

準 Newton 法を用いたシェイクダウン解析の アルゴリズムに関する研究

Study on algorithm of shakedown analysis by means of Quasi-Newton Method

西藤潤*・小林俊一**

Jun SAITO and Shun-ichi KOBAYASHI

*正会員 博士(工学) 京都大学大学院助教 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂)

**正会員 博士(工学) 京都大学大学院助教 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂)

When an elasto-plastic body is subjected to repeated excitations or moving loads, its safety can be simply but directly evaluated by means of shakedown analysis. The advantage of shakedown analysis in comparison with ordinary elasto-plastic finite element analysis is its time and cost effectiveness. In this paper, a new algorithm of shakedown analysis based on Quasi-Newton method is investigated. With this newly proposed algorithm, a size of linear equations can be reduced to be as same as monotonic loading cases. In addition to this, modification of feasible directions in the iterative calculations is proposed to improve the convergence of numerical calculations. Two numerical examples are presented to illustrate the validity of the proposed algorithm.

Key Words : shakedown analysis, Quasi-Newton method, finite element method, deflected feasible direction

1. はじめに

「シェイクダウン」とは、「弾塑性体に荷重を繰り返しかけたとき、一定の塑性変形が生じた後に完全な弾性挙動を示すようになること」をいう^{1),2),3),4)}。繰り返しかけた荷重に対する挙動がシェイクダウンに落ち着けば、構造物は崩壊しない。そのためシェイクダウン挙動を示す最大の荷重を求めると、構造物の安定性の限界を知ることができ、工学的に大変有用である。この限界の荷重は、シェイクダウン解析法によって求められる。

シェイクダウン解析法とは、繰返し荷重が作用する弾塑性体の安定性を照査する解析法の一つである。その特徴は、繰返し荷重に対する系の応答を時間域で逐次的に解く増分形の弾塑性解析法とは異なり、荷重空間内に繰返し荷重が取り得る荷重領域を設定し、その荷重領域に対して系が安定かどうかを照査することにある。この解析法では、通常の増分形の弾塑性解析のような経時的な挙動の詳細を知ることは不可能であるが、限界状態での物理量を未知数として直接評価するため、計算コストの面で有利であるとされる⁴⁾。したがって、繰返し荷重や外荷重の不確定性を考慮した構造物の設計に幅広く応用できると考えられる。

小林ら⁵⁾は運動学的な方法と静力学的な方法を組み合わせた混合型のシェイクダウン解析法を定式化し、主双対内点法による解法アルゴリズムを提案している。また、この混合型シェイクダウン解析法では、繰返し荷重を有限個の荷重パターンの線形和として表現することにより、凸関数の性質を利用して解くべき方程式の

サイズを混合型剛塑性解析法、つまり単調載荷に対する塑性安定性を評価する解析法と同じサイズに縮約できることを示し、計算量の大幅な削減に成功している。しかしながら、解くべき方程式のサイズは(節点変位の自由度+残留応力の自由度+1)と大きく、また、その線形方程式の行列は対称な疎行列であるものの、バンド型や正定値性の性質を有していない。

さて、本論文では、既往の混合型シェイクダウン解析法をさらに効率的に解くためのアルゴリズムを提案したので報告する。具体的には準ニュートン法を用いることで、解くべき方程式のサイズを、節点変位の自由度と同じサイズまで縮約させ、かつバンド型正値対称行列として解く方法を詳述する。また、解の探索方向を修正し、解の収束性を改善するテクニックについても併せて説明する。

2. シェイクダウン問題の定式化

まず、弾完全塑性体に荷重を与えたときの境界値問題を考えよう。図-1 に示すように、弾完全塑性体は領域 D からなる。領域 D 内では物体力 g_i が作用する。また、領域 D 内の全ての点において降伏関数 f が定義される。境界は応力境界 S_σ と変位速度境界 S_u からなる。応力境界の一部、または全部に表面力 $\alpha t_i(s)$ が作用する。 s は時刻であり、0 から T までの間で定義される。 α は荷重係数、 $t_i(s)$ は荷重パターンである。変位速度境界 S_u では変位速度 $u_i = 0$ を満足している。本論文では、この境界条件においてシェイクダウンする

限界の荷重係数 α を求める問題を考える。なお、簡単のため以下の2つの仮定をする。

- 降伏関数 f は凸関数である。
- 荷重パターン t_i によって生成 (generate) される領域は凸集合である。

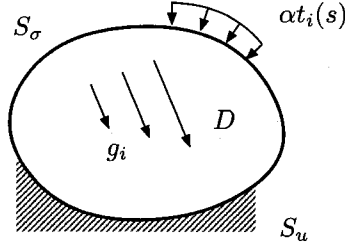


図-1 弾完全塑性体の境界値問題

次に、Melan の定理から解くべき問題を導出する。図-1 の問題において、Melan の定理¹⁾は以下のように述べられる。「時間に依存しない残留応力場 σ_{ij}^R と与えられた荷重 ($t_i(s), g_i$) に対して系が線形弾性を示すと仮定したときの応力 $\sigma_{ij}^E(s)$ に対して、降伏関数 $f(\sigma_{ij})$ が領域 D 内のあらゆる位置で次の不等式

$$f(\alpha \sigma_{ij}^E(s) + \sigma_0^E + \sigma_{ij}^R) \leq 0 \quad (\text{in } D) \quad (1)$$

を満足するとき、系はシェイクダウンする。」なお、残留応力 σ_{ij}^R は以下の力のつりあい式

$$\sigma_{ij,j}^R = 0 \quad (\text{in } D) \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}^R n_j = 0 \quad (\text{on } S_\sigma) \quad (3)$$

を満足する。また $\sigma_{ij}^E(s), \sigma_0^E$ はそれぞれ時間によって変動する荷重パターン $t_i(s)$ に対する弾性応力、死荷重に対する弾性応力であり、以下の力のつりあい式を満足している。

$$\sigma_{ij,j}^E(s) = 0 \quad (\text{in } D, s \in [0, T]) \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}^E(s) n_j = t_i(s) \quad (\text{on } S_\sigma, s \in [0, T]) \quad (5)$$

$$\sigma_{0,ij,j}^E + g_i = 0 \quad (\text{in } D) \quad (6)$$

$$\sigma_{0,ij}^E n_j = 0 \quad (\text{on } S_\sigma) \quad (7)$$

Melan の定理より、図-1 の問題におけるシェイクダウン限界の荷重係数 α は式 (1) を満足する最大の値であることがわかる。式 (6)–(5) を満足する弾性応力 $\sigma_{ij}^E(s), \sigma_0^E$ は線形弾性有限要素法によって容易に解ける。この線形弾性応力を用いると、シェイクダウン限界荷重の荷重係数 α は式 (1), (2), (3) を制約条件とす

