

三次元スカラー波動および弾性波動問題における 演算子積分時間領域境界要素法

Operational quadrature time-domain boundary element method
in 3-D scalar wave and elastic wave problems

斎藤 隆泰*・廣瀬壮一**・福井卓雄***・石田貴之****

Takahiro SAITOH, Sohichi HIROSE, Takuo FUKUI and Takayuki ISHIDA

*正会員 工博 福井大学大学院工学研究科日本学術振興会特別研究員 PD (〒 910-0017 福井県福井市文京 3-9-1)

**正会員 工博 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻教授 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

***正会員 工博 福井大学大学院工学研究科原子力・エネルギー安全工学専攻教授 (〒 910-0017 福井県福井市文京 3-9-1)

****学生会員 福井大学大学院工学研究科原子力・エネルギー安全工学専攻修士課程 (〒 910-0017 福井県福井市文京 3-9-1)

This paper presents a Operational Quadrature time-domain Boundary Element Method (OQ-BEM) in 3-D scalar and elastic wave problems. Time-domain Boundary Element Method (BEM) is known as a suitable numerical approach for transient analysis of scalar and elastic waves in an infinite or half space domain, since BEM can deal with an infinite region without any modification. However, the use of direct time-domain BEM sometimes causes the instability of time-stepping solutions. To overcome this difficulty, a new time-domain BEM (OQ-BEM) for 3-D scalar and elastic wave problems is developed in conjunction with Operational Quadrature Method (OQM), which was proposed by Lubich to obtain stable solutions in a time-stepping scheme. In OQ-BEM, the convolution integrals in boundary integral equations are numerically approximated by quadrature formulas, whose weights are computed by using the Laplace transform of the fundamental solutions of a linear multistep method. As numerical examples, wave scattering solutions obtained by the OQ-BEM are shown and the accuracy of the method is confirmed to validate the proposed method.

Key Words : Boundary Element Method (BEM), Operational Quadrature Method (OQM), Time-domain

1. はじめに

スカラー波動場や弾性波動場を解析する波動解析技術は超音波非破壊評価や物理探査に関する数値シミュレーションを行う上で非常に重要であることから、これまで多くの手法が開発され、種々の問題に適用されてきた¹⁾。特に、波動解析シミュレーション手法の一つである境界要素法は、無限遠における放射条件を基本解が自動的に満たすため、波動の放射に関して近似的な取り扱いが必要なく、物理的に矛盾のない波動場を求めることが可能であるという利点を持つ。その境界要素法の時間領域解法は、通常、時・空間について離散化を行い、各時刻の解をそれ以前の境界データから求める時間ステップ境界要素法²⁾が用いられている。しかしながら、逐次解法であるため、解の安定性の問題を扱う必要が生じ、場合によっては数値解が発散することから適切な解を得られない場合もありうる。このような中、Lubich は時間に関する繰込み積分を、ある重み関数を用いた離散化繰込み積で置き換える手法である演算子積分法 (Operational Quadrature Method) を提案した³⁾⁴⁾。Lubich が、演算子積分法の積分方程式法に対する有効性を示した後⁵⁾、近年、その演算子積分法を時間領域境界要素法へ適用した演算子積分時

間領域境界要素法に関する研究が行われている。二次元スカラー波動問題に対して Abreu⁶⁾らが、三次元スカラー波動問題に対して斎藤・廣瀬・福井⁷⁾が、粘弾性波動問題に対して Schanz ら⁸⁾が、そして、二次元異方性問題に対しては Zhang⁹⁾がその適用例を示している。演算子積分時間領域境界要素法の利点は主に三つ存在する。一つ目は、数値繰込み積分を精度よく安定に計算できるということ、二つ目は、時間領域粘弾性波動問題のような基本解を直接求めるのが難しいような問題に対しても、演算子積分法を用いることで解を見出せるということ、そして三つ目として、従来の手法に比べて定式化がやや容易になる点である。

著者らは、これまで、二次元¹⁰⁾、三次元⁷⁾スカラー波動問題、二次元粘弾性波動問題¹¹⁾における演算子積分時間領域境界要素法について検討を行ってきた。本論分では、まず、演算子積分法の基本的な考え方について述べた後、前論文⁷⁾を元に、演算子積分時間領域境界要素法について、三次元弾性波動問題を中心に述べる。数値解析例として、球形散乱体によるスカラー波動、弾性波動の散乱問題を解析し、本手法の有効性について確認する。

2. 演算子積分法 (Operational Quadrature Method)

はじめに、演算子積分法 (Operational Quadrature Method) について述べる。Lubich は、繰込み積分 $f(t) * g(t)$ を、時間依存の関数である $f(t - \tau)$ のラプラス変換を用いた離散化繰込み積分によって近似する手法を提案した (詳しい条件については文献³⁾⁴⁾を参照)。一般的に、繰込み積分は次のように表される。

