

非圧縮粘性流れにおける部分的制御アルゴリズム 及び気泡関数要素を用いた最適形状問題

Shape Optimization Problem Based on the Partial Control Algorithm
and Bubble Function Element for Incompressible Viscous Flows

中島修治*・川原睦人**

Shuji Nakajima and Mutsuto Kawahara

*学生会員 工修 中央大学大学院博士課程 理工学研究科土木工学専攻 (〒 112-8551 東京都文京区春日一丁目 13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部 土木工学科 (〒 112-8551 東京都文京区春日一丁目 13-27)

The main purpose of this paper is to obtain the optimal shape of a body, which minimizes the fluid forces in an incompressible viscous flow. The main idea of the present paper is to add a process of partial control to formulation of the shape optimization and based on the hexahedral bubble element by the stabilized bubble function. The formulation of the shape optimization is based on the optimal control theory. An optimal state is defined by reduction of the fluid forces subjected to the body. the space discretization of the basic equations, the incompressible Navier-Stokes equations by the finite element approximations using the MINI element, in which hexahedral bubble element and bilinear element is employed, the temporal discretization by the fractional step method, calculation of the performance function gradient by the adjoint equation, and the minimization algorithm of the performance function by the weighted gradient method with the partial control algorithm. As a numerical example, a drag force minimization problem of a body in incompressible viscous flows in two and three dimension is carried out. As a result, each optimal shape at $Re = 1$, $Re = 40$, $Re = 80$ and $Re = 100$ is derived by the partial control algorithm. The present algorithm is shown to be useful for the optimal shape design of the incompressible viscous flow.

Key Words : finite element method, optimal shape, partial control algorithm, hexahedral bubble element

1. 序論

数値解析による最適化制御問題の一つとして、形状決定の問題がある。最適形状の決定問題における基礎的研究として、Stokes 流れでの物体の抗力を最小とする最適形状を導出する研究が行われた^{1)~4)}。同様の研究は、Navier-Stokes 方程式を用いた形状問題として行われた^{5)~9)}。しかしながら、著者らの研究を含め、導出された形状は物体後方が丸く、剥離が発生しやすい形状となり、最適であるとの判断が困難な形状となった^{3),5),9)}。物体後方が丸くなる現象は、レイノルズ数が高くなるにつれて顕著に表れるものである。この形状については、数値解析例において詳細を示す。

本研究では、物体後方が丸くなる現象を解決し、物体後方に剥離の発生しない形状に一致した最適形状を導出することを目的とする。従来の最小化アルゴリズムにおける物体形状の変形は、物体境界全体を一度に変形して制御してきた。本研究では、仮に物体が最適な形状であるならば、部分的に物体を制御しても変形は起こらないと考え、物体を部分的に変形させる過程を加えることにより、最適な形状に近づけることを提案する。

最適制御理論は、現象を目的の状態にする最適な制御量を求める方法である。評価関数を最小とする状態を最適状態として、その制御量を求める。形状決定問題における制御量は物体の変形量であり、評価関数には流体力を直接的に用いる¹⁰⁾。物体抗力の最小化問題において、最適解は流体に接する表面積が最小となる物体であり、物体の体積がゼロとなる形状が解である。また、評価関数は、基礎方程式を満たしながら最小化されなければならない。そのため、拘束条件として体積一定の条件及び基礎方程式を付加する。拘束条件付きの最適制御問題には、Lagrange 乗数法が有効であり、これにより、拡張評価関数が得られる。拡張評価関数の変分で得られた停留条件を満たすことにより、目的とする評価関数を最小とする解を得ることできる。また、最小化手法には、部分的制御アルゴリズムにより修正された重み付き勾配法を用いる。解析手法として、中間流速を用いる分離型法及び六面体気泡関数要素による MINI 要素¹¹⁾を離散化手法とする有限要素法を用いる。三次元の解析領域における最適形状問題を解くためには、解析に多くの計算メモリを必要とする。そのため、最適形状問題に関する数値解析を安定に、かつ効率的に行うことができる六面体気泡関数要素を用い

る^{12),13)}。気泡関数要素は補間関数により数値安定性を得られるため適用が容易な数値解析手法であり、安定性に優れている。しかし、要素数が計算メモリに大きく影響を与えるため、節点に対する要素量の増分が小さい六面体要素を用いることが大規模計算において、より多くの利点を得られる。また、形状問題で求める勾配は物体表面の要素形状に影響を受けることが知られており、構造メッシュを物体表面に用いることが望ましい¹⁴⁾。繰り返し計算の過程において、六面体要素は構造メッシュでリメッシングが容易という利点もある。これらより、六面体気泡関数要素は、数値解析の安定性と解析に必要なメモリを確保し、安定な勾配を得ることが可能である。

数値解析例として、3次元領域における従来のアルゴリズムによる形状決定問題を実施する。次に、2次元領域における部分的制御アルゴリズムを加えて形状決定問題を実施し、従来と本研究のアルゴリズムによる結果の比較検討をする。また、初期形状による影響を合わせて検証し、 $Re = 1$, $Re = 40$, $Re = 80$, $Re = 100$ における最適形状を得る。これらにより、本研究における手法の有効性が示される。

2. 最適制御理論

2.1 基礎方程式

無次元化した非圧縮 Navier-Stokes 方程式は、以下の運動方程式と連続式によって表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \mathbf{f}, \quad \text{in } \Omega \times I, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega \times I, \quad (2)$$

ここで、 Ω は、境界 Γ で囲まれた解析領域である。 $I(= (t_0, t_f))$ は解析上考える時間領域であり、 $\Omega \times I$ は、非圧縮粘性流体で満たされている。 $\mathbf{u}$, p は、流速、圧力、 $\mathbf{f}$ は、外力項、また、 $\nu = 1/Re$ であり、 Re は、レイノルズ数である。

図-1に示す物体まわりの外部流れの例を考える。境界 Γ は、 $\Gamma = \Gamma_I \cup \Gamma_O \cup \Gamma_B \cup \Gamma_{S1} \cup \Gamma_{S2}$ に分けられる。図-1の問題における境界条件と初期条件は、以下のように入えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (U, 0, 0), \quad \text{on } \Gamma_I \times I, \\ t &= \{-p\mathbf{1} + \nu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)\} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \Gamma_O \times I, \\ t_1 &= 0, t_3 = 0, u_2 = 0, \quad \text{on } \Gamma_{S1} \times I, \\ t_1 &= 0, t_2 = 0, u_3 = 0, \quad \text{on } \Gamma_{S2} \times I, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \text{on } \Gamma_B \times I, \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 U は、一定の流入流速であり、 $\mathbf{1}$ は、単位テンソル、 $\mathbf{n}$ は、境界 Γ の外向き法線ベクトルである。物体に作用する流体力を (D, L, S) と定義する。流体力 (D, L, S) は、物体の境界 Γ_B の応力を積分することに

