

Patch by Patch 型混合法における基底関数の応用とその精度

Application and accuracy of basis functions implemented in a patch-by-patch approximation of mixed-type finite element

松原仁* 矢川元基**

Hitoshi MATSUBARA and Genki YAGAWA

*正会員 工博 日本原子力研究開発機構研究員 システム計算科学センター (〒110-0015 東京都台東区東上野 6-9-3)

**工博 東洋大学教授 計算力学研究センター (〒112-0001 東京都文京区白山 2-36-5)

The present paper discusses the accuracy of patch-by-patch approximation of mixed-type finite element scheme. In the approximation, not only a displacement field for each element but also stress and strain fields for each patch are defined. In order to determine unknown parameters of stress/strain fields of a patch, the Hu-Washizu principle is employed. In this paper, the accuracy of the generalized finite element functions implemented in the proposed approximation is shown. Furthermore, to show the effectiveness of the approximation in the fracture mechanics that have singular stress fields, the approximation is applied to linear fracture problem.

Key Words : patch-by-patch approximation, stress/strain enrichment, mixed-type finite element formulation

1. 緒言

有限要素法は要素ごとの物理場を足し合わせることで領域全体を表現する Element by Element 型の解析法である¹⁾。幾何形状の定義, 材料特性の設定, 境界条件の付与など, すべての処理は要素ごとに行われる。特に, 要素の幾何精度を示すアスペクト比は重要な精度評価指標のひとつであり, それが悪化しないようなメッシュ生成技術が不可欠となっている。このように有限要素法における要素の果たす役割はあまりにも大きく, その精度はメッシュ生成技術に大きく影響されているのが実状である²⁾。

筆者のひとりである矢川は, 有限要素法の全体メッシュ生成作業の軽減化を指向した一手法として, 節点まわりで一時的に局所パッチとマトリックスを同時に作成する方法論を提案している³⁾。本手法は, フリーメッシュ法と呼ばれ, 節点ごとに局所パッチを作成することで有限要素法の全体メッシュ生成作業を回避しているのが特徴である。したがって, Node by Node 型の有限要素法とも言われている。

フリーメッシュ法では, 局所パッチを自動生成する際, 着目節点が隣接節点に移動したときにも同一のパッチ形状が要求される。パッチ同一性が保持されなければ, 解析領域に重なりが生じてしまい, 得られる全体剛性行列の物理的意味が損なわれてしまうからである。したがって, フリーメッシュ法では, 中間節点を有するような要素を基底要素として採用することは難しく, 頂点のみに節点を有する要素が要求される⁴⁾。

フリーメッシュ法の基底要素に関しては数多くの研究があり, 三角形や四面体の頂点に並進方向変位以外の自

由度を付加し, 要素の高精度化を図る手法が提案されてきた⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾。特に, Tian らによって開発された「一般化節点」を有する要素⁸⁾は一般化有限要素法 (GFEM)⁹⁾の問題であったマトリックス線形従属性の問題も同時に解決するものであり¹⁰⁾, フリーメッシュ法にとって極めて有効な基底要素となっている。

一方, 筆者らは, 基底要素上では変位場を仮定し, 局所パッチ上では応力・ひずみ場を仮定する新しい Patch by Patch 型の高精度混合法を提案している¹¹⁾。本手法は, Enriched Free Mesh Method (EFMM) と呼ばれ, 自由度が増加しなくとも高精度な解が得られるという精密の特徴を有している。しかしながら, 現在までに弾性問題での有効性は確認されているが, 基底要素や局所パッチ応力・ひずみ場の種類と EFMM の精度の関連性については検討されていない。

そこで本論文では, EFMM の概念および計算方法とアダプティブ有限要素法¹²⁾との関連性を示すとともに, 以下に示すような場合における EFMM の精度について議論する。

- ・一般化有限要素⁸⁾を EFMM の基底要素に適用した場合
- ・局所パッチの応力場を特異関数 (き裂先端の応力場) に置き換えた場合

2. Enriched Free Mesh Method

2.1 フリーメッシュ法 (FMM) の基本アルゴリズム

FMM では, 図-1 に示すように入力情報として節点情報のみが用いられ, 釣合方程式を解く領域として

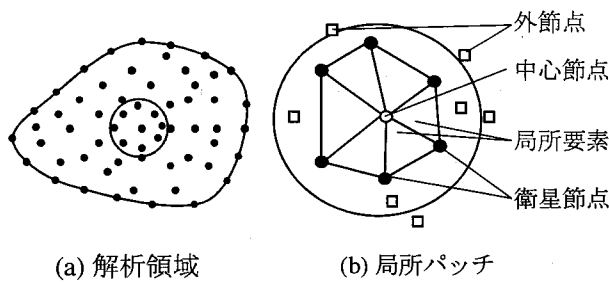


図-1 フリーメッシュ法の概念図

有限要素が用いられる。この要素は解析プロセスの中で着目節点（これを中心節点と呼ぶ）まわりに自動的に生成され、局所要素と呼ばれている³⁾。

中心節点まわりに作成された局所要素の全体剛性行列への足合せは、中心節点に寄与する行成分のみ行えばよい。つまり、領域の全ての節点に対して局所要素を生成するので、最終的に必要な剛性行列は行成分のみの足合せで十分なのである。

以上の処理を領域全ての節点に対して行った後、FEMと同様に、境界条件の設定を経て連立一次方程式を解くプロセスを踏む。FMMの特徴をまとめると、以下のようなになる。

- (1) 要素（メッシュ）は各節点まわりの局所領域で作成される
- (2) プリプロセッシングとメインプロセッシングは、シームレスに接続される
- (3) 局所要素は節点ベースのデータ構造で表される
- (4) 局所要素剛性行列の全体剛性行列への足し合せは節点単位で独立に行われる

このように通常のFEMがその解析の前に領域内の要素分割を入力データとして要求するのに対し、FMMではプリプロセッシングの一部を解析処理に組み込んだ形になっている。したがって、全体剛性行列はFEMと全く同じものになり、当然ながら解も同一のものが得られるので、過去に蓄積されたFEMの膨大な知見を直接受け継ぐことが可能となる。

