応用力学論文集 Vol.10, pp.225-230　(2007年8月)　土木学会

材料不均一性を考慮した破壊現象の基礎的研究

Foundamental research of failure phenomena with heterogenity of material

若井淳*・堀宗朗**・小国健二***
Atsushi Wakai, Muneo Hori and Kenji Oguni

*学生会員　東京大学大学院工学系研究科社会基盤学専攻（〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1）
**正会員　Ph.D.　東京大学教授　東京大学地震研究所（〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1）
***正会員　Ph.D.　東京大学助教授　東京大学地震研究所（〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1）

In order to analyze failure phenomena, it is important to use heterogeneous models instead of an ideally homogeneous one since crack path is strongly influenced by the presence of local heterogeneities. Numerical Monte-Carlo simulation is not feasible for such heterogeneous models if each simulation is computationally expensive. The authors are proposing FEM-β to solve this problem. The present paper provides one example of Monte-Carlo simulation of analyzing crack path in heterogeneous models. The probability density functions of the crack paths are obtained, and they are compared with the path of the ideally homogeneous model. The usefulness of the Monte-Carlo simulation of heterogeneous models for failure analysis is discussed.

Key Words : *Heterogeneous Analysis, Particle Discretization, Monte Carlo Simulation*

1. はじめに

破壊現象の再現と予測は固体計算力学にとって重要課題の一つである．固体計算力学にかかわる多くの分野で破壊現象が研究されており[1),2),3)]，理論から実用まで成果が挙げられているが，亀裂の進展経路という基本的な問題に対して完全な回答は与えられていないようである．実際，破壊現象の再現・予測に関しては，現在も種々の新しい解析手法が提案されている[4),5),6)]．

著者らの独断かもしれないが，固体計算力学分野での破壊現象の研究は理想的均一体モデルを使ったものが主流である．不均一体モデルを扱ったものは，決して皆無ではないが，多くはない[7)]．とりわけ亀裂進展問題を扱っているものの多くは，理想的均一体モデルを使って，唯一の亀裂進展経路を求める解析を行っている．一方，実際の物体においては，材料の不均一性が亀裂進展経路をさまざまに変えることは広く認識されている．不均一性の程度にもよるが，理想的均一体モデルの解析では再現・予測することが困難な亀裂進展経路が観察されている．したがって，理想的均一体モデルではなく不均一体モデルを使い，ばらつきも含めた亀裂進展経路を計算することは，実際の物体における亀裂進展経路の再現・予測を行う上で重要な課題であると思われる．

固体計算力学では有限要素法 (FEM) が標準的に用いられる．亀裂進展問題では，リメッシュ法のように亀裂進展のたびに領域の再分割を行ったり[8),9)]，メッシュレス法のように高度な離散化が必要となるため[10),11)]，FEM 解析の計算コストは決して安くはない．不均一体モデルの FEM 解析も同程度に計算コストがかかる．したがって，不均一性をさまざまに変えたモンテカルロシミュレーションに通常の FEM 解析を適用することは簡単ではない．この点を考慮し，著者らは安い計算コストでモンテカルロシミュレーションを可能とする，新しい FEM 解析手法を FEM-β として提案している[12),13)]．

上記を背景とし，本論文は，不均一体モデルの破壊現象を再現・予測する，FEM-β を使ったモンテカルロシミュレーションを行う．これにより，理想的均一体モデルの破壊現象と不均一体モデルの破壊現象の比較を行い，両者の差を吟味することで，破壊現象における不均一体モデルの数値解析の必要性・重要性を考察する．本論文では，亀裂進展問題として，単一亀裂を取り上げる．理想的均一体モデルの理論・数値解析があるため，不均一体モデルのモンテカルロシミュレーションの必要性・重要性を議論するには適した問題である．