よって以下の式により得られる。

$$(D, L, S) = - \int_{\Gamma_B} t d\Gamma. \quad (4)$$

ここで、 D は抗力、 L は上下方向の揚力、 S は左右方向の揚力である。

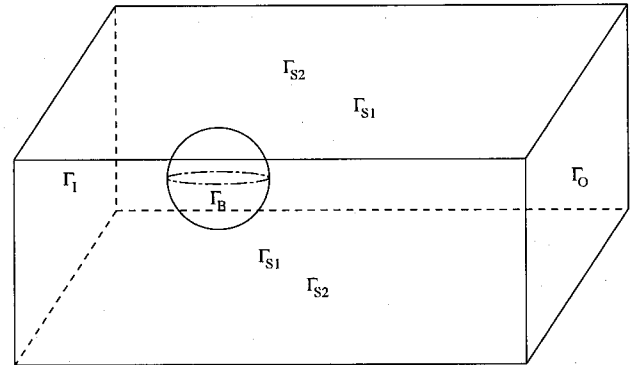


図-1 解析領域及び境界条件

2.2 最適制御の定式化

基礎方程式を満足しながら評価関数を最小にする拘束条件付きの最適制御問題では、基礎方程式の状態変数に対する随伴変数を用いるラグランジュ乗数法によって拘束条件なしの最小化問題に変換することができる。最適制御理論における評価関数には、流体力を評価関数に直接的に用いられ、評価関数は流体力の二乗和によって定義される。

$$J = \frac{1}{2} \int_I (q_1 D^2 + q_2 L^2 + q_3 S^2) dt, \quad (5)$$

ここで、 (q_1, q_2, q_3) は、流体力 (D, L, S) に対する重みである。非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いるため、式(1)と式(2)が式(5)の拘束条件となる。さらに、以下の体積を一定とする拘束条件を付加する。

$$V^{(l)} - V_0 = 0, \quad \text{in } \Omega \times I, \quad (6)$$

ここで、 $V^{(l)}$ は各最適化の繰り返し計算における領域の体積を表し、 V_0 は初期領域の体積、 l は繰り返し回数を表す。非圧縮 Navier-Stokes 方程式の状態変数である流速 $\mathbf{u}$ と圧力 p に関するラグランジュ乗数を $\mathbf{u}^*$ と p^* 、体積一定条件に対するラグランジュ乗数を λ と定義する。これらのラグランジュ乗数と基礎方程式のそれぞれの内積により、拘束条件なしの最小化問題に変換された拡張評価関数が得られる。

$$\begin{aligned} J^* &= \frac{1}{2} \int_I (q_1 D^2 + q_2 L^2 + q_3 S^2) dt \\ &\quad - \int_I \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p \right. \\ &\quad \quad \left. - \nu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right\} d\Omega dt \\ &\quad + \int_I \int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega dt \\ &\quad + \lambda \{V^{(l)} - V_0\}. \end{aligned} \quad (7)$$

2.3 随伴方程式の導出

評価関数 (5) を最小化する最適条件 (停留条件) は、式 (7) の第 1 変分がゼロとして導かれる。

$$\delta J^* = 0. \quad (8)$$

式 (7) の第一変分をとり、必要な項を部分積分し、基礎方程式とその境界条件及び初期条件を満足させることにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta J^* = & - \int_I \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \left\{ -\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{u}^* - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^* \right. \\ & \left. + \nabla p^* - \nu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^* + (\nabla \mathbf{u}^*)^T) \right\} d\Omega dt \\ & + \int_I \int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u}^* d\Omega dt + \int_I \int_{\Gamma_I} \delta t \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma dt \\ & + \int_I \int_{\Gamma_{S1}} \delta t_2 u_2^* d\Gamma dt + \int_I \int_{\Gamma_{S2}} \delta t_3 u_3^* d\Gamma dt \\ & + \int_I \int_{\Gamma_B} \{ \delta t_1 (u_1^* - q_1 D) + \delta t_2 (u_2^* - q_2 L) \\ & + \delta t_3 (u_3^* - q_3 S) \} d\Gamma dt \\ & - \int_I \int_{\Gamma_O} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} d\Gamma dt - \int_I \int_{\Gamma_{S1}} (\delta u_1 s_1 + \delta u_3 s_3) d\Gamma dt \\ & - \int_I \int_{\Gamma_{S2}} (\delta u_1 s_1 + \delta u_2 s_2) d\Gamma dt \\ & - \int_I \int_{\Gamma_B} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} d\Gamma dt \\ & - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_f) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t_f) d\Omega \\ & + \delta \lambda \{ V^{(l)} - V_0 \} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{s}$ は、以下の式により定義する。

$$\mathbf{s} = \{ \mathbf{u}^* \mathbf{u} - p^* \mathbf{1} + \nu (\nabla \mathbf{u}^* + (\nabla \mathbf{u}^*)^T) \} \mathbf{n}. \quad (10)$$

変数の変分は任意であるため、最適条件は、各変数の変分の乗算された各項をゼロにすることである。式 (9) より随伴方程式は、以下のよう得られる。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{u}^* - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^* + \nabla p^* \\ - \nu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^* + (\nabla \mathbf{u}^*)^T) = 0, \text{ in } \Omega \times I, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0, \text{ in } \Omega \times I, \quad (12)$$

また、随伴方程式に対する境界条件と終端条件は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= 0, \quad \text{on } \Gamma_I \times I, \\ \mathbf{s} &= 0, \quad \text{on } \Gamma_O \times I, \\ s_1 &= 0, s_3 = 0, u_2^* = 0, \quad \text{on } \Gamma_{S1} \times I, \\ s_1 &= 0, s_2 = 0, u_3^* = 0, \quad \text{on } \Gamma_{S2} \times I, \\ \mathbf{u}^* &= (q_1 D, q_2 L, q_3 S), \quad \text{on } \Gamma_B \times I, \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t_f) &= 0, \quad \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (13)$$

評価関数 J の座標 $\mathbf{x}$ による変分をとるために次の関係式を用いる。

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (14)$$

これにより、評価関数 J の制御量に関する $\mathbf{x}$ の勾配を得る。この勾配は基礎方程式と随伴方程式を解くことにより計算できる。

3. 有限要素近似

3.1 時間方向の離散化

時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分量を大きく設定できる陰的解法を適用する。

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^{n+1} \\ - \nu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}, \text{ in } \Omega \times I, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \text{ in } \Omega \times I, \quad (16)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{u}}$ は線形近似により得られた値であり、 $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ は以下のように表す。

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2}.$$

3.2 分離型解法及び空間方向の離散化

Navier-Stokes 方程式に対して、圧力 Poisson 方程式の導入により圧力場及び流速場を分離して解ける分離型解法を適用する。本研究では、中間流速を導入した後、圧力 Poisson 方程式を解く方法を用いる。中間流速、圧力、流速を導く方程式はそれぞれ以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^n \\ - \nu \nabla \cdot (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T)^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}, \text{ in } \Omega \times I. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Delta t \nabla^2 (p^{n+1} - p^n) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \text{ in } \Omega \times I. \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla (\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \\ + \nabla (p^{n+1} - p^n) - \frac{1}{2} \nu \nabla \cdot \{ (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)^{n+1} \\ - (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T)^{n+1} \} = 0, \text{ in } \Omega \times I. \end{aligned} \quad (19)$$

これらの方程式に対して、通常の Galerkin 法に従い空間方向の離散化を実施する。

3.3 混合補間

混合補間には、MINI 要素を適用するものとし、流速に対して気泡関数要素を、圧力に対して双一次要素を用いる (図-2)。以下に MINI 要素を示す。

$$\begin{aligned} u_{ie}^h &= \Phi_1 u_{i1} + \Phi_2 u_{i2} + \Phi_3 u_{i3} + \Phi_4 u_{i4} + \Phi_5 u_{i5} \\ &+ \Phi_6 u_{i6} + \Phi_7 u_{i7} + \Phi_8 u_{i8} + \Phi_9 \tilde{u}_{i9}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\tilde{u}_{i9} = u_{i9} - \frac{1}{8} (u_{i1} + u_{i2} + u_{i3} + u_{i4} + u_{i5} + u_{i6} + u_{i7} + u_{i8}),$$