2.2 Enriched FMM (EFMM) の基本概念¹¹⁾

既存のFMMでは、局所パッチの概念を有効に活かしているとは言いがたい。節点ごとに局所パッチを作成しているが、物理場は局所パッチを構成している要素ごとに定義しているために、最終的に得られる解はElement by Element型の有限要素法と全く等価となり、局所パッチ生成の意義はメッシュ生成の煩雑さを軽減することのみに限られるからである。

EFMMでは、図-2に示すように変位場は要素ごとに定義し、応力・ひずみ場は局所パッチごとに定義する。ただし、これらの近似処理を全節点に対して行

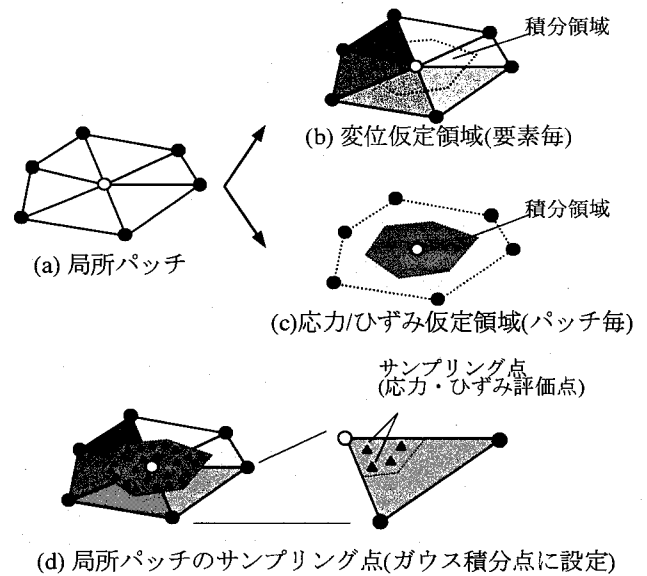


図-2 Enriched FMM の概念図

うとパッチの重なりが生じてしまうので、本研究では図-2(b)(c)に示すように、局所要素の重心点同士を結び、中心節点を含んだ閉領域を積分領域とした。このとき、応力・ひずみは図-2(d)に示すサンプリング点にて評価される。なお、本論文ではサンプリング点をガウス積分点として評価した。

このようにEFMMは、個々の局所要素が個別に有している近似性能を複数の要素が組み合わさった局所パッチ領域に再展開することで、各性能の重畳効果による最適近似解を期待するPatch by Patch型の数値解析手法である。このとき、局所要素の変位場と局所パッチの応力・ひずみ場はそれぞれ独立に定義されており、次節で述べるHu-Washizuの変分原理¹³⁾などによって関連付けられることになる。

変位場や応力・ひずみ場などの複数の物理場を未知量として扱う要素は混合要素と呼ばれ、メッシュのゆがみによる近似精度の低下を防ぐ要素のひとつとして知られている¹⁾¹³⁾¹⁴⁾¹⁵⁾。

この種の要素はWilsonら¹⁶⁾が開発した四辺形要素の変位適合性の問題を解消するために、Taylorら¹⁷⁾が開発したひずみ仮定要素に始まる。その後、Simo and Rifai¹⁸⁾¹⁹⁾によってひずみ仮定要素が体系的に開発され、この種の要素の有効性が確かめられている。しかしながら、これらの研究は有限要素法のための研究であるため、開発対象は1つの要素であり定式化も1つの要素内で閉じられる。したがってEFMMは、1つの要素で閉じられている従来の混合型定式化を節点まわりの局所パッチに拡張した手法とも言える。

一方、局所パッチ上に新しい物理場を導入する概念は、アダプティブ有限要素法¹²⁾の事後誤差評価手法に

も存在する。Zienkiewicz and Zhu²⁰⁾²¹⁾²²⁾は節点の推定誤差ノルムを算出するために、有限要素解析によって得られた局所要素の応力・ひずみ値 $\mathbf{u}^h$ に対し、局所パッチ上で次式のような最小自乗問題を考え、有限要素法の解よりも厳密解に近い解 $\mathbf{u}^*$ (以後、真の解と呼ぶ) を得ている。

$$\text{Min}_{\mathbf{u}^*} \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_i))^2 \quad (1)$$

本手法は局所パッチ法と呼ばれ、アダプティブ有限要素法の事後誤差評価手法の高精度スキームとして知られている。このことから、EFMM は従来ポストプロセッシング手法で用いられてきた高精度スキームをメインプロセッシングに移行した手法と捉えることもできる。

2.3 Hu-Washizu の変分原理による EFMM 定式化

ここでは局所要素ごとの変位場と局所パッチごとの応力場を関連付ける方法として、Hu-Washizu の変分原理¹⁾¹³⁾を用いた手法を示す。

Hu-Washizu の変分原理は弾性体に表示するすべての主変数 (応力, ひずみ, 変位) に対して独立な近似を与えるものである。局所パッチ上で線形弾性体を仮定すると、Hu-Washizu の変分原理は次式で表される。

$$\begin{aligned} \Pi(\varepsilon, \sigma, \mathbf{u}) = & \int_{\Omega} (\sigma(\mathbf{x}))^T (\mathbf{P}\mathbf{B}) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (\sigma(\mathbf{x}))^T \varepsilon(\mathbf{x}) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon(\mathbf{x}))^T \mathbf{D} \varepsilon(\mathbf{x}) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{p}\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{p}\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{D}$ は応力-ひずみマトリックス, Ω は局所パッチ領域, $\bar{\mathbf{b}}$ は体積力, $\bar{\mathbf{t}}$ は境界上における表面力を意味している。 $\mathbf{P}\mathbf{B}$ は局所パッチにおける変位-ひずみマトリックスであり、局所要素 e で次式にて求めることができる。

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{B} = & \begin{bmatrix} {}^e\mathbf{b}_1 & {}^e\mathbf{b}_2 & \cdots & {}^e\mathbf{b}_n \end{bmatrix} \\ {}^e\mathbf{b}_i = & \begin{bmatrix} \partial {}^e\mathbf{N}_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial {}^e\mathbf{N}_i / \partial y \\ \partial {}^e\mathbf{N}_i / \partial y & \partial {}^e\mathbf{N}_i / \partial x \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 n は局所要素を構成する節点数である。ここで、 $\mathbf{p}\mathbf{u}$, $\sigma(\mathbf{x})$, $\varepsilon(\mathbf{x})$ は中心節点に接続している節点自由度 $\mathbf{d}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ と形状関数 $\mathbf{u}\mathbf{N}$ と基底関数 $\sigma\mathbf{N}$, $\varepsilon\mathbf{N}$ を用いて次式で表せる。

$$\mathbf{p}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{N}\mathbf{d} \quad (4)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sigma\mathbf{N}\mathbf{a} \quad (5)$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon\mathbf{N}\mathbf{b} \quad (6)$$