2. FEM-β

本論文で使用する，破壊現象のモンテカルロシミュレーションに適した数値解析手法である FEM-β の概略を説明する．FEM-β は関数の離散化に粒子離散化を組み込んだ FEM である．図-1 に示すように，通常の三角形要素を用いた FEM では，滑らかであるが互いに重なり合う形状関数を使って離散化を行う．一方，粒子離散化では，至るところ不連続で互いに重なりのない特性関数を使って離散化を行う．具体的には，Voronoi 分割された領域 $\{\Omega^\alpha\}$ の特性関数を ϕ^α($x \in \Omega^\alpha$ のとき 1，$x \notin \Omega^\alpha$ のとき 0) とすると，互いに重なりのない特性関数 $\{\phi^\alpha\}$ による関数 u の離散化は以下のようになる．

$$u^d(\mathbf{x}) = \sum_\alpha u^\alpha \phi^\alpha(\mathbf{x}) \tag{1}$$

すなわち，各 Voronoi 分割の平均値を使って関数が離散化される．

離散化された関数の微係数の計算には．Voronoi 分割と双対をなす Delaunay 分割を利用する．すなわち，粒子離散化では，関数とその微係数の離散化に異なる特性関数の組を基底関数として使うのである．図-2 に Voronoi 分割と Deraunay 分割を示す．具体的には，Delaunay 分割された領域 $\{\Psi^\beta\}$ の特性関数を $\psi^\beta(x \in \Psi^\beta$ のとき 1，$x \notin \Psi^\beta$ のとき 0) とすると，互いに重なりのない特性関数 $\{\psi^\beta\}$ による微係数 $u_{,i}$ の離散化は以下のようになる．

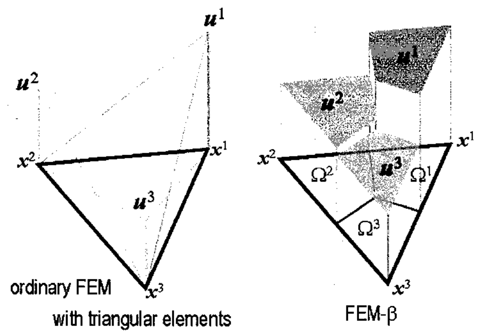
$$u^d_{,i}(\mathbf{x}) = \sigma^d_i(\mathbf{x}) = \sum_\beta \sigma^\beta_i \psi^\beta(\mathbf{x}) \tag{2}$$

FEM-β の剛性マトリクスを計算すると，一様ひずみの三角形要素を用いた FEM と一致する．したがって，FEM-β の精度は一様ひずみの三角形要素を用いた FEM と一致する．特性関数を使っていることから，剛性マトリクスの成分をバネ定数とみなすことができる．このバネ定数は材料特性によって厳密に決まる．図-3 に示すように，このバネは着目している要素同士を直接結ぶ直接バネと，これらの要素同士を別の要素を介してして結ぶ間接バネに分割できる．破壊は，直接バネを切断すること，すなわち，この直接バネのバネ定数に対応する剛性マトリクス成分を 0 に変換することで簡易に表現できる．これは DEM と同様，非常に簡便な破壊の表現方法である．

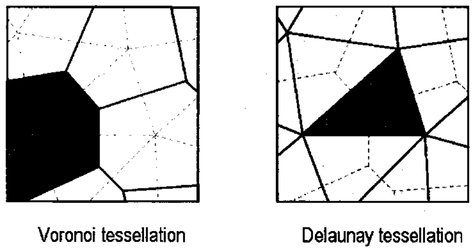
亀裂を変位の不連続面とすると，互いに不連続かつ重なり合わない特性関数を離散化に使う FEM-β では，効率の良い計算が可能である．離散化された関数は Voronoi 分割の境界で不連続であり，変位の不連続面を簡単に表現できる．亀裂進展がこの境界に沿うと仮定することで，計算コストは劇的に低減されるのである．なお，Voronoi 分割や Delaunay 分割を使った数値計算手法はさまざま提案されている[14)]が，粒子離散化は数理的に厳密に定義されており，離散化手法としての有効性も検証されている[12),13)]．