る次のような最大化問題として与えられる。

$$\begin{aligned} & \max_{\sigma_{ij}^R, \alpha} \alpha \\ & \text{sub. to. } \begin{cases} \sigma_{ij,j}^R = 0 & (\text{in } D) \\ \sigma_{ij}^R n_j = 0 & (\text{on } S_\sigma) \\ f(\alpha \sigma_{ij}^E(s) + \sigma_0^E + \sigma_{ij}^R) \leq 0 & (\text{in } D, s \in [0, T]) \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

この最大化問題の未知変数は残留応力 σ_{ij}^R と荷重係数 α である。

問題 (8) から Lagrange 関数を定義し、Karush-Khun-Tucker 条件 (以下、KKT 条件と呼ぶ) を導出すると、運動学的条件を得る。なお、本論文では問題 (8) に対しては KKT 条件の導出は行わず、次章で示すように、離散化した後に KKT 条件の導出を行う。

3. シェイクダウン解析のアルゴリズム

3.1 問題の離散化

空間離散化については有限要素法を、時間域の離散化については表面力 $t_i(s)$ によって生成される凸領域の頂点の荷重状態を用いて、式 (8) の最適化問題を離散化して表現すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \max_{\sigma, \alpha} \alpha \\ & \text{sub. to } \begin{cases} B^T \sigma = 0 \\ f(\alpha \sigma_q^E + \sigma_0^E + \sigma) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 σ は残留応力 σ_{ij}^R を空間に関して離散化したベクトルとする。以後、変数として解くべき応力は残留応力だけなので、ベクトル表記するときには簡単のため上付き添字 R を省略して記すこととする。 σ_p^E は表面力 $t_i(s)$ に対する弾性応力 $\sigma_{ij}^E(s)$ を空間と時間に関して離散化したベクトルである。 σ_0^E は物体力 g_i に対する弾性応力 $\sigma_{0,ij}^E$ を空間に関して離散化したベクトルである。これらの残留応力 σ 、および弾性応力 σ_p^E, σ_0^E はガウスポイントにおいて離散化する。 B は力のつりあい関係を表す行列である。荷重パターン p に対するガウスポイント q での降伏関数値を $f_{pq} = f_q(\alpha \sigma_p^E + \sigma_0^E + \sigma)$ と表し、それを次のように並べたベクトルを f とする。

$$f^T = [f_{11} \cdots f_{n1} \cdots f_{1m} \cdots f_{nm}] \quad (10)$$

荷重パターンの集合を N 、ガウスポイントの集合を M とする。式 (10) 中の n, m はそれぞれ集合 N, M の元の数である。なお、ベクトルの不等式は、それぞれの要素に対して成立することを表している。つまり、 $f_{pq} \leq 0$ は任意の p, q に対して $f_{pq} \leq 0$ を表している。

3.2 解の探索方向の計算法

問題 (9) に対する Lagrange 関数は Lagrange 乗数 $u, \lambda (\geq 0)$ を用いて次のように定義できる.

$$L(\sigma, \alpha, u, \lambda) = -\alpha - u^T B^T \sigma + \lambda^T f \quad (11)$$

Lagrange 乗数 u の要素数は節点変位の自由度に等しく, Lagrange 乗数 λ の要素数は $n \times m$ である. ベクトル λ の要素は, 式 (10) のベクトル f の要素と対応するように, 次のように並べる.

$$\lambda^T = [\lambda_{11} \cdots \lambda_{n1} \cdots \lambda_{1m} \cdots \lambda_{nm}] \quad (12)$$

Lagrange 関数 (11) から得られる KKT 条件は

$$\nabla_{\sigma} L = -Bu + G^T \lambda = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -1 + g^T \lambda = 0 \quad (14)$$

$$B^T \sigma = 0 \quad (15)$$

$$\Lambda f = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad f \leq 0 \quad (16)$$

である. ここで, ∇_{σ} は残留応力 σ に関する勾配を意味している. Λ はベクトル λ の要素を対角に並べた対角行列である. G は次式で表される行列である.

$$G^T = [\nabla_{\sigma} f_{11} \cdots \nabla_{\sigma} f_{n1} \cdots \nabla_{\sigma} f_{1m} \cdots \nabla_{\sigma} f_{nm}] \quad (17)$$

g は次のように表されるベクトルである.

$$g^T = \left[\frac{\partial f_{11}}{\partial \alpha} \cdots \frac{\partial f_{n1}}{\partial \alpha} \cdots \frac{\partial f_{1m}}{\partial \alpha} \cdots \frac{\partial f_{nm}}{\partial \alpha} \right] \quad (18)$$

ここで得られた KKT 条件 (13), (15) は運動学的条件である. 静力学的条件と運動学的条件の数理構造については小林らの論文⁵⁾に詳しい.

式 (13)–(16) は未知変数 $(\sigma, \alpha, u, \lambda)$ に関して非線形であるため, Newton-Raphson 法を用いて解を求める. 反復計算で解くときの k 回目における点を $(\sigma^k, \alpha^k, u^k, \lambda^k)$ とし, 解の探索方向のベクトルを $(\Delta \sigma^{k+1}, \Delta \alpha^{k+1}, \Delta u^{k+1}, \Delta \lambda^{k+1})$ とする. このとき, k 回目の反復計算における式 (13)–(16) を 1 次の増分の項まで Taylor 展開するとそれぞれ次のようになる.

$$H \Delta \sigma^{k+1} + h \Delta \alpha^{k+1} - B(u^k + \Delta u^{k+1}) + G^T(\lambda^k + \Delta \lambda^{k+1}) = 0 \quad (19)$$

$$h^T \Delta \sigma^{k+1} + \bar{h} \Delta \alpha^{k+1} + g^T(\lambda^k + \Delta \lambda^{k+1}) = 1 \quad (20)$$

$$-B^T \Delta \sigma^{k+1} = B^T \sigma^k \quad (21)$$

$$\Lambda^k G \Delta \sigma^{k+1} + \Lambda^k g \Delta \alpha^{k+1} + (\Lambda^k + \Delta \Lambda^{k+1}) f = 0 \quad (22)$$

ここで, H は次式で表される行列である.