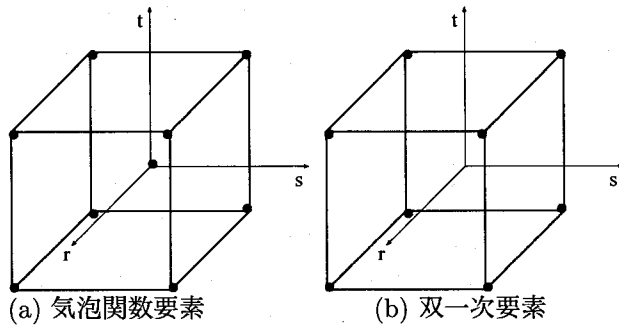


図-2 MINI 要素

$$\Phi_\alpha(r, s, t) = \frac{1}{8}(1 + r_\alpha r)(1 + s_\alpha s)(1 + t_\alpha t), \quad \Phi_9 = \phi_e,$$

$$p_e^h = \Psi_1 p_1 + \Psi_2 p_2 + \Psi_3 u_3 + \Psi_4 u_4 + \Psi_5 p_5 + \Psi_6 p_6 + \Psi_7 u_7 + \Psi_8 u_8, \quad (21)$$

$$\Psi_\alpha(r, s, t) = \frac{1}{8}(1 + r_\alpha r)(1 + s_\alpha s)(1 + t_\alpha t),$$

表-1 $r_\alpha, s_\alpha, t_\alpha$ の値

$\alpha =$	1	2	3	4	5	6	7	8
r_α	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
s_α	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
t_α	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

ここで, ϕ_e は気泡関数である.

3.4 気泡関数要素の安定化作用

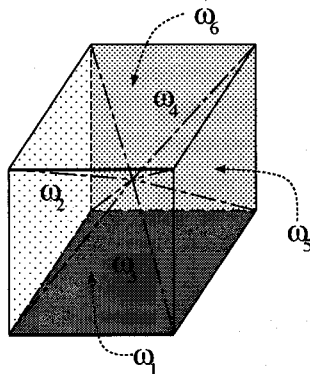


図-3 要素分割

気泡関数要素は, アイスパラメトリック座標 (r, s, t) により, 要素領域を 6 つの領域 $\omega_1 - \omega_6$ に分割する (図-3). 気泡関数はそれぞれの分割領域において, 以

下の式で表される.

$$\phi_e = \begin{cases} \{1 - (-r)\} & \text{in } \omega_1, \\ \{1 - (-s)\} & \text{in } \omega_2, \\ \{1 - (-t)\} & \text{in } \omega_3, \\ \{1 - (+r)\} & \text{in } \omega_4, \\ \{1 - (+s)\} & \text{in } \omega_5, \\ \{1 - (+t)\} & \text{in } \omega_6. \end{cases} \quad (22)$$

気泡関数には, 安定化気泡関数を用いる. これは, 以下に示す安定化作用の導入により不足した数値粘性を適切に与える¹⁵⁾.

$$\tau_{eB} = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{(\nu + \nu') \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 V_e}, \quad (23)$$

ここで, Ω_e は要素領域, $\langle u, v \rangle_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} u v d\Omega$, $\|u\|_{\Omega_e} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, $V_e = \int_{\Omega_e} d\Omega$ である. ν' は安定化作用に対する制御パラメータであり, この安定化パラメータは, 次式のように安定化有限要素法において用いる τ_{eS} と等価となるように決定する¹⁶⁾.

$$\tau_{eB} = \tau_{eS}, \quad \tau_{eS} = \left[\left(\frac{2|u|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\mu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (24)$$

4. 最小化アルゴリズム

4.1 従来のアルゴリズム

最少化手法として重み付き勾配法を適用する¹⁷⁾. この方法は, 拡張評価関数 (7) にペナルティ項を付加した修正評価関数 $K^{(l)}$ を導入する.

$$K = J^* + \frac{1}{2} \int_I \int_{\Gamma_B} W^{(l)} \{x^{(l+1)} - x^{(l)}\}^2 d\Gamma dt, \quad (25)$$

ここで, $W^{(l)}$ はペナルティ項に対する重みであり, 反復計算の中で更新する. 修正評価関数は移動量の勾配を含むため, 停留条件 $\delta K = 0$ により, 次のステップの物体座標を求める式を得ることができる.

$$W^{(l)} x^{(l+1)} = W^{(l)} x^{(l)} - s \cdot (\nabla u)^T. \quad (26)$$

アルゴリズムを以下に示す.

1. $l = 0$ における初期形状 $x^{(0)}$ を決定する.
2. 状態量 $u^{(0)}, p^{(0)}$ を計算する.
3. 評価関数 $J^{(0)}$ を計算する.
4. ラグランジュ乗数 $u^{*(l)}, p^{*(l)}$ を計算する.
5. 形状の変形量を求め, $x^{(l+1)}$ を計算する.
6. $\|x^{(l+1)} - x^{(l)}\| \leq \varepsilon$ の場合, 計算を終了する.
7. 状態量 $u^{(l+1)}, p^{(l+1)}$ を計算する.
8. 評価関数 $J^{(l+1)}$ を計算する.
9. $J^{(l+1)} \leq J^{(l)}$ の場合, 4へ,
 $J^{(l+1)} > J^{(l)}$ の場合, $W^{(l+1)} = 2.0W^{(l)}$ に更新して5へ.

初期の重み $W^{(0)}$ は, 通常 $W^{(0)} = 1.0$ に設定するが, 重みが移動量の大きさに直接影響することから計算時

間短縮のため、本研究では定常収束解するケースに関して、初期の重み $W^{(0)}$ はできる限り小さい値を設定する。

4.2 本研究のアルゴリズム

部分的に物体境界を制御する必要性を考えた理由は以下のとおりである。まず、物体の最適形状は唯一であるため、導出した形状が最適であるならば、物体の一部を制御しても物体形状は変化しないはずである。物体後方が丸く、剥離が発生する形状は最適形状ではなく、極小解に収束した局所的形状の可能性がある。物体後方が丸くなる要因としては、物体後方の評価関数の勾配値が前方の勾配値に比べて小さいため、物体形状に変形に反映されにくいと考えられる。また、物体の上流側では、最適制御理論により導出される勾配値は大きく、形状変化が急であるため、最適形状に収束する以前に有限要素メッシュがつぶれて計算が不可能となることが頻繁に発生する。以上のことを踏まえて、本研究では、補助的なアルゴリズムとして、部分的に形状変化させる導出過程をこれまでの物体境界全体を制御する過程に加えて最適な形状を導くことが、これらの問題解決に繋がると考えた。物体に対して圧力勾配が逆になることは、境界層の剥離を発生させる要因となる。圧力勾配が逆となることを防ぐために、以下のように逆の圧力勾配が生じた物体境界より後方に部分的制御アルゴリズムを加えて実施する。

$$\frac{dp}{dx} \geq 0 \quad (27)$$

部分的制御アルゴリズムでは、従来のアルゴリズムの6以下の過程を一部変更し、物体の部分的な形状変化及び物体全体の形状変化が収束したものを解とする。アルゴリズムの修正を以下に示す。

6. $\|x^{(l+1)} - x^{(l)}\| \leq \varepsilon$ の場合、
 - (I) 物体の部分的形状変化及び (II) 物体全体の形状変化が ε 以下に収束した場合、または、(I)(II) において評価関数が下がらない場合に計算を終了する。
 - (I), 又は、(II) が ε 以下に収束した場合、どちらか収束していない方に変更し、 $W^{(l+1)} = W^{(0)}$ に戻して4へ。
7. 状態量 $u^{(l+1)}, p^{(l+1)}$ を計算する。
8. 評価関数 $J^{(l+1)}$ を計算する。
9. $J^{(l+1)} \leq J^{(l)}$ の場合、4へ、
 $J^{(l+1)} > J^{(l)}$ の場合、 $W^{(l+1)} = 2.0W^{(l)}$ に更新して4へ。

