷⁾。図-14 の抗力係数の時刻歴を見ると、LES モデルなし、LES モデルありの双方の計算結果において、 $Re=500$ ではともに抗力係数の時刻歴が周期的になっており、 $Re=5000$ 以上では、抗力係数の時刻歴が非周期的になっている。

図-15~図-18 をみると、図-13 の (時間平均) 抗力係数が実験値と良い一致を示している $Re=500, 5000$

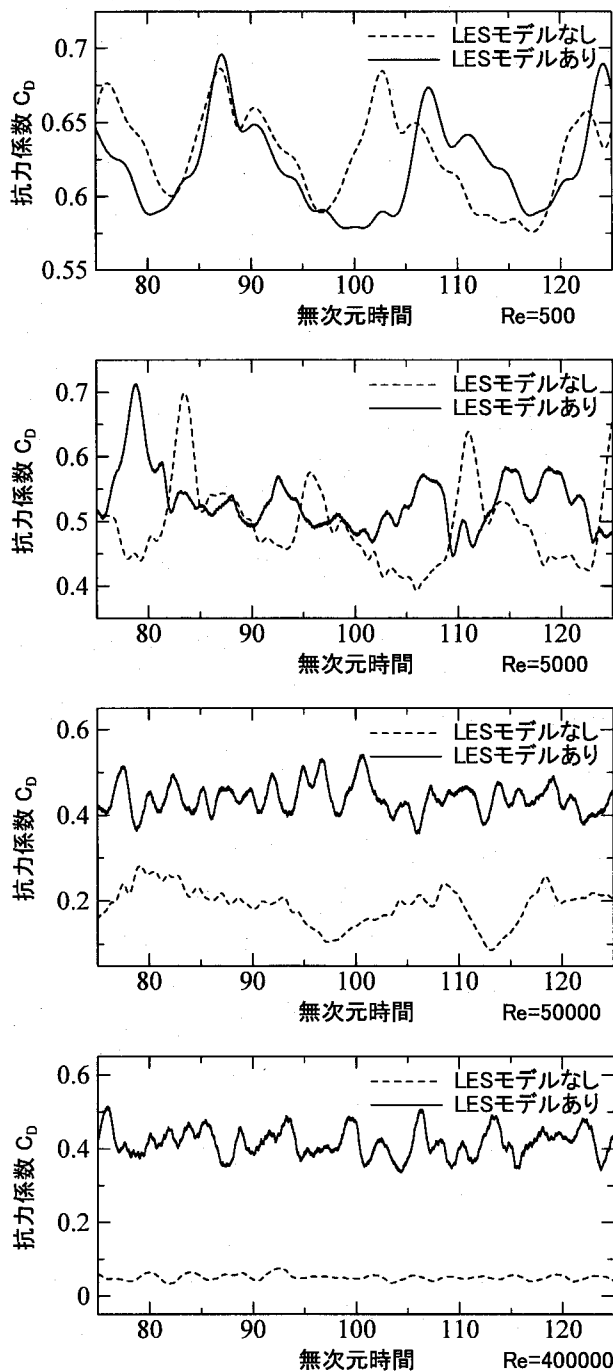


図-14 抗力係数の時刻歴

の LES モデルなし、LES モデルありの無次元時刻 T の流線、渦度、圧力の結果は、どれも非常に類似した結果となっている。 $Re=50000$ では、実験値の（時間平均）抗力係数と異なった値となった LES モデルなしの無次元時刻 T の渦度、圧力の結果は、一見、複雑な流れが発生しているように見えるが、流線を見るとわかるように球の後方においてあまり、複雑な流れが発生していないことがわかる。一方、（時間平均）抗力係数が実験値と良い一致を示している $Re=50000$ の LES モデルありの