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_m \end{bmatrix}, \quad H_q = \sum_{p \in \mathcal{N}} \lambda_{ij} \nabla_{\sigma}^2 f_{ij} \quad (23)$$

また, ベクトル h , およびスカラー $\bar{h}$ は次のように表される.

$$h = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{Bmatrix}, \quad h_q = \sum_{p \in \mathcal{N}} \lambda_{pq} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla_{\sigma} f_{pq} \quad (24)$$

$$\bar{h} = \sum_{p \in \mathcal{N}} \sum_{q \in \mathcal{M}} \lambda_{pq} \frac{\partial^2 f_{pq}}{\partial \alpha^2} \quad (25)$$

既往の研究⁵⁾では, 式 (19)–(22) を連立させて, 残留応力 σ , 荷重係数 α , Lagrange 乗数 u, λ の増分を同時に解くような定式化を行っている. しかし, 本研究では $\Delta u^{k+1}, \Delta \lambda^{k+1}$ が, 式 (19)–(22) においてそれぞれ u^k, λ^k との和で表されていることに着目して, Lagrange 乗数 u, λ については, 増分量 $\Delta u^k, \Delta \lambda^k$ を解くのではなく, 更新された量 u^{k+1}, λ^{k+1} を直接解くアルゴリズムを示す.

つまり, $u^k, \Delta u^{k+1}$ および $\lambda, \Delta \lambda^{k+1}$ を次のように u^{k+1}, λ^{k+1} とおく.

$$u^{k+1} = u^k + \Delta u^{k+1} \quad (26)$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta \lambda^{k+1} \quad (27)$$

また, 式 (22) に Λ^k の逆行列を乗じる. すると, 式 (19), (20), (21), (22) から次式で表される解の更新式を得る.

$$H \Delta \sigma^{k+1} + h \Delta \alpha^{k+1} - B u^{k+1} + G^T \lambda^{k+1} = 0 \quad (28)$$

$$h^T \Delta \sigma^{k+1} + \bar{h} \Delta \alpha^{k+1} + g^T \lambda^{k+1} = 1 \quad (29)$$

$$-B^T \Delta \sigma^{k+1} = B^T \sigma^k \quad (30)$$

$$G \Delta \sigma^{k+1} + g \Delta \alpha^{k+1} + F \lambda^{k+1} = 0 \quad (31)$$

ここで, F は f_{pq}/λ_{pq}^k を対角に並べた対角行列である. 式 (28)–(31) を未知変数 $(\Delta \sigma^{k+1}, \Delta \alpha^{k+1}, u^{k+1}, \lambda^{k+1})$ について解くと解の探索方向が得られる. 未知変数の係数, および右辺ベクトルはすべて k 回目の反復計算で得られる値である. これ以降, 誤解の恐れがない場合は複雑さを避けるため, 上付き添字 k および $k+1$ を省略する.

4. 準 Newton 法を用いたアルゴリズム

4.1 解くべき線形方程式のサイズ縮小に用いるテクニック

式 (28)–(31) を同時に連立して解こうとすると未知変数の数が多いため, 計算コストが大きくなる. 特に未知変数 λ_{pq} は荷重パターンの数に比例するため, 荷重パターンが多い問題では未知変数が膨大な数となる. そこで, 解くべき線形方程式のサイズを縮小する.

なお, 線形方程式のサイズを縮小するにあたり, 以下の工夫をする.

- 解くべき方程式に表れる行列の正定値性を確保するために、 $f_{pq} < 0$ かつ $\lambda_{pq} > 0$ となるよう解を更新する。なお、この $\lambda_{pq} > 0$ の制約により常に $\lambda_{pq} \neq 0$ であるため、 Λ^k が正方行列となり、式 (22) に Λ^k の逆行列を乗ずることができる。(本章 4.3 節に詳述)
- 行列 H を準 Newton 法を用いて正定値行列 $\bar{H}$ に近似する。つまり、式 (28) の代わりに次式

$$\bar{H}\Delta\sigma + h\Delta\alpha - Bu + G^T\lambda = 0 \quad (32)$$

を用いる。正定値行列 $\bar{H}$ を用いることで、その逆行列 $\bar{H}^{-1}$ が得られる。(本節 4.5 項に詳述)

また、解の収束性を改善させるため、式 (31) の右辺に修正ベクトル $-\theta$ ($\theta_q \geq 0$) を加える工夫をする。つまり、式 (31) の代わりに次式

$$G\Delta\sigma + g\Delta\alpha + F\lambda = -\theta \quad (33)$$

を用いる。修正ベクトルを考えないときは $\theta = 0$ とする。(5. 章に詳述)

4.2 解の探索方向の計算

式 (32), (33) より $\Delta\sigma, \lambda$ をそれぞれ $\Delta\alpha, u$ を用いて次のように表すことができる。

$$\Delta\sigma = D(Bu - h\Delta\alpha) - P^T(\Delta\alpha g + \theta) \quad (34)$$

$$\lambda = P(Bu - h\Delta\alpha) + W^{-1}(\Delta\alpha g + \theta) \quad (35)$$

行列 P, W, D はそれぞれ

$$P = W^{-1}G\bar{H}^{-1} \quad (36)$$

$$W = G\bar{H}^{-1}G^T - F \quad (37)$$

$$D = \bar{H}^{-1} - \bar{H}^{-1}G^TW^{-1}G\bar{H}^{-1} \quad (38)$$

である。行列 $\bar{H}$ は正定値行列であるため、逆行列 $\bar{H}^{-1}$ が存在する。行列 $\bar{H}$ は式 (23) と同じ形をしており、行列 $\bar{H}$ 内の対角に並ぶサイズの小さなガウスポイントごとの正方行列 $\bar{H}_q$ の逆行列 $\bar{H}_q^{-1}$ を求め、それを対角に並べれば $\bar{H}$ の逆行列が得られる。行列 W は $f_{pq} < 0$ かつ $\lambda_{pq} > 0$ であれば正定値行列であり、逆行列を持つ(付録 I の証明参照)。なお、 D も同様に $f_{pq} < 0$ かつ $\lambda_{pq} > 0$ であれば正定値行列となる(付録 I の証明参照。)

行列 W は次式で示すようにガウスポイントの正方行列 W_q が対角に並ぶ行列である。

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & & & \\ & W_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & W_m \end{bmatrix} \quad (39)$$

行列 W_q のサイズは荷重パターンの数 n と同じである。そのため、 n の値が大きいと W_q^{-1} の計算コストが増大する。例えば、次章で示すような両端固定ばりの 1 次元問題では、荷重パターン数 n が「解くべき方程式」

のサイズと同じオーダーとなり、 W_q^{-1} の計算に大きな計算時間を費すことになる。しかし、通常取り扱う 2 次元あるいは 3 次元問題では、荷重パターン数 n は他の未知数と比べれば十分に小さいため、実際の問題に適用する場合は計算コストはわずかなものとなる。