部分的制御が収束した後に物体全体の制御に変えることは、解が局所的な解に収束する可能性があるため、アルゴリズムの6において、(I) 及び (II) が収束するごとに ε を段階的に下げる。また、初期の制御境界は部分的制御境界から実施している。

アルゴリズムの6において、物体境界全体を制御した形状が収束し、部分的境界制御をした形状が収束しない状況は以下のように考えられる。物体境界全体の制御のみで得られた形状は、ある初期形状での最適解であり、唯一の最適解ではない。そのため、物体境界を部分的に制御した場合には、さらに評価関数を減少させる形状に変化する。その要因として、圧力抗力と粘性抗力の釣り合う状態、面積一定の条件が関係していると考えられる。仮に物体の左右長さが一定の条件では、形状が薄く変形すれば、圧力抗力及び粘性抗力はともに減少するため、最適な形状が得られる。しかしながら、物体面積が一定の条件では、物体境界全体の制御で最適解を導くことは困難となる。薄く長い形状は粘性抗力を増大させ、厚みのある形状では圧力抗力を増大させるために、形状はいくつかの形状に収束する可能性を含むからである。よって、物体境界全体を制御した形状が収束した後も、部分的境界制御をした場合には、より最適な形状に変形することが考えられる。

5. 数値解析例

5.1 従来のアルゴリズムによる解析

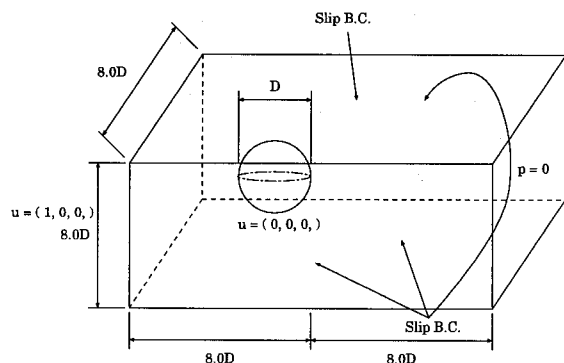


図-4 解析領域及び境界条件

本研究の数値解析例として、非圧縮粘性流れにおける物体の形状決定を実施する。本研究では、評価関数の重みを $q_1 = 1.0$, $q_2 = q_3 = 0.0$ とし、流体力の抗力のみを制御する。これにより、評価関数の減少した適切な物体形状に変化させ、物体抗力を減少させる。物体形状の収束判定は $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6}$ とする。

はじめに、物体全体の形状変化だけの従来アルゴリズムによる三次元解析を実施する。三次元解析の物体として球体を用いる。境界条件と解析領域は図-4に示す。有限要素分割は、節点数 44230 及び要素数 41984 であり、構造メッシュを用いる (図-5)。球体の物体表面分割の節点数及び要素数は 1538 と 1536 である (図-6)。

球体の周りは、物体表面の節点配置が均等になるようにスムージングを適用し、形状変化後はリメッシングを行う¹⁴⁾。計算条件を時間増分量 $\Delta t = 0.1$ 、初期の

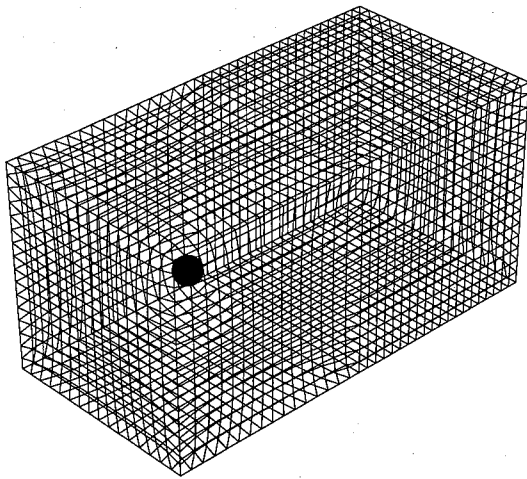


図-5 有限要素分割

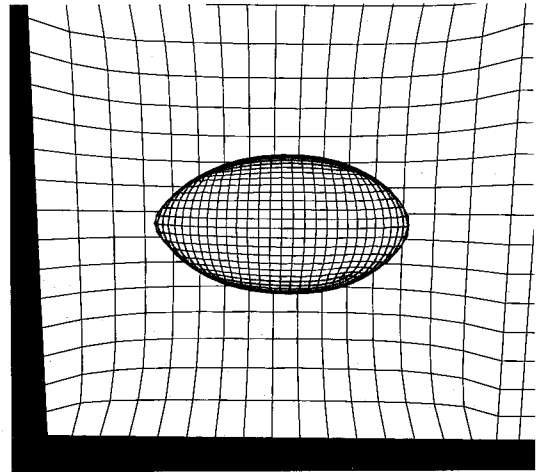


図-8 導出された形状 ($Re = 1$)

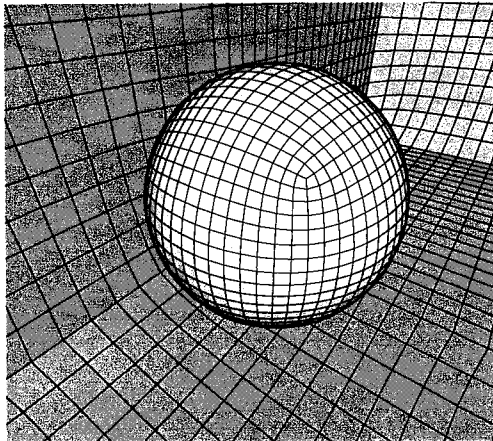


図-6 球体の表面分割

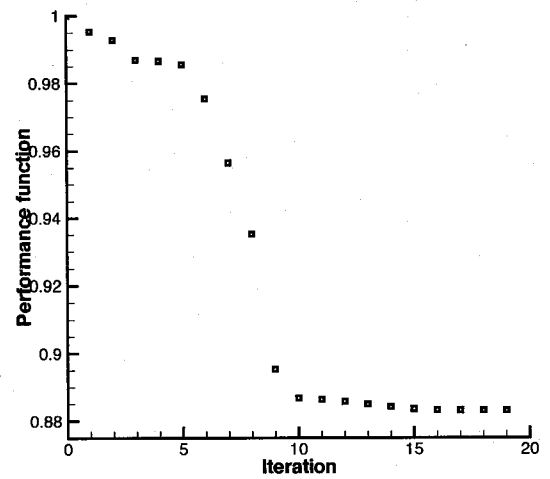


図-9 三次元解析における評価関数 ($Re = 2000$)

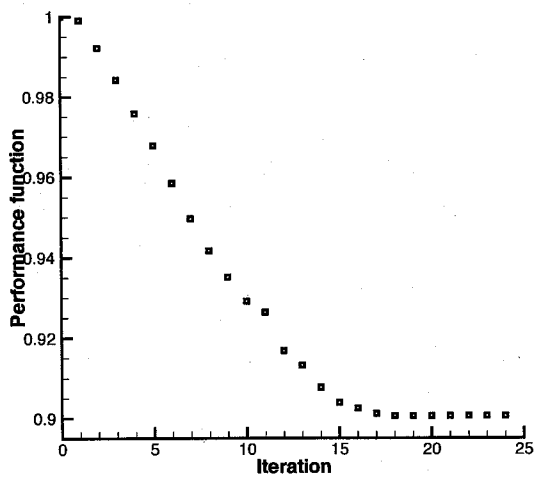


図-7 三次元解析における評価関数 ($Re = 1$)