3. 不均一性の表現

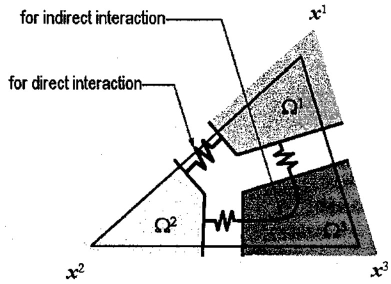
コンクリートのような実際の物体では，材料不均一性が存在していることは，周知の事実である．しかし，実際の物体において，材料不均一性を計測することは，現状では困難である．したがって，材料不均一性が分かっていない状況で，材料不均一性をもつ物体をモデル化して，亀裂進展に及ぼす影響をシミュレーションすることはできない．また，実際の物体の材料不均一性が不明であるから，物体を均一とみなして亀裂進展のシミュレーションを行う試みは数多く行われてきた．しかし，この方法では，亀裂進展に与える不均一性の影響を正当に評価することは難しい．そこで，材料不均一性を考慮した亀裂進展のシミュレーションを実現するための方法として，本論文では，不均一性の程度を確率的に変化させた多くのモデルに対するモンテカルロシミュレーションを行うこととした．



図–1 通常の FEM の離散化と FEM-β の粒子離散化．



図–2 Voronoi 分割と Delaunay 分割．



図–3 Ω^1 と Ω^2 をつなぐ直接バネと間接バネ．

材料の不均一性には空間スケールと材料定数の差の度合いという二つの特性があるが，本論文では，メッシュサイズが材料不均一性の空間スケールを表現する指標と考えている．すなわち，メッシュサイズが小さいほど，材料不均一性の空間スケールが小さくなり，均一に近づいていくという意味である．FEM-β では，メッシュの境界が亀裂進展経路の候補となるためである．コンクリートを例にすると，メッシュの境界をモルタルと骨材の界面として捉えることもできる．この方法は，通常の FEM を利用した解析と比較して，亀裂進展方向の候補が限定されるものの，破壊の表現方法として，FEM-β と同様の特徴をもつ DEM がしばしば破壊解析に利用されている状況を見る限り，本論文で扱う亀裂進展経路のばらつきの評価には十分であると思われる．

4. 不均一体のモンテカルロシミュレーション

理想的均一体モデルと不均一体モデルの破壊現象を比較するため，具体的な亀裂進展問題として，単一亀

表–1 単一亀裂の進展問題の設定.

弾性係数	1.0
ポアソン比	0.25
境界変位量(鉛直方向)	0.01
軸ひずみ	0.005
材料強度	0.01

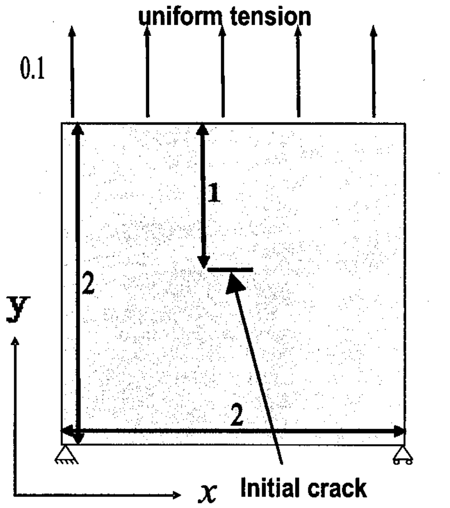
裂の進展を扱う．この問題は，平面ひずみ状態を設定した2次元問題である．単純な破壊基準として，解析モデルの領域分割に用いたVoronoi分割の境界上に働く応力が，設定した材料強度を超えたときにVoronoi分割の境界が破壊したとみなす．破壊は，このVoronoi分割の境界に対応するバネのバネ定数(要素剛性マトリクスの成分)を0にすることで表現される．