式 (30) に式 (34) を代入すると次式を得る。

$$Ku - \Delta\alpha k = B^T(P^T\theta - \sigma) \quad (40)$$

を得る。ここで、

$$K = B^TDB \quad (41)$$

$$k = B^TDh + B^TP^Tg \quad (42)$$

である。この行列 K はバンド型の対称正定値行列となる。この式を u について解くと

$$u = \Delta\alpha u_1 + u_2 \quad (43)$$

である。ここで、ベクトル u_1, u_2 はそれぞれ

$$u_1 = K^{-1}k \quad (44)$$

$$u_2 = K^{-1}B^T(P^T\theta - \sigma) \quad (45)$$

である。行列 K のサイズは Lagrange 乗数 u の自由度、つまり節点変位の自由度と等しい。式 (44), (45) の 2 式がシェイクダウン解析における「解くべき線形方程式」である。

なお、式 (44), (45) の右辺は Lagrange 乗数 u によらず決まる。つまり、 $k+1$ 回目の計算で u^{k+1} を求めるために、 k 回目の計算で求めた u^k の情報を必要としない。

式 (29) に式 (34), (35) を代入すると次式を得る。

$$-k^Tu + \bar{k}\Delta\alpha = g^TW^{-1}\theta - h^TP^T\theta - 1 \quad (46)$$

ここでスカラー $\bar{k}$ は

$$\bar{k} = 2h^TP^Tg + h^TDh - g^TW^{-1}g - \bar{h} \quad (47)$$

である。結局、 $\Delta\alpha$ は式 (43), (46) から次のようになる。

$$\Delta\alpha = \frac{-k^Tu_2 - g^TW^{-1}\theta + h^TP^T\theta + 1}{k^Tu_1 - \bar{k}} \quad (48)$$

解の更新方法は以下の通りとなる。まず、式 (44), (45) を解いて得た u_1, u_2 を式 (48) に代入し $\Delta\alpha$ を得る。そして、 u_1, u_2 および $\Delta\alpha$ を式 (43) に代入し u を得る。さらに、 $\Delta\alpha$ と u を式 (34), (35) に代入し $\Delta\sigma, \lambda$ を求める。このように解の探索方向 $(\Delta\sigma, \Delta\alpha, u, \lambda)$ を計算した後、解の更新を行う。

本研究で示した「解くべき線形方程式」は、バンド型対称正定値行列であり、そのサイズは「節点変位の自由度」であった。一方、既往の混合型シェイクダウン解析⁵⁾における「解くべき線形方程式」の行列は、バンド型でも正定値でもない疎行列であり、また、そのサイズは「節点変位の自由度 + 応力の総数 (2 次元の場合、ガウスポイントの数 $\times 3$) + 1」である。そのため、本研究のアルゴリズムを用いると、既往の研究よりも計算時間の短縮が見込める。

4.3 解の更新方法の評価

行列 K の正定値性を確保するためには、十分条件として更新した解が $f_{pq} < 0, \lambda_{pq} > 0$ を満たす必要がある。したがって、残留応力の増分 $\Delta\sigma$ と荷重係数の増分 $\Delta\alpha$ を探索方向として、あらゆる位置 i においてあらゆる荷重パターン j に対する降伏関数値 f_{pq} が負であるように解を更新する必要がある。ここで降伏関数が凸であることに注意すると、1 次の Taylor 展開による近似方程式で得られた増分を直接用いると、上記の十分条件を満足できないおそれがある。そこで、1 よりも小さい正の緩和係数 s を導入して、すべての p, q について次式を満足するように解を更新する。

$$\begin{aligned} f_q(\alpha^{k+1}\sigma_p^E + \sigma_0^E + \sigma^{k+1}) = \\ f_q((\alpha^k + s\Delta\alpha^{k+1})\sigma_p^E + \sigma_0^E + \sigma^k + s\Delta\sigma^{k+1}) < 0 \\ (p \in \mathcal{N}, q \in \mathcal{M}) \end{aligned} \quad (49)$$

実際の計算に用いる緩和係数 s としては、式 (49) を満足する最大の緩和係数 $s_{\max}$ から、わずかに小さいものを選べば、行列 K の正定値性を保持できるので数値的な不安定性を避けられ、かつ収束に至る反復計算の回数を減らせるとされる⁶⁾。具体的には、Regula-Falsi 法（はさみ打ち法）や secant 法を用いて求めた $s_{\max}$ に 1 よりわずかに小さい正のパラメータ β を乗じた値 $\beta s_{\max}$ を緩和係数として用いる。ただし、 $\beta s_{\max}$ が 1 を超える場合は緩和係数を 1 とする（緩和しない）。つまり、緩和係数は、

$$s = \min(1, \beta s_{\max}) \quad (50)$$

のように求める。パラメータ β の値は数値実験によって適切な数値を選ぶ必要があり、本研究では $\beta = 0.9$ を用いた。

このようにして選んだ緩和係数 s を用いて残留応力 σ と荷重係数 α を以下のように更新する。

$$\sigma^{k+1} \leftarrow \sigma^k + s\Delta\sigma^{k+1} \quad (51)$$

$$\alpha^{k+1} \leftarrow \alpha^k + s\Delta\alpha^{k+1} \quad (52)$$

Lagrange 乗数 λ_{pq} についても、同様に非負性を満足するように更新を行う必要がある。ただし反復計算過程で急速にゼロに近付くと、反復計算過程に含まれる逆数 $1/\lambda_{pq}$ が数値解析上悪影響を及ぼす可能性があるため、次式のように緩やかな更新を行う。

$$\lambda_{pq}^{k+1} \leftarrow \max(\lambda_{pq}^{k+1}, \gamma\lambda_{pq}^k) \quad (53)$$

ここに γ は 1 よりも小さな正の数であり、本研究では $\gamma = 0.2$ を用いた。

Lagrange 乗数 u には制約がないので、 u^{k+1} をそのまま解として用いる。

$$u^{k+1} \leftarrow u^{k+1} \quad (54)$$

なお、式 (50) の β 、および式 (53) の γ の値は、簡単な数値計算を数ケース行って最も収束が早くなる β, γ

の組み合わせから決定した。ただし、問題によっては収束のよい β, γ の値も変わると考えられるので、さらなる検討が必要である。

4.4 反復計算に用いる初期仮定解の選びかた

初期値は降伏関数が負 ($f_{pq} < 0$)、ラグランジュ乗数 λ_{pq} が正 ($\lambda_{pq} > 0$) となるよう選ぶ。残留応力 σ はつりあい式 (15) を満足する必要はないため、 $f_{pq} < 0$ となるような値を初期値とすればよい。例えば、 $f_q(0) < 0$ が成り立つ場合、残留応力 σ として

$$\sigma = -(\alpha\sigma_p^E + \sigma_0^E) \quad (55)$$

とすれば、 $f_{pq} < 0$ を満足する。Lagrange 乗数 λ_{pq} の初期値は $\lambda_{pq} > 0$ なる値を選べばよい。Lagrange 乗数 u の初期値は、一連の計算過程の中で用いないので、与える必要はない。