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

式 (1) で $*$ は時間に関する繰込み積を表す。Lubich の演算子積分法によれば、式 (1) で表される繰込み積分は、時間 t を時間間隔 Δt を用いて N ステップに分割すれば、次のように近似される。

$$f(n\Delta t) * g(n\Delta t) \simeq \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t), \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (2)$$

ただし、 $\omega_j(\Delta t)$ は重み関数であり、複素変数 z に関する次の級数展開によって決定される。すなわち、

$$F\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(\Delta t)z^n \quad (3)$$

であり、式 (3) において F は時間依存関数 f のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (4)$$

によって与えられる。式 (3) で定義された級数展開における ω_n の決定に関して、コーシーの積分公式を用いれば、式 (2) の重みは次のように表される。

$$\begin{aligned} \omega_n(\Delta t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} F\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1} dz \\ &\simeq \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{L}}. \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 f のラプラス変換 F の存在を保証するためには、引数の実部が正のときに正則でなければならない。また、式 (5) の $\gamma(z_l)$ は線形マルチステップ法 (差分法) における生成多項式の商であり、引数 z_l は半径 $\rho < 1$ の円周上の等分点 L を考え、 $z_l = \rho e^{2\pi i l/L}$ によって表される。 ρ は目標とする精度によって決定されるパラメータである。

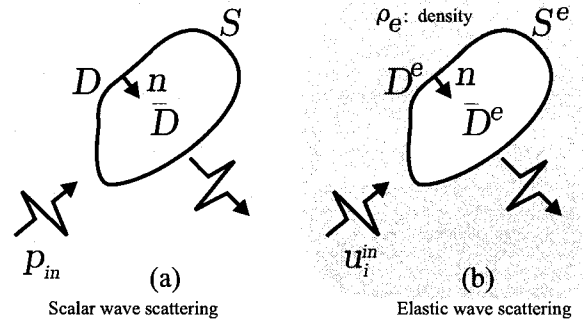


図-1 入射波による外部散乱問題 (a):スカラー波の散乱問題 (b):弾性波の散乱問題

3. 三次元スカラー波動問題における演算子積分時間領域境界要素法

三次元スカラー波動問題は、三次元弾性波動問題の基礎となる。そのため、前論文⁷⁾を元に、まず、三次元スカラー波動問題について記述する。

3.1 三次元スカラー波動問題における時間領域境界要素法

さて、図 1-(a) で表されるような外部領域 D における散乱体 $\bar{D}$ によるスカラー波動の散乱問題を考える。入射波 p_{in} が存在し、 p_{in} は、散乱体 $\bar{D}$ の境界表面 S により反射・散乱されるとする。このとき、入射波が散乱体 $\bar{D}$ に到達するまで、散乱波 p は静かな過去を持つとする。すなわち、初期条件 $p(x, t = 0) = 0$ 及び $\partial p(x, t = 0)/\partial t = 0$ を考慮すれば、 p が満たす支配方程式及び境界条件は次のように表される。

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{in } D \quad (6)$$

$$p = \hat{p} \quad \text{on } S_1, \quad q = \frac{\partial p}{\partial n} = \hat{q} \quad \text{on } S_2, \quad S_2 = S \setminus S_1 \quad (7)$$

ただし c は波速を表し、 $\partial/\partial n$ は境界表面 S の外向き法線方向微分を表す。また、 $\hat{p}$ 及び $\hat{q}$ は与えられた境界条件である。式 (6)、(7) により定義された問題の解は、次の時間領域境界積分方程式を解くことにより求まる。

$$\begin{aligned} C(x)p(x, t) &= p_{in}(x, t) + \int_S G(x, y, t) * q(y, t) dS_y \\ &\quad - \int_S H(x, y, t) * p(y, t) dS_y \end{aligned} \quad (8)$$

ただし式 (8) において、 $G(x, y, t)$ 及び $H(x, y, t)$ は三次元時間領域スカラー波動問題における基本解及び対応する二重層核であり

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (9)$$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad (10)$$

で表される。式 (9) において、 δ はディラックのデルタ関数であり、 r は $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ により定義される。また、 C は自由項である。通常、境界積分方程式 (8) は境界上に適切な近似関数基底を導入し、時間・空間に関して離散化することで、境界未知量に関する代数方程式に帰着される。しかしながら、従来の時間領域境界要素法では、時間ステップの増加とともに解が不安定になること（クラック問題などでは解が安定な場合もある）、式 (9)、(10) のように、解析的な時間領域の基本解が求まらなければ計算が容易でないという欠点がある。

3.2 演算子積分法を用いたスカラー波動問題における三次元時間領域境界要素法

前節で述べたような欠点を改善するため、時間領域境界要素法に演算子積分法を適用することを考える。式 (8) の境界積分方程式を数値的に解くために、境界上の未知量 p と q を近似関数基底 ϕ_i を用いて次のように表す。

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x}) p_i(t), \quad q(\mathbf{x}, t) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x}) q_i(t) \quad (11)$$