解析アルゴリズムとしては，以下に述べる単純なアルゴリズムを用いる．載荷ステップごとに，Vornoi分割した境界上に働く応力分布を計算し，応力が材料強度を超えた場合に，その境界に対応するバネのバネ定数を0にする．その後，境界条件を一定に保ったまま，応力分布を再計算する．この過程を繰り返し，材料強度を超える境界がなくなった時点で，次の載荷ステップへ進む．このような過程を繰り返すことで，亀裂進展を追っていく．

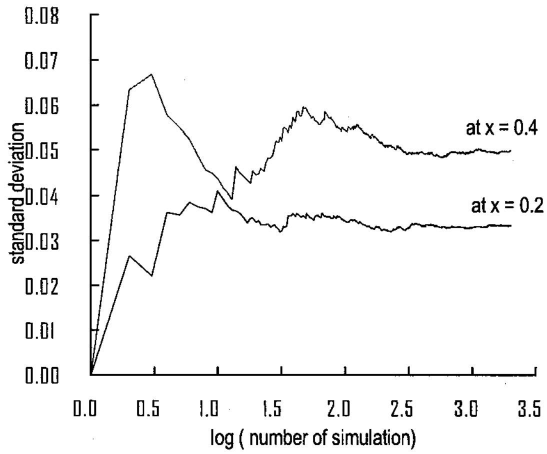
4.1 単一亀裂の進展問題

図-4に示すように，平面ひずみ状態にある辺長2の正方形板に対して，境界上に鉛直方向一様引張変位を与え，板内の初期亀裂の進展を解析する．板の材料が等方線形弾性体であり，応力が引張強度に達すると亀裂が進展するという単純な破壊基準を用いる．FEM-βは，通常のFEMと同様に，応力拡大係数を用いた破壊力学的な基準[11]にも対応できるが，本論文では簡単のため，上で述べた単純な基準を用いている．初期亀裂は長さ0.2の線状亀裂で板の中央に位置している．材料特性と境界条件は表-1に整理する．具体的には，鉛直方向の一様引張変位を0.001ずつ10ステップに分けて与え，最終変位は0.01とする．

次に，FEM-βを用いた不均一体モデルのモンテカルロシミュレーションについて説明する．板内に，Voronoi母点をランダムに発生させ1000種類のVoronoi分割を行う．平均のメッシュサイズは0.05，0.025，0.0125とする．これは板の一辺を40，80，160分割することに対応する．各Voronoi分割の境界条件は同一である．モンテカルロシミュレーションでは，その試行回数が問題となる．そこで，本解析では事前に，図-5に示すような，モンテカルロシミュレーションの試行回数と亀裂進展経路の位置の標準偏差との関係を求めて，ほぼ収束していると判断できる試行回数として1000回を選択した．この図では，メッシュサイズが0.025の場合の，初期亀裂端右側からの距離が0.2と0.4のケースを例として示している．



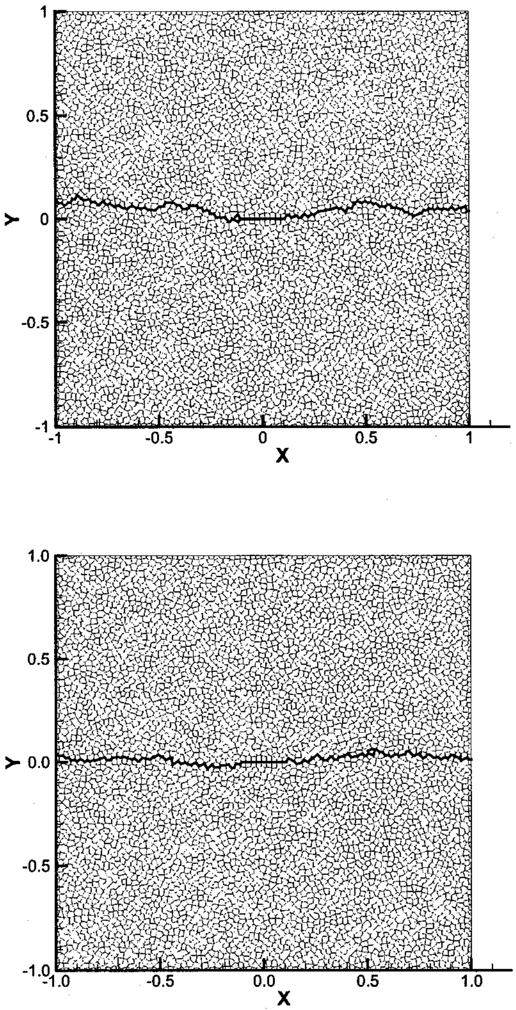
図–4 単一亀裂の進展問題.