4.5 準 Newton 法による行列の近似

本節 4.1 項では、サイズ縮小のために行列 H を正定値行列 $\bar{H}$ に近似した。ここでは、その近似する方法を説明する。

行列 H が半正定値であれば、対角成分に微小な正の値 ν を加えることで、容易に正定値性が保証される⁷⁾。

$$\bar{H} = \sum_{p \in \mathcal{N}} \sum_{q \in \mathcal{M}} \lambda_{pq} \nabla_{\sigma}^2 f_{pq} + \nu \mathbf{1} \quad (56)$$

ここで、 $\mathbf{1}$ は単位行列である。 ν は、行列 H の要素の最大値に計算が発散しない程度の小さな数（例えば 10^{-5} など）を乗じた値である。例えば、降伏関数として Mohr-Coulomb の破壊基準を用いる場合、 H は半正定値となるため、式 (56) によって正定値行列に近似できる。

また、Powell の修正 BFGS 公式⁸⁾を用いて、正定値性を確保することもできる。この手法では行列 H が半正定値である必要はない。Powell の修正 BFGS 公式を行列 H に対して適用すると、 k 回目の反復計算に用いた $\bar{H}^k$ を用いて $k+1$ 回目の反復計算に用いる $\bar{H}^{k+1}$ を次の形で得ることができる。

$$\bar{H}^{k+1} = \bar{H}^k - \frac{\bar{H}^k s^k s^{kT} \bar{H}^k}{s^{kT} \bar{H}^k s^k} + \frac{z^k z^{kT}}{s^{kT} z^k} \quad (57)$$

ここで、

$$s^k = \sigma^{k+1} - \sigma^k \quad (58)$$

$$z^k = \psi y^k + (1 - \psi) \bar{H}^k s^k \quad (59)$$

$$y^k = \sum_{q \in \mathcal{M}} \lambda_{pq}^{k+1} \nabla f_q(\sigma^{k+1}) - \sum_{q \in \mathcal{M}} \lambda_{pq}^{k+1} \nabla f_q(\sigma^k) \quad (60)$$

$$\psi = \begin{cases} 1 & \text{when } (s^{kT} y^k \geq \omega s^{kT} \bar{H}^k s^k) \\ \frac{(1 - \omega) s^{kT} \bar{H}^k s^k}{s^{kT} (\bar{H}^k s^k - y^k)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (61)$$

である。パラメータ ω は $\omega = 0.1$ または $\omega = 0.2$ とおく。

Powell の修正 BFGS 公式では、行列 $\bar{H}^k$ が正定値であれば、式 (57) で得られる行列 $\bar{H}^{k+1}$ の正定性が保証される。つまり、 $\bar{H}^k$ の初期値 $\bar{H}^0$ を単位行列とすれば ($\bar{H}^0 = 1$)、 $\bar{H}^k$ は正定値となる。

しかしながら、理論的には $\bar{H}^k$ が正定値であっても、計算を繰り返すうちに $\bar{H}^k$ の最小の固有値が 0 に近付き、数値解析では正定値行列が持つ良性 (well-posedness) が失われ、不安定になる場合がある。その場合は、数値解析のテクニックとして式 (56) と同様に微小な正の数 ν を対角成分に加えたものを $\bar{H}$ として用いる。

$$\bar{H}^k \leftarrow \bar{H}^k + \nu 1 \quad (62)$$

5. 解の探索方向の修正

解の更新を繰り返すと正解に近付くが、ときとして解の更新に用いる緩和係数 s (式 (49)) が 0 に近い値をとり、解の更新が滞ることがある。本節では、その理由を以下で説明し、さらにその解決法を提案する。

5.1 収束の悪化する理由

残留応力 σ および荷重係数 α が降伏曲面に近い点をとり、Lagrange 乗数 λ_{pq} が 0 に近い値をとらないとき、つまり、 $f_{pq} \simeq 0$ 、かつ $\lambda_{pq} \gg 0$ のとき、式 (22) の各成分は、次式のようになる。

$$(\nabla_{\sigma} f_{pq})^T \Delta \sigma^{k+1} + \frac{\partial f_{pq}}{\partial \alpha} \Delta \alpha^{k+1} \simeq 0 \quad (63)$$

となる。ここで、次のように σ と α をまとめて x とおく。

$$x = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad (64)$$

そして、さらに $\bar{f}_q(x)$ を次のように定義する。

$$\bar{f}_{pq}(x) \equiv f_q(\alpha \sigma_p^E + \sigma_0^E + \sigma) \quad (65)$$

すると、式 (63) は次のように表される。

$$(\nabla_x \bar{f}_q(x^k))^T \Delta x^{k+1} \simeq 0 \quad (66)$$

ここで、 ∇_x は変数 x に関する勾配である。式 (66) は、 $\nabla_x \bar{f}_{pq}$ と Δx がほぼ直交していることを意味している。そのため、図-2 に示すように解の探索方向 Δx は降伏曲面を超えて外側へ出ることがある。このような場合、降伏関数の値は常に負であるという制約式 (49) があるため緩和係数 s は小さな値を取り、反復計算において解にいたるまでの収束が緩慢になったり、停滞したりすることがある。

5.2 探索方向の修正方法

降伏曲面の法線方向と解の探索方向が直交した場合、図-3 に示すように探索方向が降伏曲面内を向くように

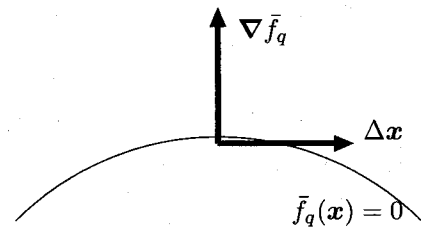


図-2 降伏曲面の法線方向と解の探索方向

修正を加え、収束性の改善をはかる。その方法の流れは次の通りである。まず、3.2 節で $\theta = 0$ として解の探索方向 $\Delta x'$ を計算する (1 段階目)。この第 1 段階の計算で得られた解の探索方向 $\Delta x'$ を用いて、修正ベクトル θ を計算し、新たな解の探索方向 $\Delta x''$ を求める計算を行う (2 段階目)。

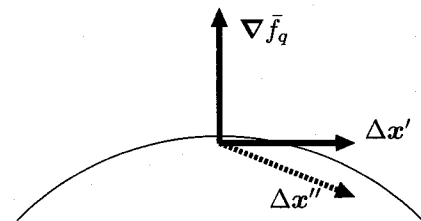


図-3 解の探索方向の修正

さて、以下では修正ベクトル θ の導出法について述べる。式 (16) から式 (22) を導出する際、2 次以降の増分は無視して考えた。式 (16) の Taylor 展開で 2 次の増分まで考えると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} & \lambda_{pq}^{k+1} \bar{f}_q(x^k) + \lambda_{pq}^k (\nabla \bar{f}_q(x^k))^T \Delta x^{k+1} \\ & + \Delta \lambda_{pq}^{k+1} (\nabla \bar{f}_q(x^k))^T \Delta x^{k+1} \\ & + \lambda_{pq}^k \Delta x^{k+1 T} (\nabla^2 \bar{f}_q(x^k)) \Delta x^{k+1} = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