$\sigma\mathbf{N}$, $\varepsilon\mathbf{N}$ は任意関数であり、応力・ひずみ場が特異ではない場合を想定すると、二次元問題では次式のような完全多項式を用いるとよい。

$${}^e\mathbf{N} = \begin{bmatrix} p^T(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & p^T(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & p^T(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 $p^T(\mathbf{x})$ は次式のように定義される。

$$\begin{aligned} p^T(\mathbf{x}) = & \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} & \text{1 次基底} \\ p^T(\mathbf{x}) = & \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 \end{bmatrix} & \text{2 次基底} \\ & \cdots & \end{aligned} \quad (8)$$

式 (4), (5), (6) より式 (2) の停留条件は次式で与えられる。

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon(\mathbf{x})^T (\mathbf{D} \varepsilon(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x})) d\Omega = 0 \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} \delta \sigma(\mathbf{x})^T (\mathbf{B}\mathbf{d} - \varepsilon(\mathbf{x})) d\Omega = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \mathbf{p}\mathbf{u}^T \mathbf{P}\mathbf{B}^T \sigma(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{p}\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega \\ - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{p}\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

したがって、最終的に解くべき方程式は次のマトリックス方程式に帰着する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (12)$$

ただし、

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \int_{\Omega} ({}^e\mathbf{N})^T \mathbf{D} ({}^e\mathbf{N}) d\Omega \\ \mathbf{C} = - \int_{\Omega} ({}^e\mathbf{N})^T (\sigma\mathbf{N}) d\Omega \\ \mathbf{E} = \int_{\Omega} (\sigma\mathbf{N})^T (\mathbf{P}\mathbf{B}) d\Omega \\ \mathbf{f} = \int_{\Omega} (\mathbf{P}\mathbf{N})^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{P}\mathbf{N})^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{cases} \quad (13)$$

つぎに、式 (12) から未定係数 $\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ を縮約すると、最終的に自由度 $\mathbf{d}$ のみを有するマトリックス方程式が得られる。

$$\mathbf{E}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{E} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (14)$$

また、式 (14) の $\mathbf{A}^{-1}$ が不定になるのを防ぐためには、式 (8) で定義される応力・ひずみ場の未知数の数に応じたサンプリング点の個数を適宜設定しなければならない。三角形要素ひとつがパッチとなる場合を想定すると、1 次基底では 3 つ以上、2 次基底では 10 つ以上のサンプリング点が必要となる。

有限要素法で式 (14) の縮約作業を三角形要素ごとに行うと、応力・ひずみ場を式 (5), (6) にて独立に仮定した場合であっても定ひずみ三角形 1 次要素と等価な要素剛性行列が得られる。したがって、解析領域全体の剛性方程式も必然的に非退化形式となる。ここで非退

化形式とは、方程式の何れの従属変数も消去不可能な形式であると定義される¹⁾。

一方 EFMM では、応力・ひずみ場は図-2(a),(b)で示しているパッチ上にある積分領域ごと、変位は要素ごとに定義されており、未定係数 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の縮約はパッチごとに行われる。勿論、解析領域に三角形要素が唯一ひとつであれば、EFMM の全体剛性方程式は非退化形式となり有限要素法と等価となる。しかしながら、解析領域に三角形要素がふたつ以上あれば、要素を共有する節点 (パッチ) で作成される局所要素剛性行列は隣接する要素の変位場とパッチ上で定義されている応力・ひずみ場の影響を受けることになる。したがって、最終的に解くべき全体剛性方程式は、各パッチ領域で作成された局所剛性方程式の足し合わせによって得られるので、非退化形式にはならない。このことは、EFMM の特徴のひとつである。

局所要素剛性行列を全体剛性行列へ足し合わせる方法は EFMM と従来 FMM とで異なる。従来 FMM では、衛星節点の中心節点への寄与分は中心節点が移動した場合でも同一な数値が要求される。したがって、その全体剛性行列への足し合わせは中心節点に寄与する行成分のみの足し合わせでよい。しかしながら、EFMM では中心節点ごとにパッチを構成する三角形要素の数が異なるので、作成される局所剛性行列の衛星節点への寄与分が中心節点ごとに異なる。したがって、EFMM の局所剛性行列はパッチごとに全体剛性行列へ足し合わせる必要がある。

2.4 節点応力・ひずみの計算法

EFMM では式 (14) にて節点の応力・ひずみに関連する未定係数を縮約する。したがって、応力とひずみを直接解くことはしない。そこで、本研究では節点の応力とひずみを式 (5) および (6) を用いることで求めた。具体的には、EFMM の応力・ひずみ場は図-2(a),(b)で示している節点周りの積分領域で定義されているので、中心節点はこの領域を含んでいる。したがって、中心節点の応力・ひずみ値は、式 (5) および (6) の ${}^{\sigma}\mathbf{N}$, ${}^{\varepsilon}\mathbf{N}$ に中心節点の座標値を代入することで求められる。中心節点の座標値 $\mathbf{x}_i$ を代入した任意関数を ${}^{\sigma}\mathbf{N}(\mathbf{x}_i)$, ${}^{\varepsilon}\mathbf{N}(\mathbf{x}_i)$ とすると、式 (12) より中心節点の応力・ひずみは次式となる。

$$\varepsilon_i = {}^{\varepsilon}\mathbf{N}(\mathbf{x}_i)\mathbf{a} = -{}^{\varepsilon}\mathbf{N}(\mathbf{x}_i)\mathbf{C}^{-T}\mathbf{E}\mathbf{d} \quad (15)$$

$$\sigma_i = {}^{\sigma}\mathbf{N}(\mathbf{x}_i)\mathbf{b} = {}^{\sigma}\mathbf{N}(\mathbf{x}_i)\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-T}\mathbf{E}\mathbf{d} \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{d}$ は中心節点と衛星節点の節点変位である。