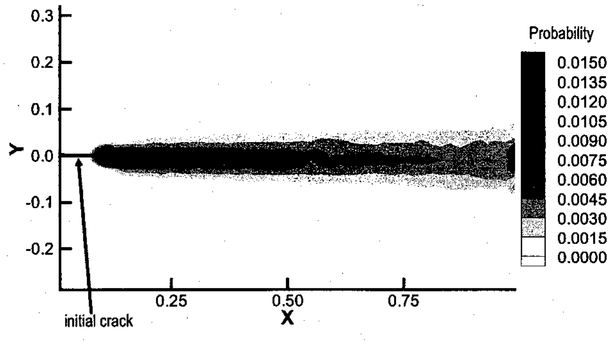
図–5 シミュレーション回数による亀裂進展経路の収束(メッシュサイズ：0.025の場合).

理想的均一体モデルでは，分岐する場合もあるが，対称性のため真っ直ぐに進展する経路が解の一つである．不均一体モデルでは亀裂進展の経路はモデルごとにばらついている．1000回のモンテカルロシミュレーションから計算された亀裂進展経路の例を図-6に示す．また，モンテカルロシミュレーションで計算された亀裂進展経路のばらつきを可視化するため，進展経路の確率密度関数を求め，図-7に示す．この図は，境界上の引張変位が最終変位量である0.01における，初期亀裂の右側の領域内での亀裂進展経路のy座標の確率密度関数である．確率密度関数の値は，初期亀裂の右側を格子分割し，進展亀裂端が格子内を通る場合を数え，モンテカルロシミュレーションの回数で除して計算されている．図からは，不均一体モデルの亀裂進展は相応のばらつきを持つことが示されている．しかし，確率密度関数の平均はほぼ真っ直ぐな経路であり，当然のことながら，理想的均一体モデルの結果と一致する．

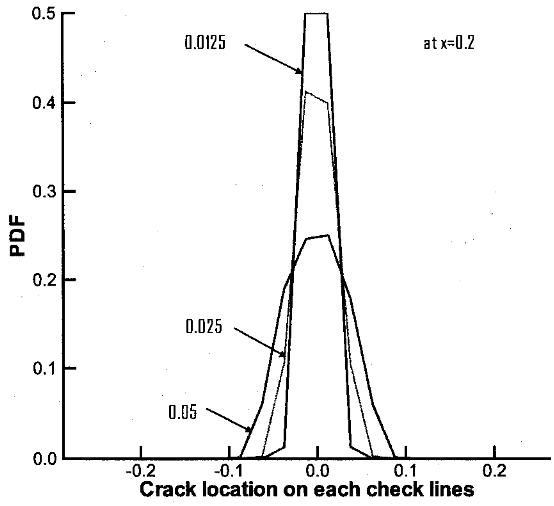
メッシュサイズを小さくすると，不均一体モデルの



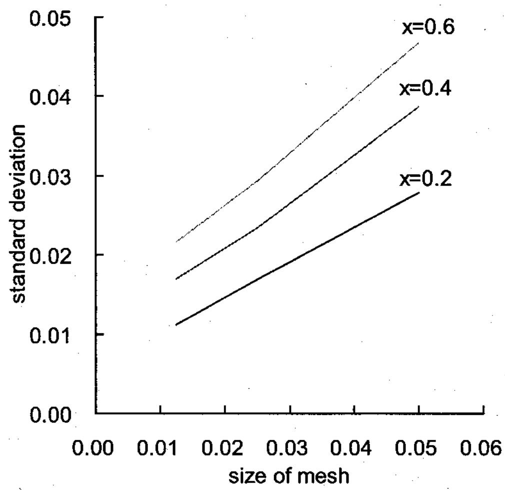
図–6 単一亀裂の不均一体モデルの進展経路の例 (メッシュサイズ：0.025 の場合).