$\Delta \lambda_{pq}^{k+1}$ が微小であることと式 (66) より、式 (67) 左辺第 3 項は 2 次の増分よりも微小となる。そのため、第 3 項は無視できる。ここで、第 4 項の Δx^{k+1} に第 1 段階で得た既知数 $\Delta x'$ を代入し、第 1, 2 項の Δx^{k+1} を未知変数 $\Delta x''$ とする。そして、その式を λ_{pq}^k で除すと、新たに次の $\Delta x''$ 、 λ_{pq}^{k+1} に関する次の線形方程式が得られる。

$$\lambda_{pq}^{k+1} \frac{\bar{f}_q(x^k)}{\lambda_{pq}^k} + (\nabla \bar{f}_q(x^k))^T \Delta x'' = -\theta_q^k \quad (68)$$

ここで

$$\theta_q^k = \Delta x'^T (\nabla^2 \bar{f}_q(x^k)) \Delta x' \quad (69)$$

である。以後、4.2 節の計算を再度行う。

この修正法を幾何学的に説明する。いま、 $\bar{f}_q(x) \simeq 0$ であるので、式 (68) は

$$(\nabla \bar{f}_q(x^k))^T \Delta x'' \simeq -\theta_q^k \quad (70)$$

となる。式(70)より、 θ_q^k が正の数であれば、 $\nabla \bar{f}_q(x^k)$ と $\Delta x''$ のなす角が鈍角となり、図-3に示すように解の探索方向が降伏曲面の内側を向く。 $\nabla^2 \bar{f}_q(x^k)$ が正定値行列であればよい。 θ_q^k は正となる。 $\nabla^2 \bar{f}_q(x^k)$ が正定値行列でない場合は、3.2節4.5項で示したように準Newton法によって $\nabla^2 \bar{f}_q(x^k)$ を近似した正定値行列を用いると、 θ_q^k は正となる。

なお、探索方向に修正を加えるのは、降伏関数が0に近い値をとるときのみを考える。降伏関数が0に近い値をとらないときは、探索方向を修正する必要はないため、その点 j では修正ベクトルの項を $\theta_q^k = 0$ として計算を行う。

探索方向の修正は、第1段階と第2段階で2回の計算を行う必要がある。この2つの計算において、解くべき方程式の行列はともに式(41)で表される K である。この行列 K は修正ベクトル θ によらない。そのため、例えば、1段階目で K をCholesky分解して保存しておくと、2段階目の計算量はわずかで済む。

なお、小林らの手法⁵⁾におけるバリアパラメータは、本論文で示した修正ベクトルに相当する。小林らはこの修正ベクトルを θ_q^k を j によらず一定($\theta_q^k = \theta_0^k$)として計算を行っている。ここで示した手法はそれぞれの j に対して修正ベクトルの値を選択しているため、効率的に収束する。

6. 数値解析例

6.1 片持ちばりの数値解析例

(1) 片持ちばりの問題設定

前節で示した定式化、およびアルゴリズムの妥当性を検証するため、構造力学によって理論解の知られている問題を解く。図-4に示すように、長さ L の両端固定ばりに対してはり全体を移動する集中荷重をかけたときのシェイクダウン限界荷重 P を求める問題を考える。自重は考慮しない。

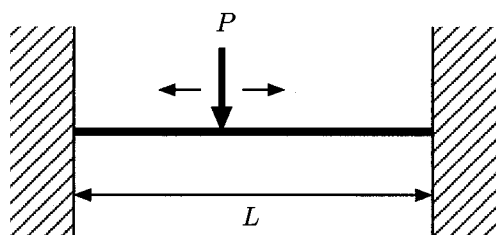


図-4 両端固定ばりの問題

はりばりは要素によって離散化する。簡単のため、軸力は無視し、軸方向の変位速度は生じないと仮定する。

降伏関数は $f(M, Q) = (M - M_c)(M + M_c) \leq 0$ とする。 M_c は限界塑性モーメント荷重である。ビーム

は等間隔に200要素に分割した。節点変位の自由度は固定した両端の制約条件を除くと $396 (= 198 \times 2)$ となる。また、荷重パターンとして両端以外の節点に対する鉛直方向の集中荷重を考える。荷重パターンの数は $n = 99$ となる。ガウスポイントの総数は $m = 200$ となる。ビーム要素を離散化する方法については付録IIを参照されたい。

(2) 数値解析結果

以上の条件の下で数値解析を行った結果、シェイクダウン限界の荷重は $P_n = 7.371 M_c / L$ となった。ここで、 M_c ははりの全塑性モーメントである。この問題の理論解は $P_t = 7.322 M_c / L$ である³⁾。理論値との誤差は $0.0067 (= |P_t - P_n| / P_t)$ であり、よく一致している。このことから本研究で示した定式化、アルゴリズムの妥当性が言える。

ところで、シェイクダウン解析で1つの荷重パターンのみを考えると、極限解析と全く同じ解が得られるはずである。このことを確認するために、はりの中央に準静的な単一の集中荷重を与える問題を解いた。さきほどと同様にシェイクダウン解析のプログラムで、計算した結果、崩壊荷重 $P'_n = 8.040 M_c / L$ を得た。この問題の理論解は $P'_t = 8.000 M_c / L$ である。理論値との誤差は $0.0050 (= |P'_t - P'_n| / P'_t)$ となり、シェイクダウン解析同様よく一致している。

この問題の理論解は載荷点と塑性崩壊する点は一致するが、ここで用いたビーム要素では載荷点と塑性崩壊する点が一致しない(付録II参照)。そのため、理論解と数値解析解との間で誤差が生じている。

(3) 荷重パターンの数 n が多いときの計算コスト

この問題における計算コストについて簡単に述べる。この問題では解くべき線形方程式のサイズは396である。行列 W_q のサイズは99であり、行列 W_q の数200である($j = 1, \dots, 200$)。そのため、逆行列 W^{-1} の計算では、サイズが99の逆行列 W_q^{-1} の計算を200回行う必要がある。すなわち、1回の反復計算において解くべき線形方程式の計算(サイズが398の逆行列の計算を2回行う)よりも W^{-1} の計算の方が大きな計算コストを必要とする。つまり、ここで扱った問題のように荷重パターンの数 n の数が大きいとき、本手法で提案するアルゴリズムでは計算コストは膨大なものとなるという欠点がある。しかし、次項で示すように、2次元問題では荷重パターンの数は節点変位の自由度や要素数と比べると、無視できるほど小さくなるため、特に問題とならない。