ただし、 p_i 及び q_i はそれぞれ i 番目の基底における時間依存の境界値である。式 (11) を境界積分方程式 (8) に代入し、 $\mathbf{x} \in D \rightarrow \mathbf{x} \in S$ なる極限移行を考慮し、境界 S が滑らかであると仮定すれば、時間増分 Δt に対して、次の第 n ステップにおける離散化された時間領域境界積分方程式を得ることが出来る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i \phi_i(\mathbf{x}) p_i(n\Delta t) &= p_{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ + \sum_i \sum_{k=1}^n [A_i^{n-k}(\mathbf{x}) q_i(k\Delta t) - B_i^{n-k}(\mathbf{x}) p_i(k\Delta t)] &. \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、式 (12) において、 A_i^m 、 B_i^m は影響関数である。影響関数 A_i^m 、 B_i^m は式 (2) の離散化繰込み積とその重み表現式 (5) を用いた演算子積分法により、それぞれ次のように得ることができる。

$$A_i^m(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi_i(\mathbf{y}) e^{\frac{-2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (13)$$

$$B_i^m(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi_i(\mathbf{y}) e^{\frac{-2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (14)$$

ただし、 s_l は $s_l = \gamma(z_l)/\Delta t$ で定義される。また、パラメーター ρ は $\rho < 1$ の条件で与えられ、 $\rho^L = \sqrt{\epsilon}$ として目標とする精度 ϵ によって決定される。 $\gamma(z_l)$ を決定するために、本研究では次の差分式

$$\gamma(z) = (1 - z) + \frac{(1 - z^2)}{2} \quad (15)$$

を用いた。ここで、式 (13)、(14) は離散フーリエ変換の形で表されていることから、それらの和には高速フーリエ変換 (FFT) を利用することが出来る。また、ラプラス変換 (4) より、時間領域基本解 (9)、(10) のラプラス変換域における基本解 $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ 及び $\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は次のように求めることが出来る。

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\frac{s}{c} r} \quad (16)$$

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{s}{c} r} \left(-\frac{s}{cr} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial r}{\partial n_y}. \quad (17)$$

各境界上の節点に関して離散化した境界積分方程式 (12) を行列表示すれば、

$$\frac{1}{2} \mathbf{p}^n = \mathbf{p}_{\text{in}}^n + \sum_{k=1}^n \mathbf{A}^{n-k} \mathbf{q}^k - \sum_{k=1}^n \mathbf{B}^{n-k} \mathbf{p}^k \quad (18)$$

となる。ただし式 (18) において n 、 k はそれぞれ時間増分 Δt に対するステップ数 $t_n = n\Delta t$ 、 $t_k = k\Delta t$ に対応する正の整数である。また $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は離散化された各境界要素に関する影響関数 A_i^m 、 B_i^m に対応した係数行列である。 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ はそれぞれ p と対応する q に関するベクトルである。式 (18) は、式 (7) の境界条件を考慮し、既知量を右辺、未知量を左辺に並び替え、境界未知量に関する代数方程式を解くことにより、解を求めることが出来る。

4. 三次元弾性波動問題における演算子積分時間領域境界要素法

次に、本節では、前節の記述を参考に、三次元弾性波動問題について考える。

4.1 三次元弾性波動問題における時間領域境界要素法

スカラー波動問題と同様に、図 1-(b) で表されるような入射波 u^{in} による外部散乱問題を考える。散乱体の外部領域を D^e 、その境界を S^e とする。変位 u 及び対応する表面力 t に関して、物体力を無視すれば、支配方程式及び境界条件は、

$$\mu u_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu) u_{ij,j}(\mathbf{x}, t) = \rho_e \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad \text{in } D^e \quad (19)$$

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \hat{u}(\mathbf{x}, t) \text{ on } S_1^e, \quad t(\mathbf{x}, t) = \hat{t}(\mathbf{x}, t) \text{ on } S_2^e, \\ S_2^e &= S^e \setminus S_1^e \end{aligned} \quad (20)$$

で表される。支配方程式 (19) において、 ρ_e は密度であり λ, μ はラメ定数を表す。また式 (20) において、 $\hat{u}(\mathbf{x}, t), \hat{t}(\mathbf{x}, t)$ は与えられた変位および表面力に関する境界条件を表す。さて、三次元弾性波動問題における時間領域境界積分方程式は、

$$\begin{aligned} C_{ij} u_j(\mathbf{x}, t) &= u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_{S^e} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y^e \\ &\quad - \int_{S^e} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y^e \\ &\quad \text{for } \mathbf{x} \in D^e. \end{aligned} \quad (21)$$

で表される。式 (21) において、 C_{ij} は自由項である。また、 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は三次元時間領域弾性波動問題における基本解及び二重層核であり、それぞれ次のように定義される。