なお、EFMM は一様応力状態の再現を検証するパッチテストにも合格している¹¹⁾。

2.5 一般化有限要素の EFMM への適用

本節では一般化有限要素を EFMM の基底要素に適用する。一般化節点に関する詳細は文献 8 に譲り、ここでは変位場について簡単に説明する。

回転自由度を有する要素 RGNTri3 の変位場は次式で表せる。

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ v_e \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_i - y \\ 0 & 1 & x - x_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここで、 u_e , v_e は基底要素の変位場、 x , y は要素内の任意座標値、 x_i , y_i は節点座標値、 $\mathbf{N}_i$ は形状関数、 u_i , v_i , および θ_i は節点自由度であり、それぞれ並進方向変位と回転自由度である。

一方、RGNTri3 にひずみ自由度を加えた GNTri3 の変位場は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ v_e \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\hat{y}_i & \hat{x}_i & 0 & \frac{\hat{y}_i}{2} \\ 0 & 1 & \hat{x}_i & 0 & \hat{y}_i & \frac{\hat{x}_i}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ \varepsilon_{ix} \\ \varepsilon_{iy} \\ \varepsilon_{ixy} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ここで、 $\hat{x}_i$ および $\hat{y}_i$ はそれぞれ、 $x - x_i$, $y - y_i$, ε_{ix} , ε_{iy} および ε_{ixy} は節点のひずみ自由度である。

RGNTri3 と GNTri3 は並進変位以外の物理量を節点自由度として有しており、一般化有限要素と呼ばれている⁸⁾。

EFMM の変位場は要素ごとに仮定される。したがって、EFMM にこれらの要素を適用する場合には、式 (4) の変位場の代わりに式 (17) または式 (18) を用いればよく、その他の変更は必要ない。

3. 片持ちはりの収束率

ここでは、図-3 に示すような長さ 8、高さ 1、幅 1 の片持ちはりの静弾性曲げ問題²³⁾²⁴⁾を対象として、次式で示す EFMM の変位ノルム $\|E\|_u$ とエネルギーノルム $\|E\|_e$ について検討する。

$$\|E\|_u = \sqrt{\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{exact})^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{exact}) d\Omega} \quad (19)$$

$$\|E\|_e = \sqrt{\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^{exact})^T (\sigma - \sigma^{exact}) d\Omega} \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{u}$, σ および ε はそれぞれ変位、ひずみおよび応力の数値解析解であり、 $\mathbf{u}^{exact}$, σ^{exact} および ε^{exact} はそれぞれ変位、ひずみおよび応力の厳密解で

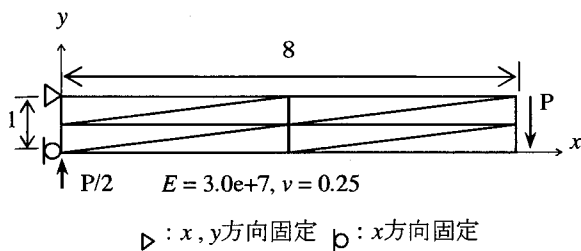


図-3 片持ちはりモデル (2×2分割モデル)

ある。解析では平面応力問題を仮定し、材料定数としてヤング率 E を 3.0×10^7 、ポアソン比 ν を 0.25 とした。

解析では図-3 に示した 2×2 のメッシュ分割と同じ要領で、 1×1 , 2×2 , 4×4 , 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 の7つのメッシュ分割モデルを用いた。また、式(8)で示したEFMMの応力・ひずみ基底関数は1次多項式と2次多項式の二種類を用い、基底要素は三角形1次要素 Tri3 および一般化有限要素 (回転自由度を有する要素 RGNTri3, ひずみ自由度を有する要素 GNTri3) を用いた。

3.1 有限要素法とEFMMの収束性

本節では、有限要素法とEFMMの収束性を比較する。図-4, 表-1 に変位ノルム, 図-5, 表-2 にエネルギーノルムを示した。ただし、EFMMの基底要素は三角形1次要素とし、有限要素法で用いる要素は三角形1次要素 (FEM-L) および三角形2次要素 (FEM-Q) とした¹⁾。図-4, 表-1 の変位ノルムの結果より以下を見出せる。

- (1) EFMMの結果は、基底関数が1次、2次であっても解はほぼ等しい
- (2) 精度は高い順から FEM-Q, EFMM(1次、2次基底), FEM-L となっている
- (3) EFMMの収束率は1次基底で1.277、2次基底で1.257であり、FEM-Qの1.224よりも良い値を示し、FEM-Lの0.747を大きく上回っている

つぎに、図-5, 表-2 のエネルギーノルムの結果より以下を見出せる。

- (1) 2次基底のEFMMの収束率および精度はFEM-Qの解とほぼ等しい
- (2) 1次基底のEFMMの収束率は0.531であり、FEM-Lの0.417を上回っている

3.2 局所パッチ法とEFMMの収束性

図-6, 表-3 に局所パッチ法 (図中SPR) とEFMMのエネルギーノルムの収束性と自由度の関係を示す。なお、参考までに三角形1次要素を用いた有限要素法の解も同時に示している。

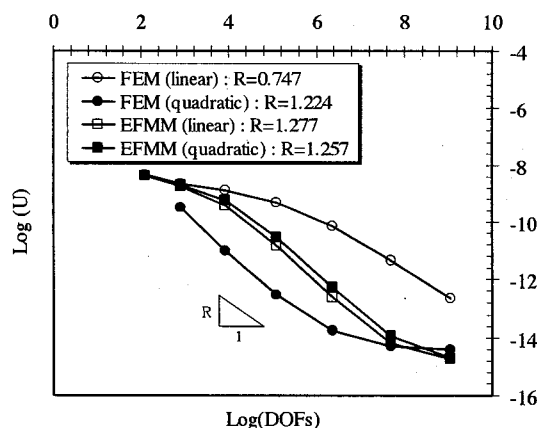


図-4 有限要素法とEFMMの変位ノルム

表-1 有限要素法とEFMMの変位ノルム値

M-size (h)	FEM linear	FEM quadratic	EFMM linear	EFMM quad.
8	2.35E-04	7.48E-05	2.35E-04	2.35E-04
4	1.75E-04	1.65E-05	1.64E-04	1.67E-04
2	1.40E-04	3.63E-06	8.19E-05	9.67E-05
1	9.14E-05	1.07E-06	1.98E-05	2.64E-05
0.5	3.91E-05	6.06E-07	3.42E-06	4.68E-06
0.25	1.20E-05	5.51E-07	6.90E-07	8.81E-07
0.125	3.24E-06	5.51E-07	3.96E-07	4.08E-07