6.2 地盤材料の数値解析例

(1) 支持力解析の問題設定

連続体への適用可能性を確認するために半無限領域を仮定した地盤に対して、移動分布荷重を与えたときのシェイクダウン荷重を求める問題を考える。問題は2

次元平面ひずみ状態とし、自重は考慮しない。図-5に示すように、地盤上に载荷幅を一定に保ちながら、移動荷重を加える。载荷幅を B とし、移動量を D とする。

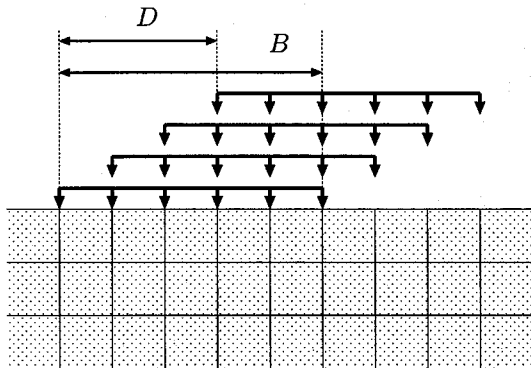


図-5 载荷幅と移動荷重の移動距離

降伏基準として、次に示す von-Mises の降伏関数を採用する。

$$f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} - c \quad (71)$$

簡単のため、粘着力 $c = 1$ 、弾性域のポアソン比 $\nu = 0$ とする。解析に用いた要素メッシュを図-6に示す。変位境界条件は側面をスライダー、底面を固定とした。メッシュは横方向に 30、縦方向に 10 分割した。要素は 4 節点 1 次のアイソパラメトリック要素を用いた。力のつりあい関係を表す行列 B は一般的な有限要素法で使われている B マトリクスから変位境界条件に相当する列を縮約したものである。

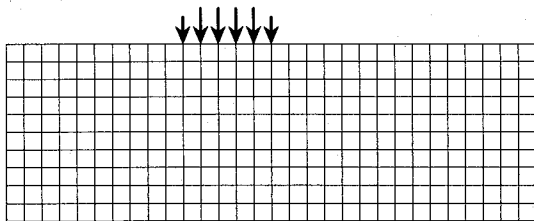


図-6 解析に用いたメッシュと荷重パターン

節点変位の自由度は 600、荷重パターンの数はもっとも多いときで $n = 10$ 、ガウスポイントの総数は $m = 300$ である。解くべき方程式のサイズは、節点変位の自由度と同じく 600 となる。なお、同じ問題を既往の研究⁵⁾で解くと、解くべき方程式のサイズは 1501 となる。これより、本研究のアルゴリズムでは、未知数が大幅に減少することがわかる。

(2) 数値解析結果

図-7に数値解析によって得られた移動荷重 D/B と荷重係数 α の関係を示す。 $D/B = 0$ のときは、荷重パター

ンが 1 つのみとなり、極限解析における支持力問題に相当する。 $D/B = 0$ のときの数値解析解は $q_c = 5.169$ となった。この結果は、支持力問題の理論解 $\pi + 2 (\approx 5.142)$ とよく一致している。移動荷重 D/B が増加するにつれ荷重係数は減少し、移動荷重が $D/B = 1$ より大きくなると荷重係数は一定の値に収束している様子が分かる。図-7の収束の様子は、小林ら⁹⁾によって数値的に求められた解とよく一致している。

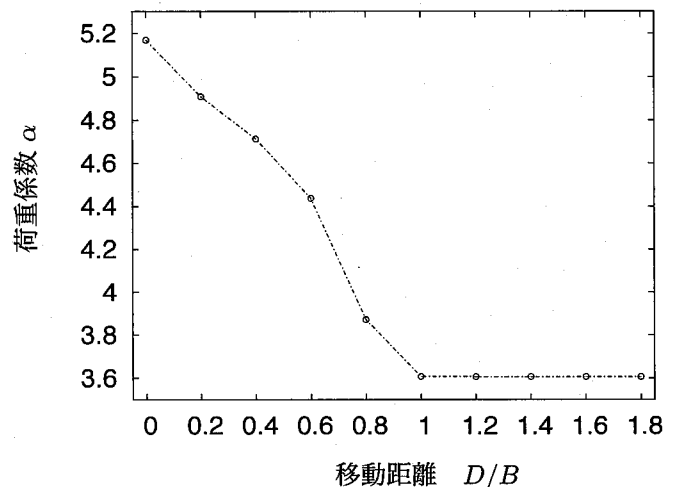


図-7 移動距離と荷重係数の関係

なお、この問題においては 5. 章で示した「解の探索方向の修正」を行わなかった場合、解は収束しなかった。パラメータ β, γ などの値を小さくすることで、収束を緩慢にすることもできるが、その場合は収束にいたる反復計算の回数が増加し、全体の計算時間が増大する。これより、「解の探索方向の修正」を用いた方が収束および計算時間の点で有効であるといえる。

7. おわりに

Melan の定理から制約条件付き最小化問題を作り、得られた問題を反復計算によって解く手法を示した。この手法では解くべき線形方程式のサイズが荷重パターンの数に依存せず、節点速度の自由度と等しくなる。また、解くべき方程式に表れる行列が正定値対称行列となるため、高速な演算が可能となる。さらに、解の収束性を改善する修正ベクトルの計算方法を提案した。

数値解析例として両端固定ばりの問題と支持力解析の問題を解いた。両端固定ばりの問題では数値解析解と理論解が十分な精度で一致した。これより、定式化、アルゴリズムの妥当性が示せた。また、支持力解析を解くことで連続体への適用可能性が示せた。

参考文献

- 1) Kamenjarzh, J. A.: *Limit Analysis of Solids and Structures*, CRC Press, 1996.
- 2) Martin, J.: *Plasticity*, MIT Press, 1975.
- 3) König, J. A.: *Shakedown of Elastic-Plastic Structures*, Elsevier, 1987.
- 4) Maier, G.: On some issues in shakedown analysis, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, pp. 799-807, 2001.
- 5) 小林俊一, 西川雅規, 田村武: 混合型シェイクダウン解析法のアルゴリズムに関する研究, 応用力学論文集, Vol. 7, pp. 561-570, 2004.
- 6) 福島雅夫: 数値計画入門, 朝倉書店, 1996.
- 7) Fletcher, R.: *Practical Methods of Optimization*, 2nd edition, John Wiley & Sons, 2000.
- 8) Powell, M. J. D.: A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 630 (Watson, G. A.(ed.)), Springer-Verlag, pp. 144-157, 1978.
- 9) 小林俊一, 西川雅規, 田村武: 移動荷重を受ける $c-\phi$ 材料の支持力特性に関するシェイクダウン解析, 応用力学論文集, Vol. 9, pp. 479-489, 2006.