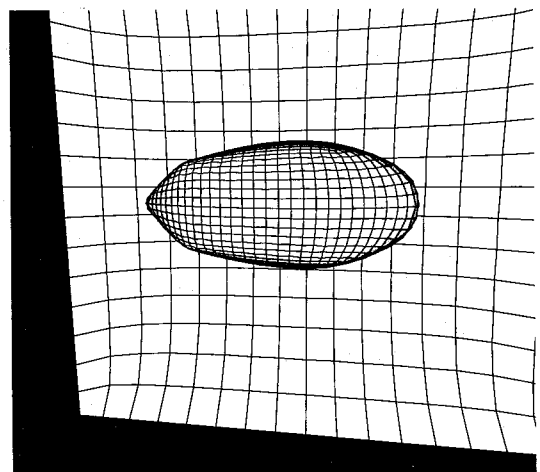


図-10 導出された形状 ($Re = 2000$)

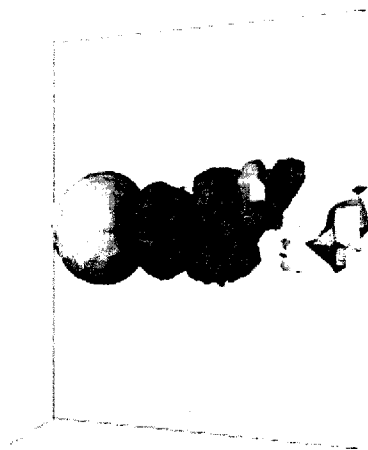


図-11 球体周りの圧力分布図 ($Re = 2000$)

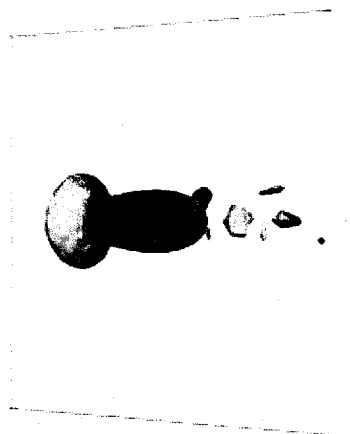


図-12 導出された形状周りの圧力分布図 ($Re = 2000$)

最小化手法における重み $W = 1.0$ とし、 $Re = 1$ の定常流れ問題及び $Re = 2000$ の非定常流れの問題を解く。定常流れ問題は流れが定常状態に収束した後に制御し、非定常流れ問題は非定常状態の流れが生じた後に制御する。定常流れ問題において、評価関数は 90.1% に減少した (図-7)。球体は左右に長く引き伸ばされ、ほぼ左右対称な形状が得られた (図-8)。

次に、 $Re = 2000$ の非定常流れ問題を解く。初期形状には、定常流れ問題で求めた形状を用いる。解析結果として、評価関数が 88.3% に減少し (図-9)、図-10 に示す形状が得られた。なお、図-8 及び 図-10 における流れの向きは左から右である。球体の場合に発生する物体後方の渦 (図-11) は減少したが、完全には渦が消えなかった (図-12)。導出された形状は流線形にならず、流れに乱れが残った。よって、導出された形状は最適形状とはいえない。

5.2 部分的制御アルゴリズムによる解析

続いて、二次元解析において物体後方の逆圧力勾配が生じた部分に、部分的制御アルゴリズムを加えた方法により解析を実施する。物体初期形状に円を用いた

場合の境界条件と解析領域は図-13に示す。図-14に示す有限要素分割は、節点数 7112 及び要素数 6912、物体表面の節点数は 128、物体周りの最小メッシュ幅は 0.005、メッシュの粗密は物体境界から 0.09 の幅が 7 分割された構造メッシュを用いる。また、物体形状が変化した場合も節点数及び要素数は変化しない。

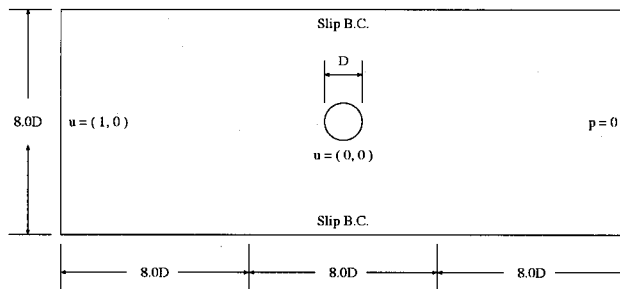


図-13 解析領域及び境界条件

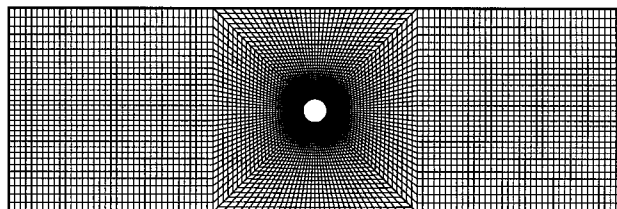


図-14 有限要素分割

まず、定常 Stokes 流れにおける最適形状を示す。これは、後に初期形状として用いる。計算条件として、 $Re = 1$ 及び $W = 0.05$ を与える。評価関数は、図-15 に示すように 85.1% に減少し、図-16 に示す形状が得られる。この形状は、O. Pironneau が示した Stokes 流れにおける最適形状条件^{1), 2)}の物体表面における渦度一定の条件を満たす (図-17)。また、Stokes 流れの場合は負の圧力勾配が生じないため、部分的制御アルゴリズムは加わらない。

次ケースの計算条件は、 $Re = 40$ 及び $\Delta t = 0.05$ 、 $W = 0.005$ である。初期形状は、図-16 に示す Stokes 流れにおいて導出された形状を用いる。最終的な評価関数の値も 85.5% に減少した (図-18)。これは、従来の方法と比較した場合、さらに評価関数が 5.6% 減少した。また、 $Re = 40$ における円の評価関数を 100% とした場合には、46.0% に減少したことになる。繰り返

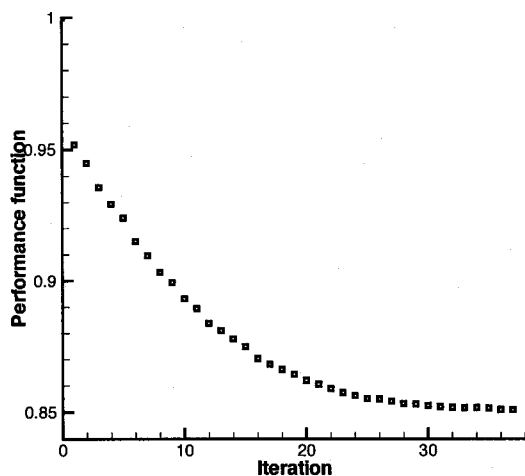


図-15 二次元 Stokes 流れにおける評価関数 ($Re = 1$)

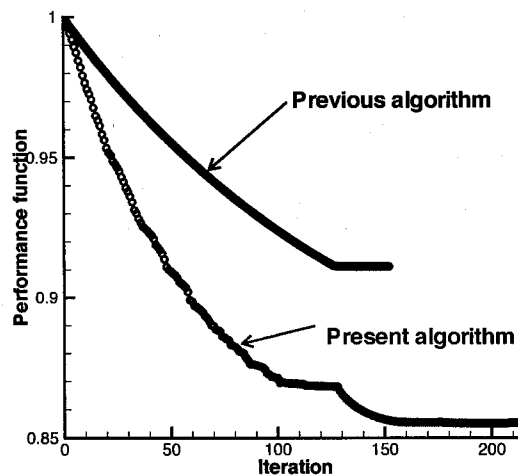


図-18 従来と本研究の評価関数の比較 ($Re = 40$)