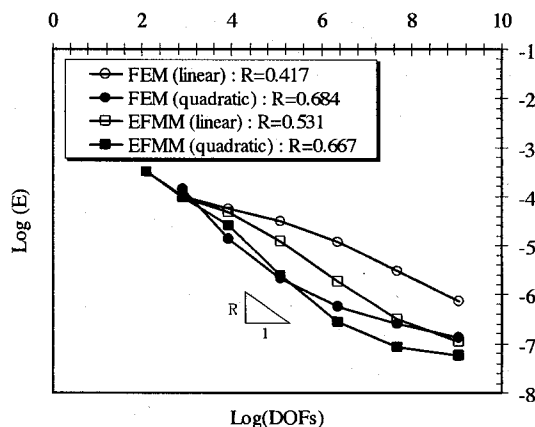


図-5 有限要素法とEFMMのエネルギーノルム

表-2 有限要素法とEFMMのエネルギーノルム値

M-size (h)	FEM linear	FEM quadratic	EFMM linear	EFMM quad.
8	3.04E-02	2.12E-02	3.04E-02	3.04E-02
4	1.84E-02	7.61E-03	1.80E-02	1.77E-02
2	1.43E-02	3.40E-03	1.32E-02	1.01E-02
1	1.11E-02	1.93E-03	7.35E-03	3.69E-03
0.5	7.18E-03	1.35E-03	3.23E-03	1.42E-03
0.25	4.01E-03	1.03E-03	1.52E-03	8.46E-04
0.125	2.16E-03	8.45E-04	9.48E-04	7.12E-04

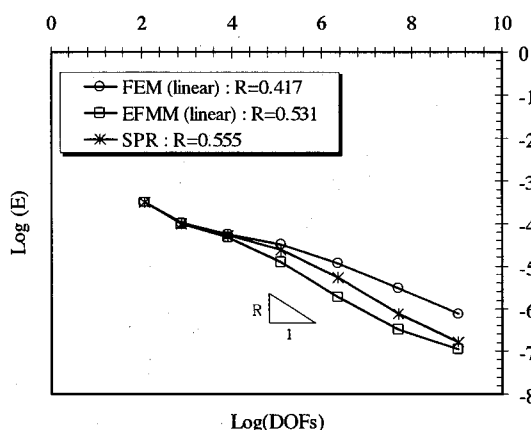


図-6 局所パッチ法と EFMM のエネルギーノルム

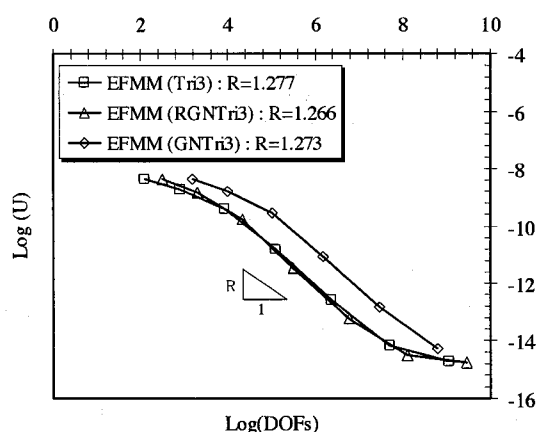


図-7 GFE と 1 次基底 EFMM (変位ノルム)

表-3 局所パッチ法と EFMM のエネルギーノルム値

M-size (h)	FEM linear	EFMM linear	SPR
8	3.04E-02	3.04E-02	3.04E-02
4	1.84E-02	1.80E-02	1.83E-02
2	1.43E-02	1.32E-02	1.40E-02
1	1.11E-02	7.35E-03	9.90E-03
0.5	7.18E-03	3.23E-03	5.11E-03
0.25	4.01E-03	1.52E-03	2.21E-03
0.125	2.16E-03	9.48E-04	1.14E-03

表-4 GFE と 1 次基底 EFMM (変位ノルム値)

M-size (h)	EFMM Tri3	EFMM RGNTri3	EFMM GNTri3
8	2.35E-04	2.35E-04	2.35E-04
4	1.64E-04	1.47E-04	1.54E-04
2	8.19E-05	5.66E-05	7.19E-05
1	1.98E-05	1.05E-05	1.54E-05
0.5	3.42E-06	1.77E-06	2.61E-06
0.25	6.90E-07	4.97E-07	6.18E-07
0.125	3.96E-07	3.89E-07	3.96E-07

EFMM の収束率は 0.531 であり、局所パッチ法の 0.555 に近い値を示している。しかしながら、解析精度に関しては、すべてのメッシュ分割モデルにおいて EFMM が局所パッチ法に勝っている。すなわち、EFMM は局所パッチ法の「真の解」よりも高い精度の解を局所パッチ法と同程度の収束率で求めていることになる。

局所パッチ法のような事後評価手法は誤差ノルムを算出するための手法であるので、メインプロセッシングで得られる解よりも高い精度の解が要求される。したがって、本例題で EFMM のメインプロセッシング解の精度が局所パッチ法のポストプロセッシング解の精度を上回ったことは、アダプティブ解析分野において、局所パッチ法に代わる新しい高精度事後評価スキームの開発が必要であることを示唆するものであり、本分野において重要な知見であると言える。

3.3 一般化有限要素を用いた EFMM の収束性

本節では、2.5 節で定式化した一般化有限要素 (RGNTri3 と GNTri3) を EFMM の基底要素に適用した場合の片持ちはりの厳密解への収束性について議論する。

パッチの応力・ひずみ場を 1 次多項式、基底要素を三角形 1 次要素 (Tri3) と RGNTri3, GNTri3 の場合の EFMM の収束性について、図-7 と表-4 には変位ノルム、図-8 と表-5 にはエネルギーノルムを示した。