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= \frac{t}{4\pi\rho_e} \left\{ \left(\frac{1}{r} \right)_{,ij} \left[H \left(t - \frac{r}{c_L} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - H \left(t - \frac{r}{c_T} \right) \right] - r_{,i} \left(\frac{1}{r} \right)_{,j} \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{c_L} \delta \left(t - \frac{r}{c_L} \right) - \frac{1}{c_T} \delta \left(t - \frac{r}{c_T} \right) \right] \\ &\quad \left. + \frac{\delta_{ij}}{r^2 c_T} \delta \left(t - \frac{r}{c_T} \right) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= n_j(\mathbf{y}) \rho_e (c_L^2 - 2c_T^2) U_{il,l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ &\quad + \rho_e c_T^2 (U_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + U_{ik,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)) n_k(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、 H はステップ関数であり、 c_L, c_T は縦波及び横波の波速であり、 $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_e}$, $c_T = \sqrt{\mu/\rho_e}$ で定義される。そして、 $n_k(\mathbf{y})$ は境界 S^e における外向き単位法線ベクトルの成分を表し、 $(\cdot)_{,i}$ は $\partial/\partial y_i$ を表す。

スカラー波動問題と同様に、境界積分方程式 (21) を離散化し、基本解 (22), (23) から影響関数を計算する

ことにより境界の未知量を決定することが出来る。

4.2 演算子積分法を用いた弾性波動問題における三次元時間領域境界要素法

三次元スカラー波動問題と同様、三次元時間領域弾性波動問題における境界要素法に演算子積分法を適用することを考える。式 (11) に対応し、境界未知量 u, t に関し、次の近似基底関数を導入する。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_I \phi^I(\mathbf{x}) u_i^I(t), \quad t_i(\mathbf{x}, t) = \sum_I \phi^I(\mathbf{x}) t_i^I(t) \quad (24)$$

ここで、 $u_i^I(t)$ および $t_i^I(t)$ は I 番目の基底における境界値を表す。式 (24) を境界積分方程式 (21) に用い、 $\mathbf{x} \in D^e \rightarrow \mathbf{x} \in S^e$ を考慮して離散化すれば、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_I \phi^I(\mathbf{x}) u_i^I(n\Delta t) &= u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_I \sum_{k=1}^n \left[A_{ij}^{n-k,I}(\mathbf{x}) t_j^I(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k,I}(\mathbf{x}) u_j^I(k\Delta t) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

式 (3), (5) を式 (21) の境界積分方程式に適用すれば、式 (25) の影響関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} A_{ij}^{m,I}(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{S^e} \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi^I(\mathbf{y}) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y^e \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} B_{ij}^{m,I}(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{S^e} \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi^I(\mathbf{y}) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y^e \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 s_l は $s_l = \gamma(z_l)/\Delta t$ によって定義される。 $\gamma(z_l)$ の評価には式 (15) を用いる。また、式 (26), (27) において $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s), \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は式 (22), (23) に関するラプラス変換域での三次元弾性波動問題の基本解であり、それぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) &= \frac{1}{4\pi\rho_e} \left[\frac{3r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}}{r^3} \left\{ \frac{sr + c_L}{c_L s^2} e^{-\frac{sr}{c_L}} - \frac{sr + c_T}{c_T s^2} e^{-\frac{sr}{c_T}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_{,i} r_{,j}}{r} \left\{ \frac{e^{-\frac{sr}{c_L}}}{c_L^2} - \frac{e^{-\frac{sr}{c_T}}}{c_T^2} \right\} + \frac{\delta_{ij}}{r c_T^2} e^{-\frac{sr}{c_T}} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = & n_j(\mathbf{y})\rho_e(c_L^2 - 2c_T^2)\hat{U}_{il,l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ & + \rho_e c_T^2(\hat{U}_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \hat{U}_{ik,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t))n_k(\mathbf{y})\end{aligned}\quad (29)$$

式 (28), (29) により影響関数 (26), (27) が計算できれば、スカラー波動問題と同様に式 (25) に対応する代数方程式を解くことで、境界上の未知量を決定することが出来る。以上が、三次元スカラー波動および弾性波動問題における演算子積分境界要素法を構成する基礎式となる。

5. 演算子積分時間領域境界要素法の計算効率等についての考察

演算子積分時間領域境界要素法の計算時間・記憶容量に関して検討する。境界上に M 個の要素と選点をとった場合、影響関数の計算式 (13)(14) や式 (26)(27) について $O(M^2 L)$ 程度の計算が必要である。影響関数の計算は、各ステップ毎に繰り返されるので、第 N ステップまでの計算量は $O(M^2 LN)$ である。また、各ステップ毎の方程式の解法について考えると、波動問題の時間領域境界要素法では、係数行列のほとんどが零要素であるとみなすことができる。そのため、係数行列を帯行列化することができることから、各ステップ毎の方程式の解法の計算量は $O(M)$ 程度である。したがって、結局、第 N ステップまでの全計算量は $O(M^2 LN)$ である。また、各影響関数の値を全て記憶するとすれば、第 N ステップまでの計算に必要な記憶容量は $O(M^2 N)$ となる。通常の時間領域境界要素法における計算時間、記憶容量はそれぞれ $O(M^2 N^2)$ 、 $O(M^2 N)$ であり、次節で述べるよう、 $L = N$ とすれば、演算子積分境界要素法の第 N ステップまでの全計算量は $O(M^2 LN) = O(M^2 N^2)$ となることから、計算時間、記憶容量のオーダーは、ともに、通常の時間領域境界要素法と大差ないと考えられる。