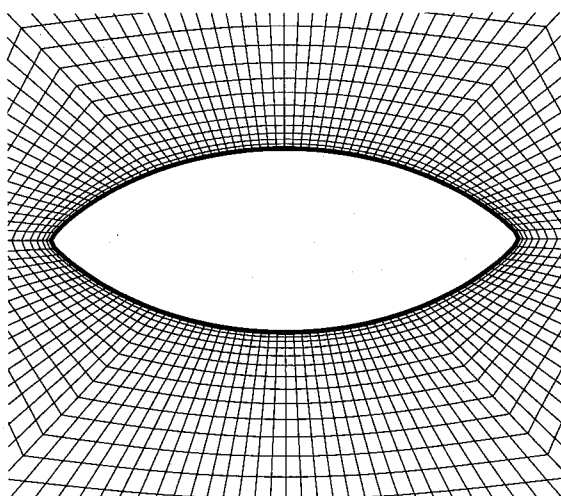


図-16 Stokes 流れにおける最適形状

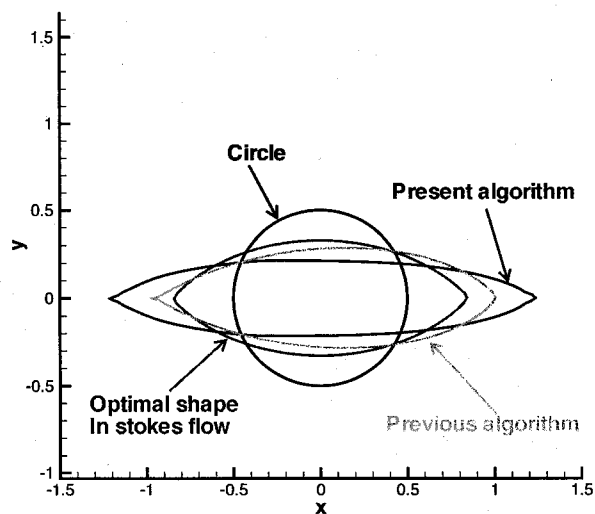


図-19 導出された形状の比較 ($Re = 40$)

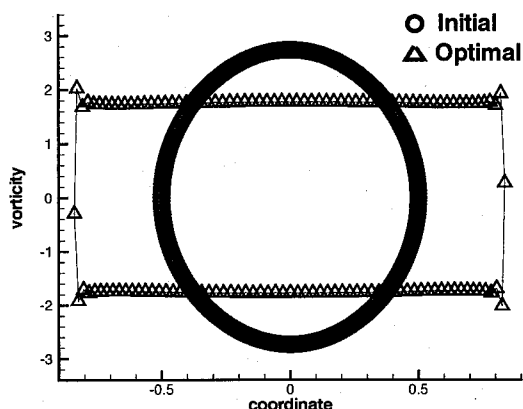


図-17 物体表面の渦度分布図 ($Re = 100$)

返し計算の過程で評価関数の勾配が不連続となるのは、ここで部分的な形状変化、又は、物体全体の形状変化が ε 以下に収束し、形状を変化させる領域が変更したことを示す。従来のアルゴリズムにおいても、評価関数が不連続となるのは前方におけるメッシュの移動が限界に来ており、重み付き勾配法の重みが著しく増加したためである。導出された形状結果を図-19に示す。従来のアルゴリズムでは、前方が鋭利になり、メッシュが潰れてしまい、計算が困難となった。本研究のアルゴリズムにおいて、導出された最終形状は前方は従来と同様に尖ったが、物体上流側の先端のメッシュが潰れるほど、鋭利には尖らなかった。さらに、物体後方も尖った形状となり、 $Re = 40$ において最も左右に広がり、ほぼ左右対称な形状となった。

また、計算条件を $Re = 100$ に変更した同アルゴリズムでの解析結果を示す。評価関数は 74.7% に減少し (図-28の (I)), $Re = 40$ で得られた形状と比較すると、さらに左右に広がったが、後方にやや丸み帯びた形状になった (図-20)。しかしながら、物体後方での剥離は発生せず、流れは乱れていない (図-21)。

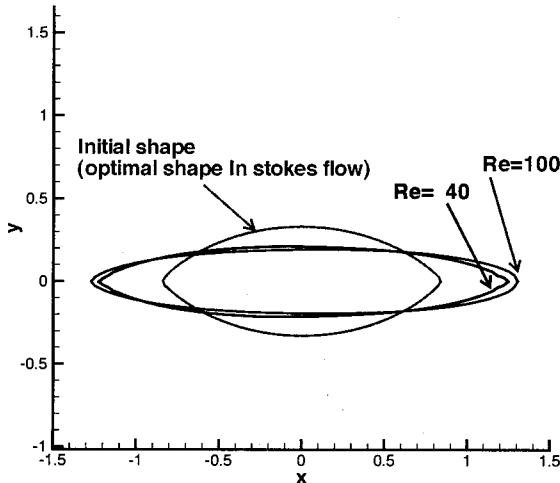


図-20 導出された形状の比較 ($Re = 40$ 及び $Re = 100$)

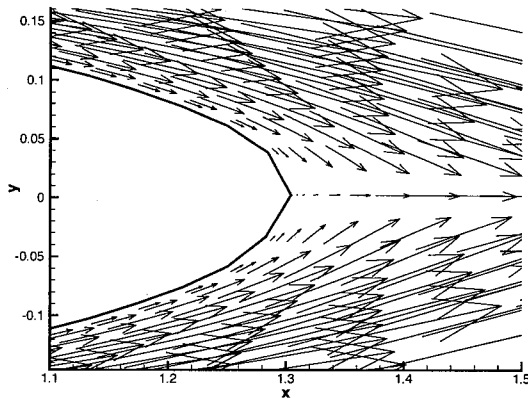


図-21 導出された形状の後方の速度分布図 ($Re = 100$)

$Re = 100$ における同様のケースを節点数 14152 及び要素数 13824、物体表面の節点数は 256 の有限要素分割に変更し、有限要素分割が解に与える影響を確認した。図-22に示すように、より細分化された有限要素分割を行なった結果のほうが物体がさらに左右に広がり、評価関数は、さらに減少し、74.5% になった。有限要素分割を細かくすることによって、物体後方の丸みは消えることはなかったが、物体後方での剥離は発生せず、流れは乱れていない (図-23)。

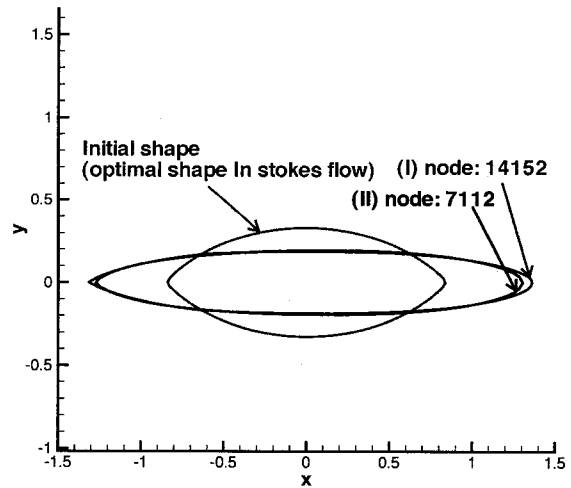


図-22 導出された形状の比較 ((I) 節点数:14152, (II) 節点数:7112)