図–7 単一亀裂の不均一体モデルの亀裂進展経路確率密度関数 (メッシュサイズ：0.025 の場合).



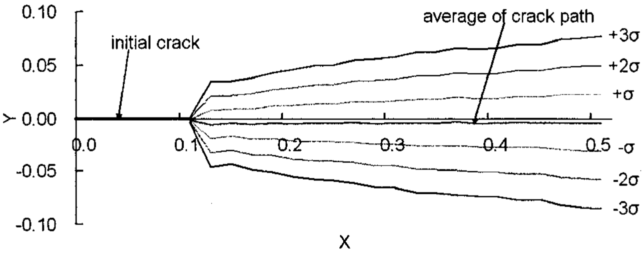
図–8 異なるメッシュサイズでの単一亀裂の亀裂進展経路確率密度関数 (直線 x=0.2 上).



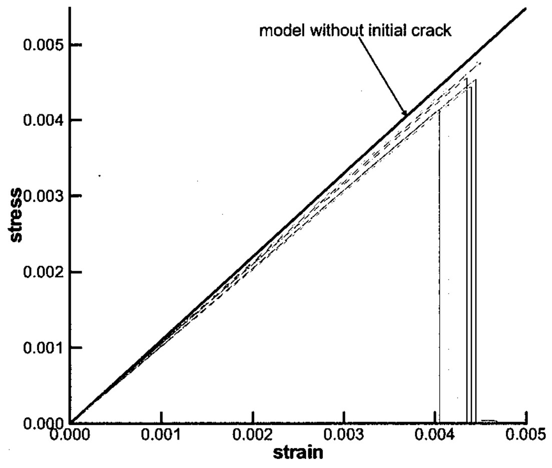
図–9 メッシュサイズを小さくすることによる確率密度関数の収束 (メッシュサイズ：0.025 の場合).

解析から得られる亀裂進展経路の確率密度関数は理想的均一体モデルの亀裂進展経路の確率密度関数であるデルタ関数に集中することが予想される．メッシュサイズが材料不均一性の空間スケールに対応するため，メッシュサイズを小さくすることは理想的均一体に近づくことになるからである．ここでは，3 つのメッシュサイズ (0.05，0.025，0.0125) に対して，y 軸に平行な直線 x =0.2 での亀裂進展経路の確率密度関数を求め，図-8 に示す．この図から，メッシュサイズを小さくすると，確率密度関数はデルタ関数に，徐々にではあるが近づいていく傾向にあることがわかる．

しかし，この図からは，不均一体の確率密度関数が，デルタ関数に収束することまでは必ずしも言えない．そこで，デルタ関数に収束するか否かをより正しく判定



図–10 不均一体モデルの亀裂進展経路の期待値と標準偏差(メッシュサイズ：0.025 の場合).

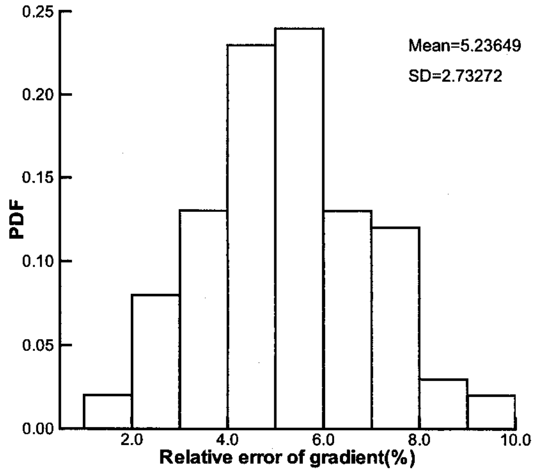


図–11 不均一体モデルの応力とひずみの関係.