しかしながら、演算子積分法を適用したことにより、時間領域における境界要素解法ではあるが、むしろ周波数領域における境界要素解法に形式的に似た形となっており、従来の時間領域境界要素法の定式化¹²⁾¹³⁾に比べて、形式的にやさしくなっている。式 (12) および式 (25) より、各ステップ毎の計算については、影響関数の計算式で l に関する和が必要となるものの、周波数領域の計算と類似した形となり、計算時間、記憶容量を低減させるための、高速多重極法¹⁴⁾¹⁵⁾の適用も周波数領域の高速多重極境界要素法と同様の考え方で、比較的容易に適用できると考えられる。

また、時間領域で閉じた基本解を得ることが難しい粘弾性波動問題では、ラプラス変換域では閉じた形で

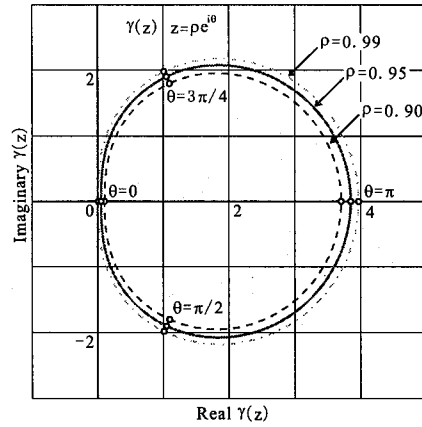


図-2 二次の差分式を用いた時の $\gamma(z) = \sum_m (1-z)^m/m$

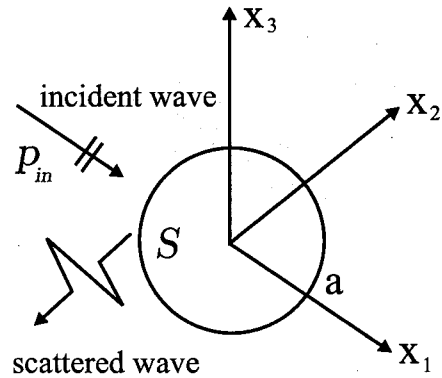


図-3 球形散乱体による三次元スカラー波動解析モデル

基本解を得ることができる。したがって、そのような問題に対しても演算子積分境界要素法は有効であると思われる。

6. 演算子積分時間領域境界要素法による数値解析

以下、三次元スカラー波動問題及び弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法による数値解析例を示す。なお、以下の全ての計算において散乱体は半径 a の球形とし、境界上の p, q, u, t を各要素内で一定と考え、散乱体一つあたり 384 要素に分割離散化して解析を行った。

6.1 解析パラメータの決定法

演算子積分時間領域境界要素法解析では、 $c\Delta t$ 、 L 、 ρ の値を適切に決定しなければならない。ここでは、これらのパラメータは次のようなことを考慮して決定する。

- $c\Delta t$: $c\Delta t$ は要素の大きさに適合するように選ぶ。通常の時間領域境界要素法においても、 $c\Delta t$ は要素の大きさに適合するように取らなければならない