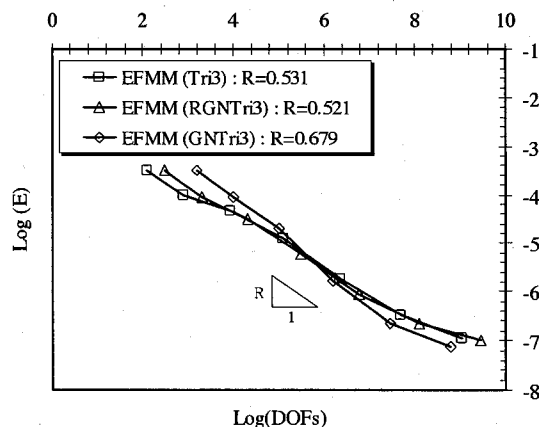


図-8 GFE と 1 次基底 EFMM (エネルギーノルム)

表-5 GFE と 1 次基底 EFMM (エネルギーノルム値)

M-size (h)	EFMM Tri3	EFMM RGNTri3	EFMM GNTri3
8	3.04E-02	3.04E-02	3.04E-02
4	1.80E-02	1.73E-02	1.74E-02
2	1.32E-02	1.11E-02	9.12E-03
1	7.35E-03	5.33E-03	3.10E-03
0.5	3.23E-03	2.33E-03	1.29E-03
0.25	1.52E-03	1.29E-03	8.10E-04
0.125	9.48E-04	9.21E-04	7.02E-04

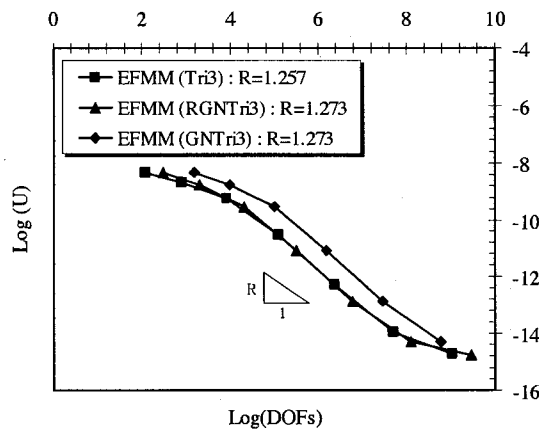


図-9 GFE と 2 次基底 EFMM (変位ノルム)

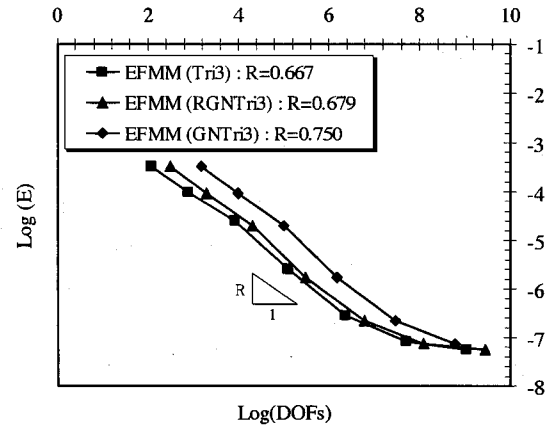


図-10 GFE と 2 次基底 EFMM (エネルギーノルム)

表-6 GFE と 2 次基底 EFMM (変位ノルム値)

M-size (h)	EFMM Tri3	EFMM RGNTri3	EFMM GNTri3
8	2.35E-04	2.35E-04	2.35E-04
4	1.67E-04	1.54E-04	1.54E-04
2	9.67E-05	7.19E-05	7.19E-05
1	2.64E-05	1.54E-05	1.54E-05
0.5	4.68E-06	2.61E-06	2.61E-06
0.25	8.81E-07	6.18E-07	6.18E-07
0.125	4.08E-07	3.96E-07	3.96E-07

表-7 GFE と 2 次基底 EFMM (エネルギーノルム値)

M-size (h)	EFMM Tri3	EFMM RGNTri3	EFMM GNTri3
8	3.04E-02	3.04E-02	3.04E-02
4	1.77E-02	1.74E-02	1.74E-02
2	1.01E-02	9.12E-03	9.12E-03
1	3.69E-03	3.10E-03	3.10E-03
0.5	1.42E-03	1.29E-03	1.29E-03
0.25	8.46E-04	8.10E-04	8.10E-04
0.125	7.12E-04	7.02E-04	7.02E-04

図-7 と表-4 より、EFMM の解は、Tri3 の代わりに一般化有限要素を用いても発散せず、Tri3 とほぼ等価な収束率と精度を示している。一方、図-8 と表-5 のエネルギーノルムに関しては、GNTri3 の収束率が最も良く、自由度の増加に伴って精度も向上している。

EFMM の応力場に 2 次多項式を適用した場合の各要素の変位ノルムの収束性を図-9 と表-6、エネルギーノルムの収束性を図-10 と表-7 に示す。応力場が 1 次基底の場合と同様に、EFMM に一般化要素を適用しても解の発散は見られない。また、収束率、精度ともに Tri3 とほぼ等しい結果を得ている。

以上より、基底要素の違いによる最適応力場の決定方法に関する課題は残るものの、本例題により、EFMM に一般化有限要素が適用可能であることが分かる。

4. EFMM の線形破壊力学への適用

EFMM は、Element by Element 型の変位場と Patch by Patch 型の応力・ひずみ場を持つ特徴ある手法である。

局所パッチ上の応力・ひずみ場は任意であるので、破壊力学問題²⁵⁾のようなき裂先端で特異応力が生じるような問題に対しても有効だと考えられる。そこで本章では、EFMM を線形破壊力学問題へ適用し、その妥当性を検討する。