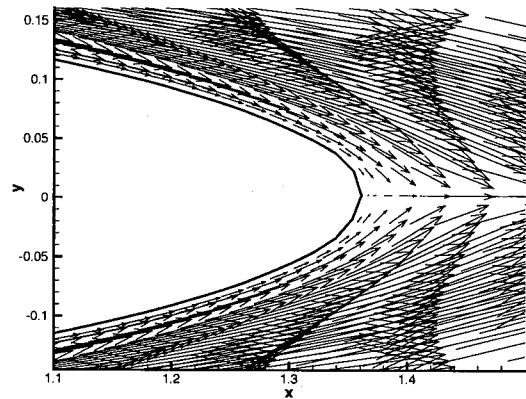


図-23 導出された形状の後方の速度分布図 ($Re = 100$, 節点数:14152)

5.3 初期形状による影響

次に、 $Re = 100$ の流れにおいて物体後方が丸みを帯びた形状が導出されたことを踏まえて、物体の初期形状による依存性を確認するために、円及び楕円、Stokes 流れにおける最適形状を初期形状として解析を行う (図-24)。各形状の面積は円に合わせ、楕円は長軸と短軸の比を 2 : 1 とする。計算条件は $Re = 40$ 及び $\Delta t = 0.05$ 、それぞれの重みは $W = 0.02$, $W = 0.01$, $W = 0.005$ とする。円及び楕円、Stokes 流れ最適形状の各ケースにおける評価関数及び導出された形状を、図-25及び図-26に結果を示す。評価関数は、Stokes 流れ最適形状、楕円、円の順で、46.0%, 46.1%, 46.5% にそれぞれ減少した。最適形状に近い形状から初期形状にすることは、局所的極小値に収束せず、最適形状となる最小値に収束すると予想される。つまり、 $Re = 40$ において、Stokes 流れ最適形状を初期形状とした場合、最適形状に限りなく近い形状が得られたと考えられる。

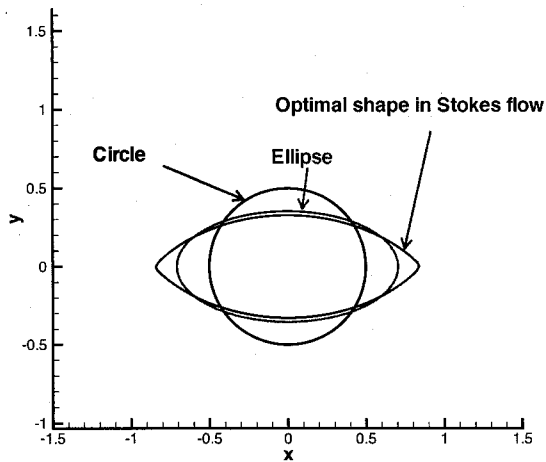


図-24 初期形状 (円, 楕円, Stokes 流れの最適形状)

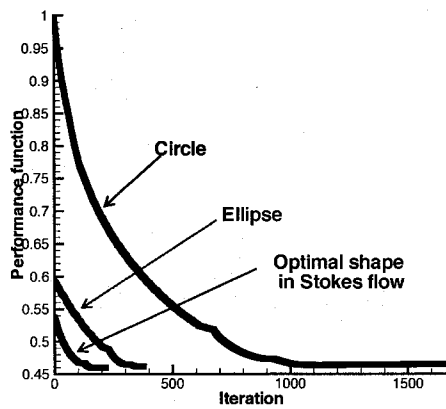


図-25 異なる初期形状における評価関数の比較 ($Re = 40$)

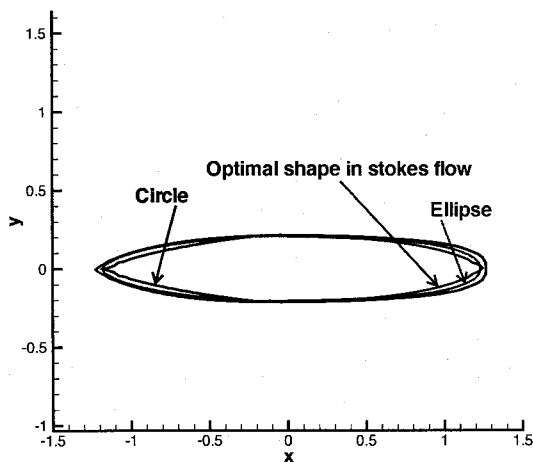


図-26 導出された形状の比較 ($Re = 40$)

次に、初期形状として、(I): Stokes 流れ最適形状, (I I): Stokes 流れ最適形状から $Re = 40$ で導出された形状, (III): (II) の形状から $Re = 80$ で導出された形状を用いる。 $Re = 100$ において、それぞれの形状決定を行う (図-27)。 計算条件は $Re = 100$, $\Delta t = 0.05$, $W = 0.005$ とする。 各ケースにおける評価関数を図-28に示す。 (III), (II), (I) の初期形状の順に評価関数が最も下がった。 それぞれ、74.39%, 74.41%, 74.66% に減少した。 $Re = 100$ における円の評価関数を基準にした場合、31.13%, 31.14%, 31.24% にそれぞれ減少した。 導出された形状を図-29に示す。 (III), (II) の初期形状にあまり違いは見られなかった。 また、Stokes 流れと同様に (III) は、ほぼ左右対称であり、Stokes 流れの最適形状から段階的にレイノルズ数を上げ、各レイノルズ数における最適形状を導出したため、 $Re = 100$ における局所的最小解ではなく最適解を得ることができた。

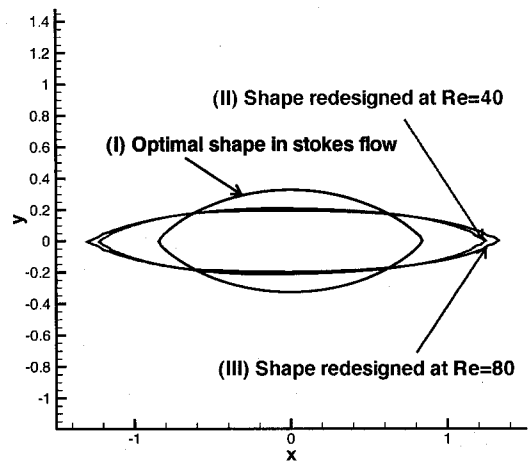


図-27 初期形状 ((I)Stokes 流れの最適形状, (II) $Re = 40$ と (III) $Re = 80$ において導出された形状)

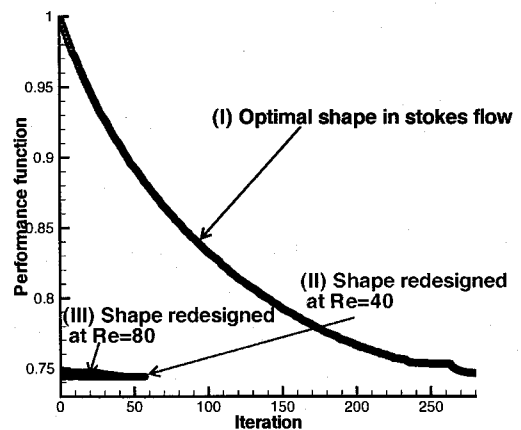


図-28 異なる初期形状における評価関数の比較 ($Re = 100$)