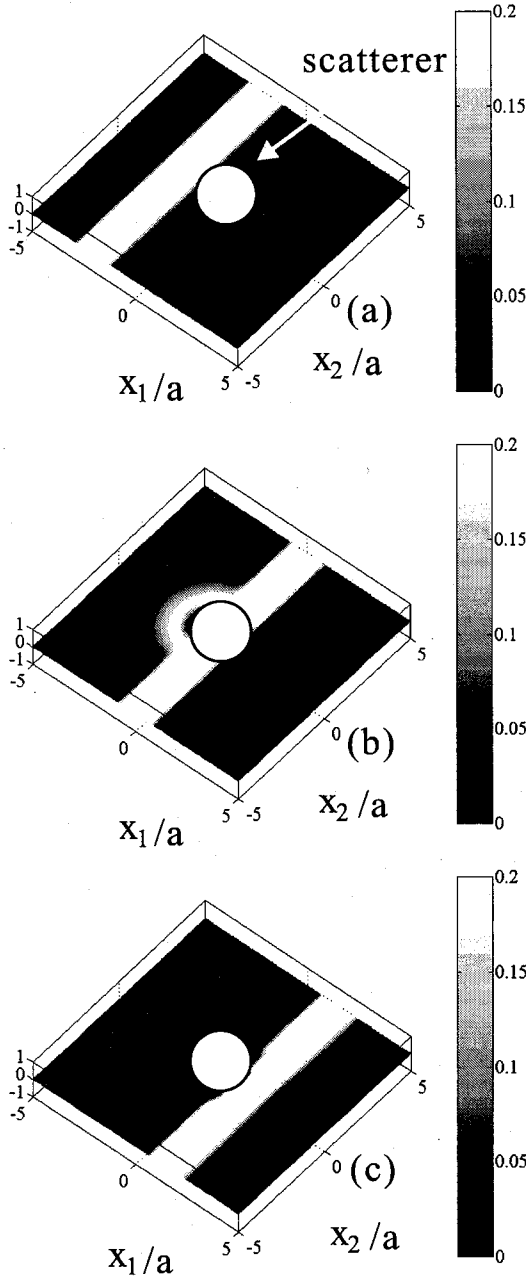


図-4 平面波が入射した場合の球形散乱体周りの平面 $x_3 = 0$ におけるスカラー波動場 (a): $ct/a = 0.0$ (b): $ct/a = 2.0$ (c): $ct/a = 3.0$.

いが、 $c\Delta t$ が小さい場合では、時間ステップとともに数値誤差が増大し、ついには解が発散する場合もありうる。演算子積分時間領域境界要素法では $c\Delta t$ が小さい場合でも解析は安定である。

- L : L は影響関数の計算式 (26) や (27) の切捨て誤差に関係する。特別な理由がない限り、ここでは $L = N$ として計算を行う。また、式 (13)(14) や式 (26)(27) の計算には FFT が使えるので、2 のべき乗の値に設定すると計算の効率が良い。
- ρ : ρ は誤差 ϵ と L に関して、 $\rho^L = \sqrt{\epsilon}$ を満足するようにとる。すなわち、 $\rho = 10^{\log_{10} \epsilon / 2L}$ とする。

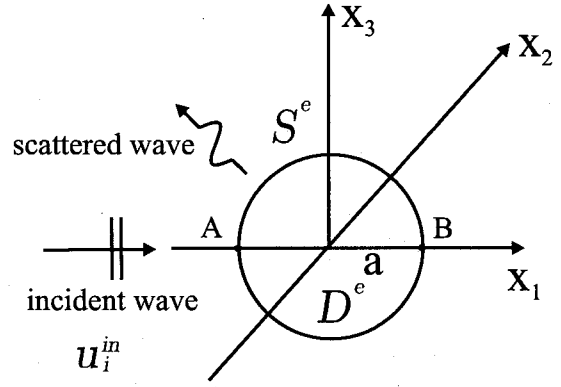


図-5 一つの空洞による三次元弾性波動散乱解析モデル

図 2 に、二次の差分式を用いるときの $\gamma(z)$ に対する ρ の影響を複素平面上にプロットしたものを示す。 $\gamma(z)$ は ρ に対して図 2 のような挙動を示す。したがって図 2 によれば $r/c\Delta t$ が大きければ $\theta = \pi$ の付近で引数 $\gamma(z)r/c\Delta t$ の値は相当に大きくなる可能性があることから、影響係数の計算において計算精度を落とさずに適切な切捨てを行うことが出来る可能性がある¹⁰⁾。

6.2 三次元スカラー波動問題に対する数値解析例

図 3 で表されるような球形散乱体による散乱問題を考える。入射波は x_1 軸の正の方向に伝播する平面波で時刻 t において次のような波形を持つものとした。

$$p_{in}(x, t) = 1 - \cos 2\pi \langle ct - (x + a) \rangle, \quad \begin{cases} \langle \alpha = \alpha \rangle & \text{for } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \langle \alpha = 0 \rangle & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (30)$$

時間ステップ幅は $c\Delta t/a = 0.25$ とし、式 (26)、(27) における項数 L を $L = 128$ 、 $\rho = 0.94746353$ ($\epsilon = 10^{-6}$) として解析を行った。図 4 中の (a)-(c) はそれぞれ $ct/a = 0.0, 2.0, 3.0$ での平面 $x_3 = 0$ における球形散乱体周辺の波動場を表しており、入射波がちょうど散乱体に到達した時刻 $ct/a = 0.0$ から、入射波が散乱体を通り過ぎる時刻までの波動場が再現されている。図 4-(b), (c) から球形散乱体により生じる散乱波を確認することが出来る。

6.3 三次元弾性波動問題に対する数値解析例

三次元弾性波動問題における数値解析例を示す。以下の解析ではポアソン比 ν を $\nu = 0.25$ として与えた。まず、図 5 で表されるような三次元無限弾性体中の球形空洞による平面入射波の散乱問題を考える。入射波は x_1 軸に沿って伝播する縦波とする。入射波の変位場 $u_i^{in}(x, t)$ と対応する応力場 $\sigma_{ij}^{in}(x, t)$ は以下の通りである。