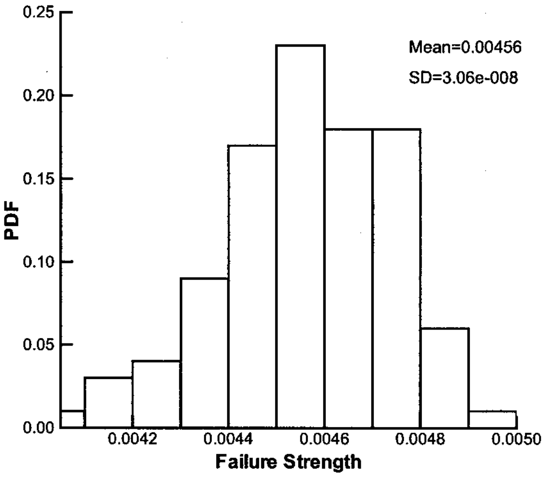
するため，図-9 に，$x=0.2$，0.4，0.6 の y 軸に平行な直線群における，メッシュサイズと亀裂進展経路の標準偏差との関係を示す．この図から，メッシュサイズを小さくすることで，不均一体モデルの亀裂進展経路の確率密度関数が理想的均一体モデルの亀裂進展経路のデルタ関数に収束していく傾向が見て取れる．

本論文では，メッシュサイズが材料不均一性の空間スケールに対応すると考えている．空間スケールは，例えばコンクリートの場合，骨材の寸法に対応する．しかし，メッシュサイズと空間スケールの厳密な関係は不明である．また，不均一性には空間スケールの他に，材料定数の違いという尺度もある．コンクリートを例にすれば，モルタルと骨材の弾性係数の違いである．さらには，不均一性とメッシュサイズの関係も定かではない．今後の検討が必要である．

モンテカルロシミュレーションから得られた亀裂進展経路の確率密度関数 (図-8) から計算される，メッシュサイズが 0.025 の場合の進展経路の平均と標準偏差を図-10 に示す．図では，初期亀裂の右側の領域について示している．モンテカルロシミュレーションの回数が 1000 回であるため，平均は正確に 0 ではない．しかし，メッシュサイズと比較すると平均の値は十分小さく，実質的に理想的均一体モデルの亀裂進展経路に対応すると考えられる．また，その範囲は標準偏差の 6 倍程度であり，亀裂進展経路のばらつきはこの範囲にあることが分かる．なお，この図では，初期亀裂からの距離が大きくなるにつれて亀裂進展経路の標準偏差は大きくなり，亀裂が伸びるにしたがって経路のばらつきが大きくなることも示されている．このように，FEM-β を用いた不均一体モデルのモンテカルロシミュレーションは，上記のような定量的解析結果を，比較的簡単に実現できるのである．



図–12 応力ひずみ関係の傾きの相対誤差の確率密度関数.



図–13 破壊強度の確率密度関数.

不均一体モデルでは，荷重変位 (応力ひずみ) の関係は亀裂進展経路とは異なり，モデルごとにばらつきをもたず，ほぼ一致すると予想される．その理由として，材料特性および境界条件が各モデルで同一であることが挙げられる．比較のために，初期亀裂が存在しないモデルの応力ひずみ関係と 100 パターンの不均一体モデルの変形開始から破壊終了までの応力ひずみの関係

を図-11 に示す．この図から，破壊が始まる前の直線の傾きにばらつきがあり，破壊強度についてもばらつきがあることが分かる．

これについて，より定量的に評価するため，100 パターンの不均一体モデルの応力ひずみ関係の傾きと初期亀裂が存在しないモデルの応力ひずみ関係に関して，それらの傾きの相対誤差の確率密度関数を図-12 に，破壊強度の確率密度関数を図-13 に示す．どちらも正規分布に近い形となっているのが分かる．このばらつきの理由としては，メッシュの形状が 1 次の三角形要素であるため，応力ひずみを評価する際の精度に限界があること，最も単純な材料強度を用いた破壊基準を使ったことが原因ではないかと考えられる．現時点でメッシュの形状は変えることができないものの，応力拡大係数を用いた破壊力学的な基準を使って荷重変位 (応力ひずみ) 関係を求めることは可能である．これにより，応力ひずみ直線の傾きや破壊強度のばらつき程度が改善されると予想できる．今後の課題である．