き裂先端の応力場 $\bar{\sigma}$ は、図-11 に示しているき裂

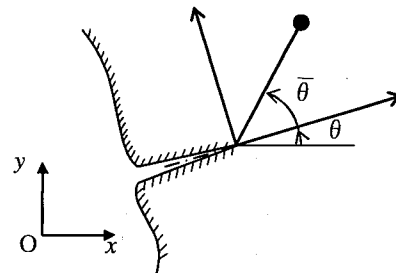


図-11 クラック先端の局所座標系

先端を原点とする座標系 $\bar{x}-\bar{y}$ で次式にて定義される。

$$\bar{\sigma} = \sigma \bar{\mathbf{N}} \mathbf{K} \quad (21)$$

ここで、 $\mathbf{K} = \{ K_I \ K_{II} \}^T$ は応力拡大係数である。

Irwin²⁵⁾によって導かれたき裂先端の応力場を、図-11 に示す極座標系 $(r, \bar{\theta})$ を用いて式 (21) の $\sigma \bar{\mathbf{N}}$ に適用すると次式を得る。

$$\sigma \bar{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\bar{\theta}}{2} \left(1 - \sin \frac{\bar{\theta}}{2} \sin \frac{3\bar{\theta}}{2} \right) \\ \cos \frac{\bar{\theta}}{2} \left(1 + \sin \frac{\bar{\theta}}{2} \sin \frac{3\bar{\theta}}{2} \right) \\ \sin \frac{\bar{\theta}}{2} \cos \frac{\bar{\theta}}{2} \cos \frac{3\bar{\theta}}{2} \\ - \sin \frac{\bar{\theta}}{2} \left(2 + \cos \frac{\bar{\theta}}{2} \cos \frac{3\bar{\theta}}{2} \right) \\ \sin \frac{\bar{\theta}}{2} \cos \frac{\bar{\theta}}{2} \cos \frac{3\bar{\theta}}{2} \\ \cos \frac{\bar{\theta}}{2} \left(1 - \sin \frac{\bar{\theta}}{2} \sin \frac{3\bar{\theta}}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (22)$$

式(21)を座標変換マトリックス $\mathbf{T}$ を用いて全体座標系 $x-y$ におけるき裂先端の応力場 $\sigma(\mathbf{x})$ に変換すると,

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{T}^{-1} \bar{\sigma} = \mathbf{T}^{-1} (\sigma \bar{\mathbf{N}}) \mathbf{K} \quad (23)$$

となる。ただし、座標変換マトリックス $\mathbf{T}$ は,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (24)$$

である。

本章で扱う線形破壊力学問題では、応力とひずみの関係は次式にて与えられる。

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{-1} \sigma(\mathbf{x}) \quad (25)$$

したがって、 $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$ であるから式(25)を式(2)の右辺第2項および第3項に代入すると,

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma, \mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma(\mathbf{x}))^T \mathbf{D}^{-1} \sigma(\mathbf{x}) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\sigma(\mathbf{x}))^T \mathbf{B}^p \mathbf{u} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{p} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{p} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (26)$$

が得られる。停留条件は,

$$\int_{\Omega} \delta \sigma(\mathbf{x})^T (\mathbf{B} \mathbf{d} - \mathbf{D}^{-1} \sigma(\mathbf{x})) d\Omega = 0 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \mathbf{p} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{p} \mathbf{N} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{p} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega \\ - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{p} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

である。式(26)は Hellinger-Reissner の変分原理¹⁾¹³⁾と呼ばれており、式(26)に式(23)を代入すると次のマトリックス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{p}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

ただし,

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \int_{\Omega} (\mathbf{T}^{-1} (\sigma \bar{\mathbf{N}}))^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{T}^{-1} (\sigma \bar{\mathbf{N}})) d\Omega \\ \mathbf{C} = \int_{\Omega} (\mathbf{T}^{-1} (\sigma \bar{\mathbf{N}}))^T (\mathbf{B} \mathbf{p}) d\Omega \\ \mathbf{f} = \int_{\Omega} (\mathbf{p} \mathbf{N})^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{p} \mathbf{N})^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{cases} \quad (30)$$

である。

以上のように EFMM では、式(29)を用いることで局所パッチごとに応力拡大係数 K_I および K_{II} を直接求めることが可能となり、定式化も線形弾性問題と変わりなく行える。さらに式(22)を局所パッチの応力場に適用することで、各応力成分を破壊モードごとに分解することなく複雑な混合モード破壊を表現できるといふ利点も有している。

つぎに、数値解析例として図-12(a)に示すような中央にき裂長さ a の斜めのき裂を有し、遠方で一様引張り

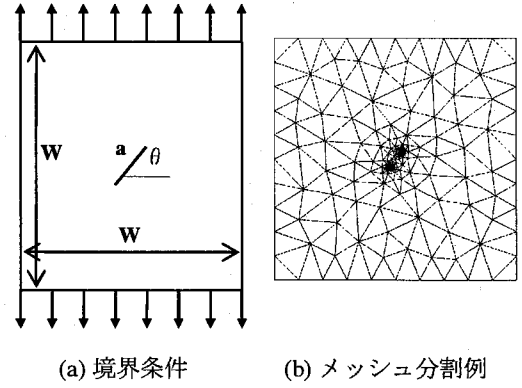


図-12 斜めき裂を有する板の解析モデル

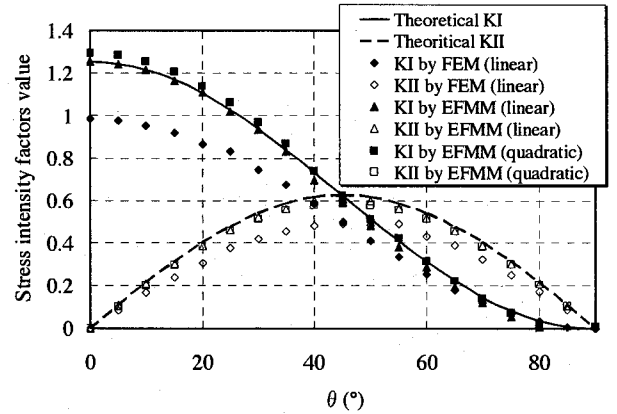


図-13 角度変化に伴う応力拡大係数の変化

力を受ける板 (板の一边の長さ W の比率は $a/W = 0.1$) の問題について、応力拡大係数 K_I および K_{II} の厳密解と比較する。図-12(b)にメッシュ分割の一例を示した。なお、本例題の厳密解は次式で与えられる²⁶⁾。

$$\begin{cases} K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \theta \\ K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (31)$$