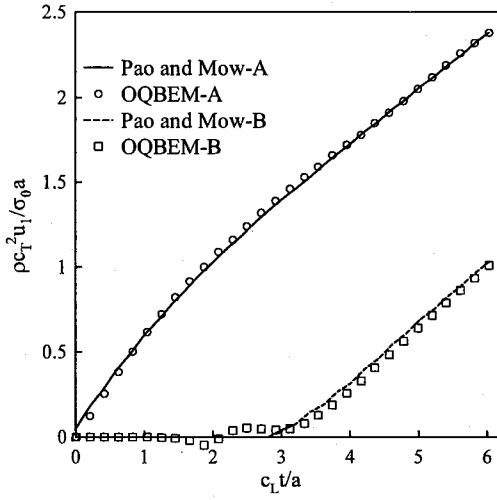


図-6 A 点 B 点における x_1 方向変位 (OQ-BEM と Pao と Mow の解による精度比較)

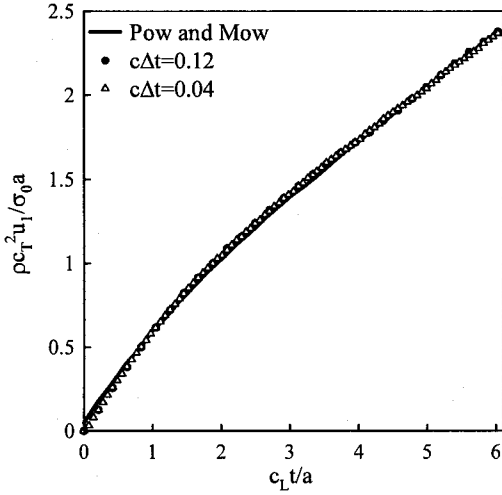


図-7 時間ステップ幅を小さくした場合の A 点における x_1 方向変位の時間変化

$$u_i^{\text{in}}(x, t) = \delta_{i1} \frac{\sigma_0}{\rho c_L^2} (c_L t - x_1 - a) H(c_L t - (x_1 + a)) \quad (31)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{in}}(x, t) = -\sigma_0 \{ (1 - 2\kappa) \delta_{ij} + 2\kappa \delta_{i1} \delta_{j1} \} H(c_L t - (x_1 + a)) \quad (32)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーデルタ、 $\kappa = c_T^2 / c_L^2$ であり、 σ_0 は応力振幅である。時間ステップ幅は $c_T \Delta t / a = 0.12$ とし、式 (26)、(27) における項数 L を $L = 128$ 、 $\rho = 0.94746353 (\epsilon = 10^{-6})$ として解析を行った。

なお周波数域において、三次元球形空洞による散乱

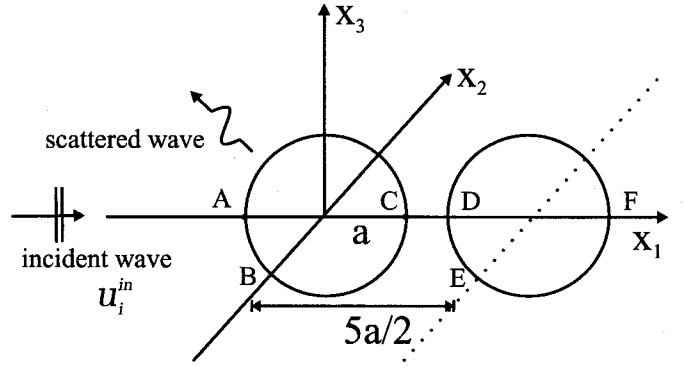


図-8 二つの空洞による散乱解析モデル

問題の解は、Pao と Mow¹⁶⁾ により解析解が与えられている。解析解を逆フーリエ変換することにより、時間領域の解を導出することが可能である。図 6 に、図 5 の A, B 点における変位 $\rho c_T^2 u_1 / \sigma_0 a$ の時刻歴応答を示す。実線及び波線は Pao と Mow により与えられる解析解を逆フーリエ変換することにより得られた数値解、記号は本手法 (OQ-BEM) による解を表している。入射波面が最初に点 A に到達する時刻を $c_L t / a = 0.0$ としている。A 点に入射波が到達後、A 点の変位は次第に増加し始め、時刻 $c_L t / a = 2$ 付近からその傾きはやや緩やかになる。入射波が最初に B 点に到達する時刻 $c_L t / a = 2.0$ 付近で B 点の変位もゆっくりと増加しはじめる。本手法 (OQ-BEM) による解は、Pao と Mow の解析解から得られた解とほぼ一致していることが確認できる。

次に、同様の問題で、要素の大きさを変えことなく、時間ステップを $c_L \Delta t / a = 0.04$ と小さくして解析を行った。図 7 はその $c_L \Delta t / a = 0.12$ の場合と、 $c_L \Delta t / a = 0.04$ の場合、そして Pao と Mow の解析結果における A 点での変位を比較した図である。時間ステップ幅を小さくしても解析結果とよく一致した結果が得られており、OQ-BEM を用いることによって時間ステップ幅によらず安定した高精度な解が得られることがわかる。

最後に、図 8 に示すように、二つの球形空洞が x_1 方向に直列に配置された散乱体に式 (31)、(32) で表される平面縦波が入射したときの空洞表面上の点 A~F の点における x_1 方向の変位の時間変化を示す。空洞が一個の場合の結果である図 6 と比較すると、図 9 の C, D 点の結果には二つの空洞の相互作用の影響が明確に見て取れる。また、この結果は、廣瀬による従来法による結果¹²⁾ と一致していることから、本手法による解析結果の妥当性は示されたといえる。