5. おわりに

本論文では，単一亀裂の進展問題に対し，FEM-β を用いた不均一体モデルのモンテカルロシミュレーションを行い，進展経路のばらつきを計算した．単純な単一亀裂の進展でも，進展経路にはある程度のばらつきが発生する．このようなばらつきが理想的均一モデルの進展経路の解の分岐に対応するのであれば，進展経路のばらつきの評価は，理想的均一体モデルを対象とした通常の FEM 解析では困難である．以上より，亀裂進展経路のばらつきの評価に対して，計算効率の良い FEM-β を使ったモンテカルロシミュレーションの有効性が示唆される．

参考文献

1) 阿部孝弘，矢富盟祥，橋本堅一: 主き裂の進展が抑制される位置関係における平行干渉き裂の進展挙動について，応用力学論文集, Vol.1, pp.55-63, 1998.
2) 佐藤晃，鈴木康正，深堀大介，菅原勝彦：多亀裂問題の亀裂進展解析への応力補償変位不連続法の適用，資源と素材，Vol.120, pp.493-499, 2004.
3) Zhou F., Molinari J.F.: Dynamic crack propagation with cohesive elements: a methodology to address mesh dependency, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.59, pp.1-24, 2004.
4) Y.Mi, M.H.Aliabadi: Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.10, pp.161-171, 1992.
5) Y.Sumi, Z.N.Wang: A finite-element simulation method for a system of growing cracks in a heterogeneous material, *Mechanics of Materials*, Vol.28, pp.197-206, 1998.
6) Su R.K.L., Sun H.Y.: Numerical solutions of two-dimensional anisotropic crack problems, *international Journal of Solids and Structures*, Vol.40, No.18, pp.4615-35, 2003.
7) Chen L., Ballarini R., Grigoriu M.: Crack propagation in a material with random toughness, *International Journal of Fracture*, Vol.125, pp.353-369, 2004.
8) Wawrzynek Paul A., Ingraffea Anthony R.: Interactive approach to local remeshing around a propagating crack, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.5, No.1, pp.87-96, 1989.
9) Bouchard P.O., Bay F., Chastel Y., Tovena I.: Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.189, No.3, pp.723-42, 2000.
10) Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L.: Crack propagation by element-free Galerkin methods, *Engineering Fracture Mechanics* Vol.51, No.2, pp.295-315, 1995.
11) Yagawa G., Yamada T.: Free mesh method: a new meshless finite element method, *Computational Mechanics*, Vol.18, No.5, pp.383-386, 1996.
12) 小国健二，堀宗朗，阪口秀: 破壊現象の解析に適した有限要素法の提案, 土木学会論文集 Vol.766, I-68, pp.203-217, 2004.
13) Muneo HORI, Kenji OGUNI, Hide SAKAGUCHI: Proposal of FEM implemented with particle discretization for analysis of failure phenomena, *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, 53, pp.681-703, 2005.
14) 竹内則雄，武田洋: 引張破壊現象に対する有限体積法による非線形解析法, 構造工学論文集, Vol.1, pp.55-63, 1998.
15) Masayuki KAMAYA: A Crack Growth Evaluation Method for Interacting Multiple Cracks, *JSME International Journal*, Series A, Vol.46, No.1, pp.15-23, 2003.
16) Masayuki KAMAYA, Nobuo TOTSUKA: Influence of interaction between multiple cracks on sterss corrosion crack propagation, *Corrosion Science*, pp.2333-2352, 2002.

(2007 年 4 月 12 日 受付)