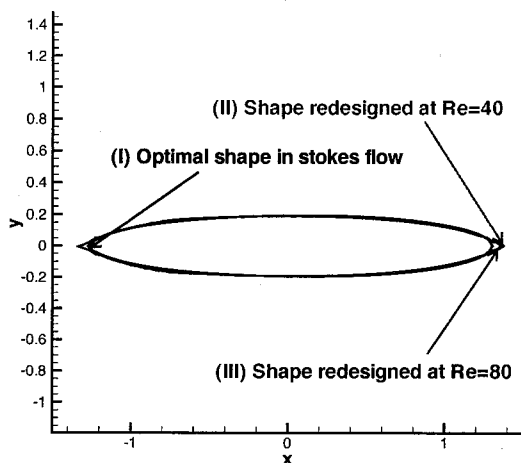


図-29 導出された形状の比較 ($Re = 100$)

最後に、 $Re = 200$ 及び $Re = 300$ での形状を導出する。初期形状の影響を減らすために、初期形状には前ケースで導出した形状(III)を用いて、レイノルズ数が20増加する毎に形状を導出する。各最終形状を図-30に示す。 $Re = 200$ 及び $Re = 300$ における初期形状の評価関数から、それぞれ、99.5%、99.0%に減少した。初期形状が最適形状に近い形状であったため、評価関数はあまり減少しなかったと考えられる。

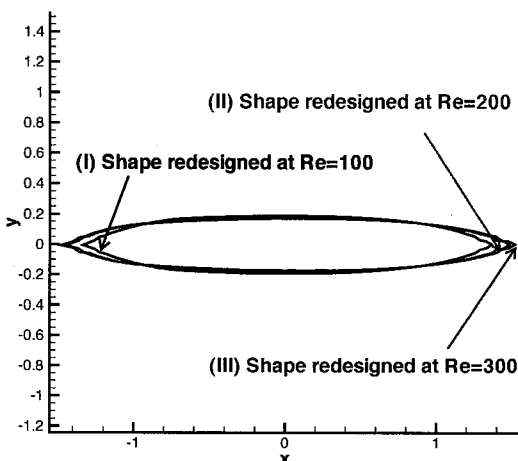


図-30 導出された形状の比較 ($Re = 100, 200, 300$)

6. 結論

従来のアルゴリズムによって、形状を決定した場合、物体前方が鋭く、物体後方が丸くなることが三次元解析においても示された。 $Re = 100$ 以下において、本研究で用いた物体形状を部分的に形状変形させる過程を加えた部分的制御アルゴリズムでは、物体後方の流れに剥離が発生しない形状に変化させることができた。

$Re = 40$ の解析結果において、従来のアルゴリズムよりも、さらに5.6%の評価関数の減少が確認された。物体周りに、より細分化した有限要素分割を用いた場合、評価関数をさらに減少させ、より最適な形状に近づけることが確認された。本研究の部分的制御アルゴリズムは、繰り返し計算過程での局所的な解への収束を避けることを示した。よって、部分的形状変化の過程を加えることは求める解を最適解に近づけることができる。

また、初期形状を変えた場合には、それぞれ異なった形状に収束した。これにより、設定した評価関数の最適形状から、初期形状が著しく離れた場合には、本研究の部分的制御アルゴリズムによっても、最適形状を得ることは困難である。しかしながら、 $Re = 40$ 及び $Re = 80$ の最適形状より導出した $Re = 100$ における形状のように、より最適解に近い初期形状から、最適形状を導くことができた。これにより、 $Re = 100$ の流れにおける最適形状は Stokes 流れに限らず、ほぼ左右対称の形状であることが示された。 $Re = 40$ 及び $Re = 80$ における形状も、左右対称な形状となっており、最適形状であると考えられる。 $Re = 200$ 及び $Re = 300$ でも、ほぼ左右対称な形状が確認された。本研究の手法では $Re = 1$ 及び $Re = 40$, $Re = 80$, $Re = 100$, $Re = 200$, $Re = 300$ における最適形状を導出することができた。

本研究の部分的制御アルゴリズムは、局所的極小解への収束を避けられることから、部分的制御アルゴリズムを多段階に増やすことにより、初期形状の依存性を減らし、より最適解に近づけることができると考える。その場合には、物体境界のどの部分に部分的制御アルゴリズムを適用するか条件決定が重要となる。また、レイノルズ数300を越える流れにおいても同様の形状決定を検討する必要がある。

参考文献

- 1) O.Pironneau: On optimum profiles in Stokes flow, *J. Fluid Mech.*, 59, No.1, (1973), pp.117-128.
- 2) O.Pironneau: On optimum design in fluid mechanics, *J. Fluid Mech.*, 64, No.1, (1974), pp.97-110.
- 3) Eiji Katamine, H.Azegami and S.Itoh: Solution to Shape Optimization Problems of viscous flow fields, *Int. J. Comput. Fluid D.*, 19, No.1, (2005), pp.45-51.
- 4) Y.Ogawa, M.Kawahara: Shape Optimization of Body Located in Incompressible Viscous Flow Based on Optimal Control Theory, *Int. J. Comput. Fluid D.*, 17(4), (2003), pp.243-251.
- 5) H.Yagi, M.Kawahara: Shape optimization of a body located in low Reynolds number flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48, (2005), pp.819-833.
- 6) A.Jameson, N.Pierce, L.Martinelli, Optimum Aerodynamic Design Using the Navier-Stokes Equations, AIAA paper 97-0101, 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, January 1997
- 7) A.Jameson, N.Pierce, L.Martinelli, Optimum Aerodynamic Design Using the Navier-Stokes Equations, AIAA paper 97-0101, 35th Aerospace Sciences Meet-

- ing and Exhibit, Reno, Nevada, January 1997
- 8) R.Glowinski, O.Pironneau: On the numerical computation of the minimum-drag profile in laminar flow *J. Fluid Mech.*, 72, part2, (1975), pp.385-389.
 - 9) J.Matsumoto, Shape Identification for Navier-Stokes Equations with unsteady flow using bubble function element stabilized method, WCCM, 353, (2004).
 - 10) A.Maruoka, M.Marin, M.Kawahara: Optimal control in Navier-Stokes equations, *Int. J. Comput. Fluid D.*, 9(3-4), (1998), pp.313-322.
 - 11) R.Pierre: Optimal selection of the bubble function in the stabilization of the P1-P1 element for the Stokes problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, 32, (1995), pp.1210-1224.
 - 12) S.Nakajima, M.Kawahara: Three Dimensional Analysis for Incompressible Viscous Flow by Hexahedral Bubble Element, *ACFD 2000*, Oct. 17-20,2000 Beijing, China, pp.412-421.
 - 13) S.Nakajima, M.Kawahara: Optimal Control of Fluid Force around Sphere for Incompressible Viscous Flow by Hexahedral Bubble Element, *APCOM 2001*, Nov. 20-23, 2001 Sydney, N.S.W., Australia, pp.573-584.
 - 14) K.Nojima: Research on Mesh Generation for the Three-Dimensional Shape Optimization Problem, *Doctor Thesis*, 2007.
 - 15) J.Matsumoto and M.Kawahara: Shape identification for fluid-structure interaction problem using improved bubble element, *Int. J. Comput. Fluid D.*, 15, (2001), pp.33-45
 - 16) T.E.Tezduyar, S.Mittal, S.E.Ray and R.Shih: Incompressible Flow Computations with Stabilized Bilinear and Linear Equal-Order-Interpolation Velocity Pressure Element, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 95, (1992), pp.221-242.
 - 17) Y.Sakawa, Y.Shindo, "On Global Convergence of an Algorithm for Optimal Control," *IEEE Transaction on Automatic Control* AC-25, No.6, December (1980), pp.1149-1153

(2007 年 4 月 12 日 受付)