7. おわりに

三次元時間領域スカラー波動及び弾性波動問題における演算子積分時間領域境界要素法について述べ、数値解析結果より、本手法の有効性を示すことが出来た。

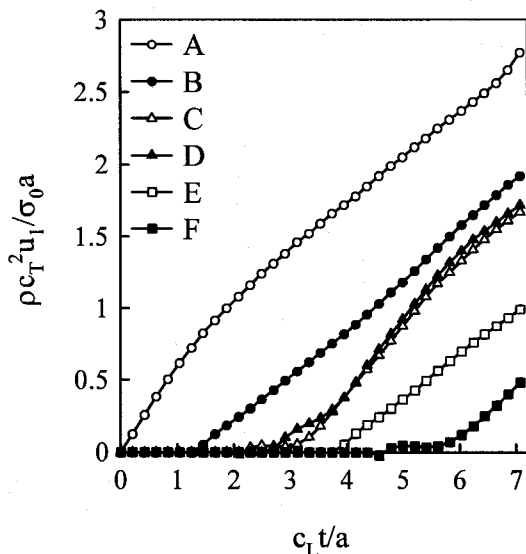


図-9 二つの空洞が存在する場合の点 A~F における x_1 方向変位の時間変化

繰込み積を精度良く、安定に計算できる演算子積分法を用いたことで、時間領域境界要素法の解を安定に求めることが可能となった。時間領域境界要素法は、波動問題に適しているにも関わらず、解の安定性や、計算効率が問題となり、大規模な問題や複雑な問題に対して、大谷・西村の研究等¹⁷⁾を除き、これまであまり適用されてこなかったのが実情である。今後は、高速多重極法を導入し、計算時間、記憶容量を低減させることを行い、超音波非破壊評価法や地震波の数値シミュレーションといった波動解析分野に本手法を適用すること、粘弾性波動問題に対する演算子積分法および高速多重極境界要素法の適用性¹¹⁾についてさらに検討することが課題である。

参考文献

- 1) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法，京都大学学術出版会，(2000)。
- 2) 福井卓雄：境界要素法の研究-高速・高精度計算法の開発と応用- 京都大学学位論文，(1998)。
- 3) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129-145, (1988)。
- 4) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus II, *Numer. Math.*, **52**, pp. 413-425, (1988)。
- 5) Lubich, C. : On the multistep time discretization of linear initial boundary value problems and their boundary integral equations, *Numer. Math.*, **67**, pp. 365-389, (1994)。
- 6) Abreu, A. I., Carrer, J. A. M. and Mansur, W. J. : Scalar wave propagation in 2D: a BEM formulation based on the operational quadrature method, *Engineering analysis with Boundary Elements*, **27**, pp. 101-105, (2003)。

- 7) 斎藤隆泰・廣瀬壮一・福井卓雄：演算子積分法を用いた三次元波動問題に対する時間領域境界要素法の開発と超音波非破壊評価への応用，計算数理工学論文集，vol.6-2, pp.109-114, (2006)。
- 8) Schanz, M. and Struckmeier, V. : Wave propagation in a simplified modelled poroelastic, continuum : Fundamental solutions and a time domain boundary element formulation, *Numer. Math.*, **64**, pp. 1816-1839, (2005)。
- 9) Zhang, Ch.: Transient elastodynamic antiplane crack analysis of anisotropic solids, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 37, pp. 6107-6130, (2006)。
- 10) 福井卓雄・岡山美央・石田貴之：2次元波動伝播問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用，計算数理工学論文集，vol.6-2, pp.153-158, (2006)。
- 11) 石田貴之・福井卓雄：2次元粘弾性波動問題における演算子積分法を用いた高速多重極境界要素法，第61回年次学術講演会講演概要集、土木学会全国大会、pp.421-422, (2006)。
- 12) Hirose, S.: Boundary Integral equation method for transient analysis of 3-D cavities and inclusions, *Engineering analysis with Boundary Elements*, vol.8, No.3, pp.146-153, (1991)。
- 13) Mansur, W. J. and Brebbia, C. A.: Transient elastodynamics using a time-stepping technique, In: *Boundary Elements*, C. A. Brebbia, T. Futagami and M. Tanaka (eds), pp.677-698, (1983)。
- 14) Rokhlin, V: Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60**, pp. 187-207, (1985)。
- 15) Greengard, L. and Rokhlin, V. : A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.*, **73**, pp. 325-348, (1987)。
- 16) Pao, Y.-H. and Mow, C. C.: Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations, Crane and Russak, New York, (1973)。
- 17) 大谷佳広・西村直志：共有メモリー計算機における3次元時間領域動弾性高速境界積分方程式の並列化について，応用力学論文集，vol.7, pp.295-304, (2004)。

(2007年4月12日 受付)