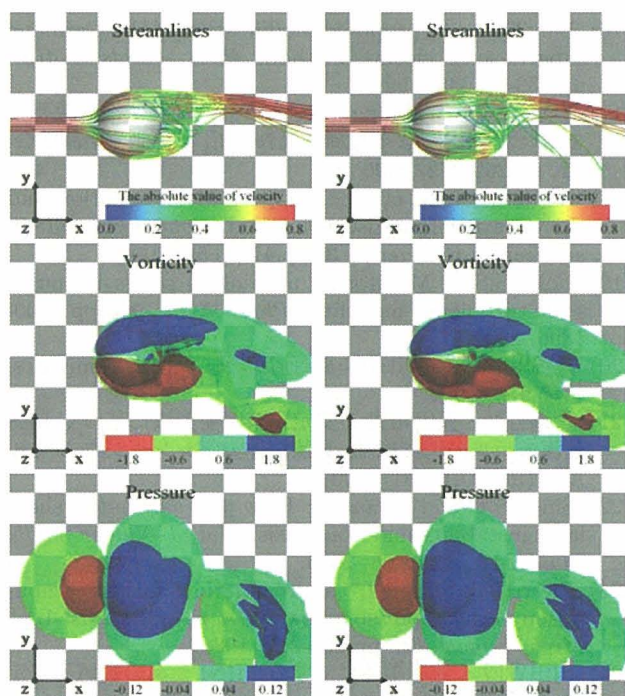
流線を見ると LES モデルなしの結果、 $Re=500,5000$ の結果に比べて球の後方に非常に複雑な流れが発生していることがわかり Dynamic SGS モデル (LES モデル) を用いた効果が確認できる。 Drag Crisis が発生する領域である $Re=400000$ の結果は、 $Re=50000$ と同様に LES モデルなしの結果に比べて LES モデルありの結果は非常に複雑な流れが発生しているが、（時間平均）抗力係数は下がっておらず実験値とは異なる結果となっていることから、本来は、より複雑な流れになっていると考えられる。 Drag Crisis が発生するレイノルズ数での抗力係数の再現が出来なかった理由は、LES モデルを用いた場合においても、現象を再現するためには、ある程度の解像度を持った細かいメッシュ分割が必要であるためだと考えている。

5. おわりに

本研究では、気泡関数要素の基底が直交する条件を導入し、計算精度の落ちない対角行列となる質量行列を用いて、従来の陽的有限要素法に比べて信頼性の高い解析手法（直交基底気泡関数要素安定化法）を提案した。 Rotating Cone 問題では、従来提案されている集中質量行列を使用した代表的な陽的有限要素法に比べて、質量行列の集中化の影響が無く、かつ、流体解析で必要となる数値安定化の作用を適切に考慮することが可能な陽的有限要素法であることを示した。 Standing Vortex 問題では、本提案手法に発散型の移流項の近似を採用することにより運動エネルギーの保存性が高い計算結果が得られることを示し、Cavity 流れ解析では、直交基底気泡関数要素を用いた気泡関数要素安定化法の計算結果は、適切な数値粘性を与えることができ圧力振動を抑制できる解法であることを示した。 球周り流れ解析では、実験値との比較、および計算結果の考察を行い LES モデルを用いたことの効果と有効性を確認した。 LES による球周り流れ解析では、 Drag Crisis が発生する領域（ $Re = 300000, 400000$ ）での抗力係数の再現が出来なかったが、今後は、球周りの分割数と球面近傍のよせ幅をより高解像度にしたときの抗力係数の変化の検討を行なう所存である。

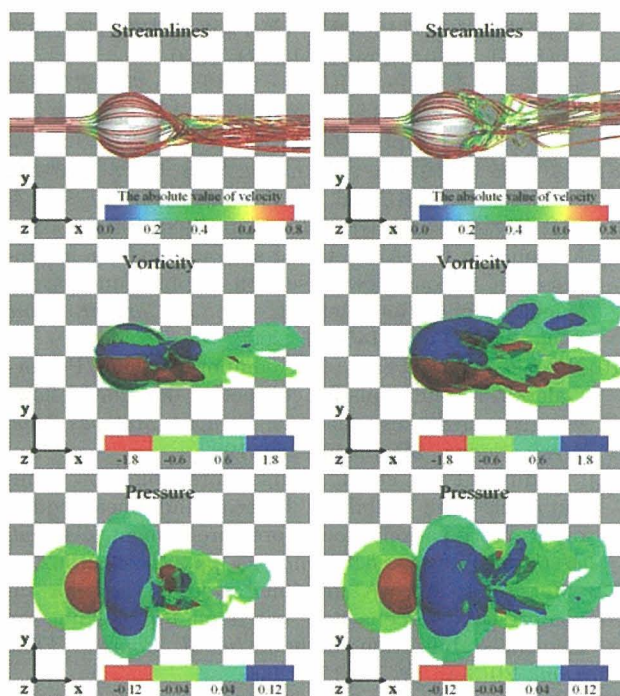
謝辞

LES を行うにあたり産業技術総合研究所の飯塚悟 博士、球周り流れ解析を行うにあたり計算力学研究センターの高瀬慎介 氏に貴重な御意見を頂いたことに対し、ここに感謝の意を記す。 また、多くのご指摘、ご助言を頂いた査読者の方々に感謝致します。