き裂角度の変化と応力拡大係数の変化の関係を図-13に示す。なお、図-13に示している有限要素法の解(FEM)とは、三角形1次要素による解を最小自乗法により外挿し、応力拡大係数を評価したものである。

図-13より、厳密解に対する精度は、基底関数を1次・2次に仮定した EFMM が最も良く、ほぼ理論解と等しい解を得ている。一方、有限要素法の解は、図-12(b)のようなメッシュ分割では厳密解には到達しない結果となった。以上より、EFMM の破壊力学問題に対する有効性が確認できる。

5. 結言

本論文では、Patch by Patch 型の有限要素法である Enriched Free Mesh Method の基底要素や局所パッチ

上の応力・ひずみ場の種類と精度の関連性を検討するために、一般化有限要素と破壊力学問題を EFMM に適用した。その結果、EFMM の解の収束性は基底要素の種類に関わらず良好であり、特異場が存在しても精度の面で有限要素法を上回っていることを確認した。また、アダプティブ有限要素法で用いられる Patch by Patch 型の事後評価手法である局所パッチ法と EFMM を比較することで、EFMM の精度的特長について検討した。その結果、メインプロセッシングにて得られる EFMM の解の精度は、従来ポストプロセッシングで求められていた“真の解”よりも高いことを明らかにした。このことは、アダプティブ解析分野において、局所パッチ法に代わる新しい高精度事後評価スキームの開発が必要であることを示唆するものであり、本分野において重要な知見であると言える。

EFMM は、有限要素法に代表される Element by Element 型の解析法とメッシュフリー法に代表される Node by Node 型の解析法を統合した新しい手法であり、各工学分野への応用が期待できる。しかしながら、要素と局所パッチ上で独立に仮定される近似関数の次数を最適に決定するための方法論は未だ確立しておらず、今後の研究課題である。

謝辞： 本研究を遂行するにあたり Rong Tian 氏 (Northwestern University) に貴重なご意見を賜りました。ここに、深く感謝の意を表します。

参考文献

- 1) O・C ツィエンキーヴィッツ, R・L テイラー (矢川元基代訳): マトリックス有限要素法 I, 科学技術出版, 1996.
- 2) L. Giraud-Moreau, H. Borouchaki and A. Cherouat: *A Remeshing Procedure for Numerical Simulation of Forming Processes in Three Dimensions*, Proceedings of the 15th int. meshing roundtable, 2006.
- 3) G. Yagawa and T. Yamada: *Free Mesh Method: A New Meshless Finite Element Method*, Comput. Mech., 18, pp. 383-386, 1996.
- 4) T. Fujisawa, M. Inaba and G. Yagawa: *Parallel computing of high-speed compressible flows using a node-based finite-element method*, Int. J. for Numer. Meth. Engng., 58, pp. 481-511, 2003.
- 5) 関東康祐: 混合法による高精度フリーメッシュ法, 計算工学論文集, No.20000036, 2000.
- 6) 松原仁, 伊良波繁雄, 富山潤, 山城建樹, 矢川元基: 回転自由度を有する四面体要素を用いたフリーメッシュ法, 土木学会論文集, 第 766 号/I-68, pp.97-107, 2007.
- 7) R. Tian, H. Matsubara, G. Yagawa, S. Iraha and J. Tomiyama: *Accuracy improvement on free mesh method: a high performance quadratic tetrahedral/triangular element with only corners*, Proceedings of WCCM VI, 2004.
- 8) Rong Tian and Genki Yagawa: *Generalized nodes and high-performance elements*, Int. J. for Numer. Meth. Engng., 64, pp. 2039-2071, 2005.
- 9) J. M. Melenk and Babuska: *The partition of unity finite element method: Basic theory and applications*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 139, pp.289-314, 1996.

- 10) Rong Tian, Genki Yagawa and Haruo Terasaka: *Linear dependence problems of partition of unity-based generalized FEMs*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 195, pp.4768-4782, 2006.
- 11) Genki Yagawa and Hitoshi Matsubara: *Enriched Free Mesh Method: An accuracy improvement for Node-based FEM*, Springer, in press.
- 12) 手塚明, 土田英二: アダプティブ有限要素法日本計算工学会, 2003.
- 13) 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 培風館, 1972.
- 14) Kasper E.P. and Taylor R.L.: *A mixed-enhanced strain method - Part I: Geometrically linear problems*, Computers and Structures, Vol.75, No.3, pp.237-250, 2000.
- 15) Kasper E.P. and Taylor R.L.: *A mixed-enhanced strain method - Part II: Geometrically nonlinear problems*, Computers and Structures, Vol.75, No.3, pp.251-260, 2000.
- 16) Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty and W.P. Ghaboussi, T.: *Incompatible displacement models*, Num. and Comp. Meth. in Struct. Mech., pp. 43-57, 1973.
- 17) Taylor, R.L., Beresford, P.J. and Wilson, E.L.: *A non-conforming element for stress analysis*, Int. J. for Numer. Meth Engng. 10, pp. 1211-1219, 1976.
- 18) Simo, J.C. and Rifai, M.S.: *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*, Int. J. for Numer. Meth Engng. 29, pp. 1595-1638, 1990.
- 19) Simo, J.C., Srmer, F. and Taylor, R.L.: *ally non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes*, Int. J. for Numer. Meth Engng. 33, pp. 1413-1449, 1992.
- 20) O.C., Zienkiewicz and J.Z., Zhu.: *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. PART1: The recovery technique*, Int. J. for Numer. Meth Engng., 33, pp. 1331-1364, 1992.
- 21) O.C., Zienkiewicz and J.Z., Zhu.: *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. PART2: Error estimates and adaptivity*, Int. J. for Numer. Meth Engng., 33, pp. 1365-1382, 1992.
- 22) O.C., Zienkiewicz and J.Z., Zhu.: *The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 101, pp. 207-224, 1992.
- 23) S.P. Timoshenko, J.N. Goodier: *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 1987.
- 24) T. Belytschko, Y. Y. LU and L. Gu: *Element-free galerkin methods*, Int. J. for Numer. Meth Engng., 37, pp. 229-256, 1994.
- 25) 白鳥正樹: 数値破壊力学, 実教, 1980.
- 26) 岡村弘之: 線形破壊力学, 培風館, 1976.

(2007 年 4 月 12 日 受付)