付録 I 凸性に関する議論

$f_{pq} < 0, \lambda_{pq} > 0$ のときに, 式 (37), (38) の行列 K, D がともに正定値行列であることを証明する.

I.1 行列 W の正定値性

まず, W が対称正定値行列であることを証明する. 式 (37) より W の対称性は明らかである. 以下で行列 W の正定値性を証明する. 行列 $\bar{H}$ が正定値行列であるため, 任意の y に対して

$$y^T G \bar{H}^{-1} G^T y \geq 0 \quad (I.1)$$

が成り立つ. また, 行列 F は負の数 f_{pq}/λ_{pq} からなる対角行列であるため

$$-y^T F y > 0 \quad (I.2)$$

が成り立つ. 式 (I.1), (I.2) より次式がいえる.

$$y^T W y = y^T (G \bar{H}^{-1} G^T - F) y > 0 \quad (I.3)$$

y は任意のベクトルであるので, W は正定値行列であることがいえる.

I.2 行列 D の正定値性

D が対称正定値行列であることを証明する. 式 (38) より D の対称性は明らかである. 以下で行列 D の正定値性を証明する. D を

$$D = \bar{H}^{-\frac{1}{2}} \bar{D} \bar{H}^{-\frac{1}{2}} \quad (I.4)$$

とおく. ここで, $\bar{D}$ は

$$\bar{D} = 1 - \bar{H}^{-\frac{1}{2}} G^T W^{-1} G \bar{H}^{-\frac{1}{2}} \quad (I.5)$$

である. $\bar{H}$ が正定値行列であるので $\bar{H}^{-\frac{1}{2}}$ も正定値行列である. つまり, D が正定値であることをいうため

には, $\bar{D}$ が正定値であることをいえばよい. $\bar{D}$ の固有値を μ , 固有ベクトルを y とすると,

$$\bar{D} y = \mu y \quad (I.6)$$

である. 式 (I.6) に左から $G \bar{H}^{-\frac{1}{2}}$ をかけ, 式 (37) の関係を用いて, さらに $W^{-1} G \bar{H}^{-\frac{1}{2}} y = z$ とおくと,

$$-F z = \mu W z \quad (I.7)$$

を得る. これは $-F$ と W の一般化固有値問題である. $-F$ と W はともに正定値であるので, $\bar{D}$ の固有値 μ は正となる. よって $\bar{D}$ は正定値行列となり, それゆえ D も正定値行列である.

付録 II ビーム要素の構成式と弾性応力

II.1 ビーム要素の力のつりあい式

図-8 に示すようなビーム要素を考える. ビーム要素に作用する外力は曲げモーメント荷重 T , 鉛直荷重 G であり, 内力は曲げモーメント M , せん断力 Q である. ビーム要素の長さを l とすると, このビーム要素 1 つの力のつりあい式は次のようになる.

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ G_1 \\ T_2 \\ G_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \\ -1 & l/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix} \quad (II.1)$$

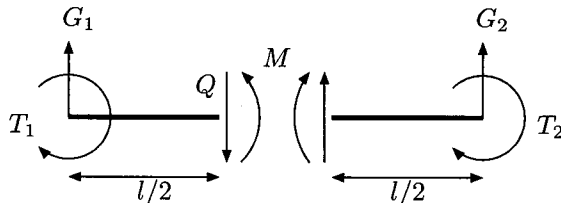


図-8 ビーム要素の力のつりあい関係

ビーム要素のつりあい式 (II.1) を系全体でまとめると, 次に示す系全体の力のつりあい式を得る.

$$t = B^T \sigma \quad (II.2)$$

t は曲げモーメント荷重 T , 鉛直荷重 G をまとめたものであり, σ は曲げモーメント M , せん断力 Q をまとめたものである. B はつりあい式 (II.1) の行列を重ねあわせて作られた行列である. ただし, 曲げ方向や鉛直方向に制約がある場合は, その節点に対応する列を除いて行列を縮約する.

なお, ここで示した離散化の方法では, 図-8 に示すように載荷点が節点 (ビーム要素の両端) にあり, 塑性崩壊する点のはり要素の中央にある. つまり, 載荷点で塑性崩壊することはない. そのため, 載荷点で塑性崩壊するような問題に対して, このビーム要素を用いると, 得られる数値解析解に多少の誤差が生じること

があるため、注意が必要である。ただし、この離散化による誤差は要素分割を細かくすると十分小さくなる。

II.2 弾性定数の導出

シェイクダウン解析は弾性解の計算を要求するため、構成関係式が必要となる。以下では弾性変形の構成関係を導出する。ビーム要素の右側と左側のなす相対的な角度(相対たわみ角)を ψ^E とし、右側と左側の相対的な鉛直変位(相対鉛直変位)を s^E とする(図-9)。このはりの問題においては、曲げモーメント M^E 、せん断力 Q^E と相対たわみ角 ψ^E 、相対鉛直変位 s^E のなす関係が構成関係である。

はり理論では、曲げ変形のみを考えせん断方向の変形は考えない。そのため、相対鉛直変位 s^E はせん断力 Q^E によらず $s^E = 0$ となる。曲げモーメント M^E は相対たわみ角 ψ^E を用いて $M^E = -(Eh^3/12l)\psi$ と表すことができる。これは次の3つの関係式；ひずみ ε と曲率 $\chi(= -\psi/l)$ の関係式 $\varepsilon = y\chi$ 、曲げモーメントと弾性応力の関係式 $M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma y dy$ 、弾性応力とひずみの関係式 $\sigma = E\varepsilon$ から得られる。ここで、 σ は軸応力、 y ははりの鉛直方向成分、 h ははりの高さである。

結局、曲げモーメント M^E 、せん断力 Q^E と相対たわみ角 ψ^E 、相対鉛直変位 s^E の構成関係は次のように

なる。

$$\begin{Bmatrix} M^E \\ Q^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Eh^3}{12l} & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi^E \\ s^E \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

ここで、 R は理論的には無限大($R = \infty$)であるが、数値解析では R には充分大きい値を入れて計算を行う。

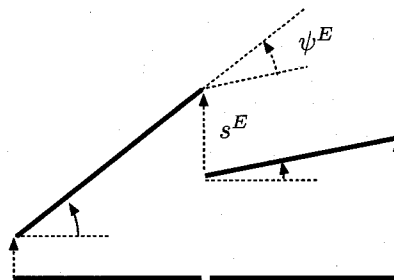


図-9 ビーム要素の適合条件

(2007年4月12日 受付)