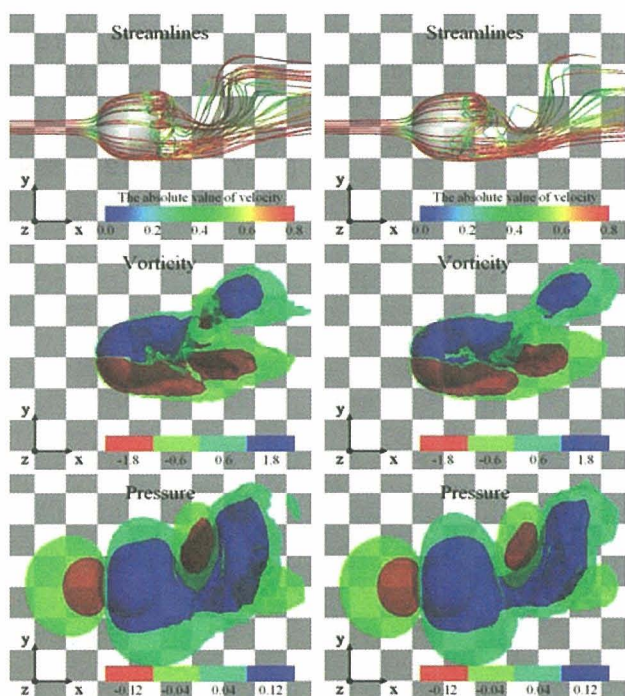
LES モデルなし, $T=90.0$ LES モデルあり, $T=90.0$

図-15 計算結果, $Re=500$



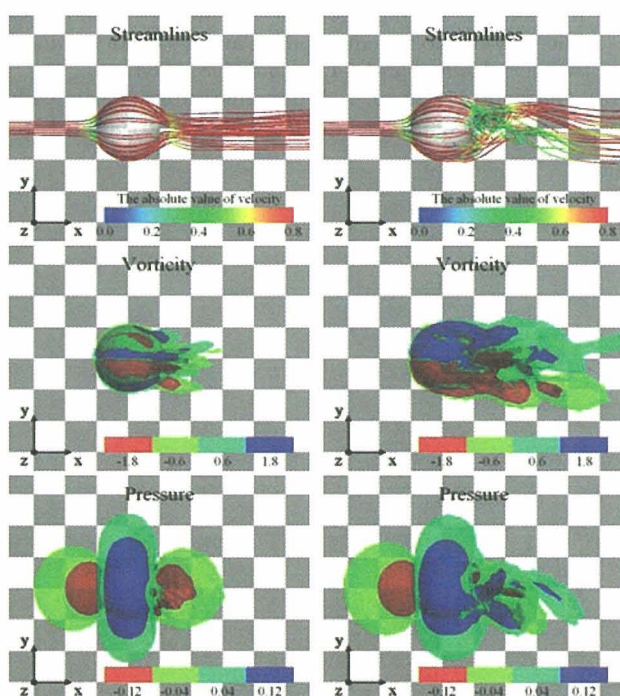
LES モデルなし, $T=95.0$ LES モデルあり, $T=75.0$

図-17 計算結果, $Re=50000$



LES モデルなし, $T=112.5$ LES モデルあり, $T=117.5$

図-16 計算結果, $Re=5000$



LES モデルなし, $T=102.5$ LES モデルあり, $T=87.5$

図-18 計算結果, $Re=400000$

参考文献

- 1) 畑中勝守：多段階有限要素法による非圧縮粘性流体の順・逆解析に関する計算力学的研究, 中央大学博士論文, 1993.
- 2) Matsumoto, J.: A Relationship between stabilized FEM and bubble function element stabilization method with orthogonal basis for incompressible flows, *J. Appl. Mech. JSCE*, **8**, pp.233-242, 2005.
- 3) Jameson, A., and Baker, T. J.: Solution of the Euler

equations for complex configurations, *AIAA Paper*, pp.83-1929, 1983.

- 4) 大島まり・小林敏雄・谷口伸行：ラージ・エディ・シミュレーションの有限要素解析における運動量保存性の評価, 日本機学会論文集 (B 編), **63**(610), pp.1955-1960, 1997.
- 5) 大島まり：有限要素法による Large Eddy Simulation, 数値流体力学, **5**(4), pp.133-147, 1997.
- 6) 海保真行・横張孝志・池川昌弘・加藤千幸：四面体有限

- 要素を用いた並列 LES 解析 (第 1 報), 日本機学会論文
集 (B 編), **66**(645), pp.1264-1271, 2000.
- 7) 海保真行・森英明・池川昌弘・加藤千幸: 四面体有限要素を用いた並列 LES 解析 (第 2 報), 日本機学会論文
集 (B 編), **68**(667), pp.672-679, 2002.
 - 8) 三好市郎・棚橋隆彦: Dynamic SGS モデルを用いた
GSMAC 有限要素法による平行平板間乱流の LES, 日本
機学会論文集 (B 編), **69**(685), pp.1988-1995, 2003.
 - 9) Matsumoto, J.: A fractional step method for incom-
pressible viscous flow based on bubble function el-
ement stabilization method, *Int. J. Comput. Fluid
Dyn.*, **20**(3-4), pp.145-155, 2006.
 - 10) Brooks, A.N., et al.: Streamline Upwind/Petrov-
Galerkin formulations for convection dominated flows
with Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl.
Mech. Engng.*, **32**, pp.199-259, 1982.
 - 11) Tezduyar, T.E., et al.: Incompressible flow com-
putations with stabilized bilinear and linear equal-
order-interpolation velocity-pressure element, *Comput.
Methods Appl. Mech. Engng.*, **95**, pp.221-242, 1992.
 - 12) Matsumoto, J.: A fractional step method for in-
compressible viscous flow based on bubble function
element stabilization method, *Int. J. Comput. Fluid
Dyn.*, **20**(3-4), pp.145-155, 2006.
 - 13) Tezduyar, T.E., et al.: Finite element stabilization
parameters computed from element matrices and vec-
tors, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **190**,
pp.411-430, 2000.
 - 14) Gresho, P.M., et al.: A modified finite element
method for solving the time-dependent, incompress-
ible Navier-Stokes equations. Part 1: Theory, *Int. J.
Numer. Meth. Fluids*, **4**, pp.557-598, 1984.
 - 15) Germano, M., et al.: A dynamic subgrid-scale eddy
viscosity model, *Phys. Fluids*, **A3**(7), pp.1760-pp.1765,
1991.
 - 16) Lilly, D.K.: A proposed modification of the Germano
subgrid-scale closure method, *Phys. Fluids*, **A4**(3),
pp.633-pp.635, 1992.
 - 17) 松本純一・高瀬慎介・飯塚悟: 直交基底気泡関数要素
を用いた LES による球周り流れ解析, 計算工学会講演会,
11, pp.269-272, 2006.
 - 18) Hughes, T.J.R., et al.: Large Eddy Simulation and
the variational multiscale method, *Computing and Vi-
sualization in Science*, **3**, pp.47-pp.59, 2000.
 - 19) Collis, S.S.: Monitoring unresolved scales in multi-
scale turbulence modeling, *Phys. Fluids*, **13**, pp.1800-
1806, 2001.
 - 20) 長谷川里美・長谷川秀彦・藤野清次 訳: 反復法 Templates,
朝倉書店, 1996.
 - 21) 倉橋哲弘・檜山和男: 安定化有限要素法に基づく LES
乱流モデルの精度検証, 数値流体力学シンポジウム, **18**,
A8-4(in CD-ROM), 2004.
 - 22) Singh, S.P. and Mittal, S.: Flow past a cylinder: shear
layer instability and drag crisis, *Int. J. Numer. Meth.
Fluids*, **47**, pp.75-98, 2005.
 - 23) Pierre, R.: Simple C^0 approximations for the compu-
tation of incompressible flows, *Comput. Methods Appl.
Mech. Engng.*, **68**, pp.205-227, 1988.
 - 24) 山田貴博: 非圧縮体に対する MINI 要素の数値不安定
性, 応用力学論文集 (JSCE), **2**, pp.201-209, 1999.
 - 25) 檜山和男・西村直志・牛島省: 並列計算法入門, 丸善,
2003.
 - 26) Wieselsberger, C.: Neuere feststellungen über die
gesetze des flüssigkeits-und luftwiderstands, *Phys. Z.*,
22, 321-328, 1921.
 - 27) 海保真行・池川昌弘・加藤千幸: 有限要素法/差分法複
合非圧縮性流れ解析 (第 2 報, 球周りの三次元解析), 日
本機学会論文集 (B 編), **63**(611), pp.43-48, 1997.

(2007 年 4 月 12 日 受付)