

応力と剛体変位を未知数とする HPM による材料非線形解析

Material Nonlinear Analysis by HPM with Stress and Rigid Displacement in Unknown Parameter

竹内 則雄*・見原 理一**

Norio TAKEUCHI and Riichi MIHARA

* 正会員 工博 法政大学教授, 工学部システムデザイン学科 (〒102-8160 東京都千代田区富士見 2-17-1)

** 正会員 工修 法政大学大学院 システムデザイン研究科 (〒102-8160 東京都千代田区富士見 2-17-1)

In the existing HPM (Hybrid-type Penalty Method), independent rigid-body displacement, rotation, and the strain are set as the unknown parameter of the displacement field for each sub-domain. In this paper, we propose the new displacement field which sets the stress as the unknown parameter instead of the strain as a displacement field of HPM. The simple numerical examples show that the accuracy of the solution obtained by this technique is the same as the displacement field which assumes the strain in the unknown parameter. The collapsing load calculated by this method is equivalent to RBSM in the material nonlinear analysis which used surface force using load incremental method.

Key Words: HPM, stress unknown parameter, displacement field, mixed method

1. はじめに

1960年代, Ngoら¹⁾やGoodmanら²⁾によってはじまった解析モデルにおける不連続現象への対応は, Coundall³⁾や川井⁴⁾, Shiら⁵⁾の提案した物理モデルのアプローチを経て, 近年, 様々な手法が提案されるようになってきた^{6),7)}. 著者らが開発したハイブリッド型ペナルティ法(HPM: Hybrid-type penalty method)もその一つであり, 要素境界边上での変位の連続性に関する付帯条件をLagrangeの未定乗数によって変分表示に導入するハイブリッド型の変分原理⁸⁾を基礎としている⁹⁾.

HPMでは解析領域を小さな部分領域に分割し, 部分領域毎に独立な変位場を仮定して, 境界上での変位の連続性をペナルティ関数により近似的に導入する. 著者らによる既往の研究^{9),10)}では, この変位場を表すために部分領域内の任意点における剛体変位とひずみ, 高次要素の場合にはさらにひずみの勾配を未知パラメータに設定している¹¹⁾.

ところで, 固体力学諸問題では, 変位と応力を取り扱うことが多く, ひずみをパラメータとする方法では, 応力は間接的に求められるため, 直接応力が求められると便利である. FEMと異なり, ひずみを未知パラメータに設定するHPMでは, これを変換して応力を未知パラメータに設定することが容易に行える.

そこで, 本論文では, HPMにおける1次あるいは2次の変位場に, 応力とその勾配を未知パラメータに用いる手

法を提案する. また, 提案手法によって得られる解の精度を簡単な数値計算例によって検証する.

2. 支配方程式とハイブリッド型仮想仕事式

(1) 支配方程式

いま, 図-1 に示すように, Ω を n_{dim} 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ の有界領域とし, Γ を Ω の滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ とする. また, Ω に境界を加えてできる閉包を $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ とする. このとき, Ω 内における平衡方程式は次のように与えられる.

$$\operatorname{div} \sigma + f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma = \sigma^t \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

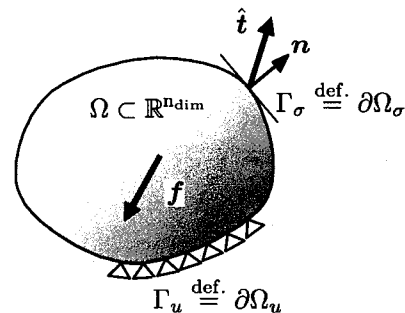


図-1 有界領域 Ω と境界 Γ

ここで, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ は物体力, $\sigma: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}$ は Cauchy 応

力である。ただし、 $\mathbf{S} = \mathbb{R}^{(\text{ndim}+1) \cdot \text{ndim}/2}$ であり、ndim 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{\text{ndim}}$ の基底ベクトルを $\mathbf{e}_i$ とするとき、 $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ である。 $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}}$ は、 $\mathbf{x} \in \Omega$ における変位場で、 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を簡単に $\mathbf{u}$ とする。このとき、微小ひずみは次のように定義される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] \quad (3)$$

ここで、 $\nabla := (\partial/\partial x_i) \mathbf{e}_i$ は微分作用素であり、 ∇^s は ∇ の対称部分を表している。

一方、境界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ は以下の関係にある。

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_\sigma, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset \quad (4)$$

ここで、 $\Gamma_u := \partial_u \Omega \subset \partial \Omega$ は変位が与えられる境界、 $\Gamma_\sigma := \partial_\sigma \Omega \subset \partial \Omega$ は表面力が与えられる境界であり、それぞれ以下のように与えられる。

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{given}) \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{given}) \quad (6)$$

ただし、外向き法線ベクトルが $\mathbf{n}$ で表される物体表面の表面力を $\mathbf{t} := \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ と定義し、 $\hat{\mathbf{n}}$ は境界 Γ_σ に対する法線ベクトルである。

弾性体に対する構成方程式は弾性テンソル $\mathbf{D}$ を用いて次のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

(2) ハイブリッド型仮想仕事式

変位 $\mathbf{u}$ と仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ に課せられる許容関数空間を

$$\mathbf{U} \stackrel{\text{def.}}{=} \{\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}} \mid \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \hat{\mathbf{u}}\} \quad (8)$$

$$\mathbf{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \{\delta \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}} \mid \delta \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0}\} \quad (9)$$

とする。このとき、変位 $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ に関する仮想仕事式が以下のように得られる。

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad (10)$$

これは、 $\mathbf{u}$ を重み関数とすれば、一般的な弱形式である。このとき、 $\mathbf{H}^1(\Omega)$ を Sobolev 空間として、 $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ 、 $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ である。

いま、図-2 に示すように領域 Ω が閉境界 $\Gamma^{(e)} := \partial \Omega^{(e)}$ で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ から構成されているものとする。すなわち、

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \text{ ただし } \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = \emptyset \quad (r \neq q) \quad (11)$$

また、 $\bar{\Omega}^{(e)} := \Omega^{(e)} \cup \partial \Omega^{(e)}$ を $\Omega^{(e)}$ に境界を加えてできる閉

包とする。

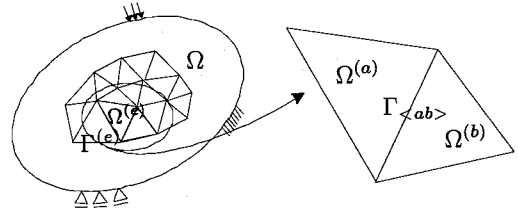


図-2 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$

ハイブリッド型の仮想仕事の原理では、図-2 に示すように、隣接する2つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$ 、すなわち、

$$\Gamma_{<ab>} \stackrel{\text{def.}}{=} \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \quad (12)$$

において、付帯条件

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{<ab>} \quad (13)$$

を Lagrange の未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて、

$$H_{ab} \stackrel{\text{def.}}{=} \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) \, dS \quad (14)$$

と表し、仮想仕事式に導入する。この Lagrange の未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ は、 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力を意味している。また、 $\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}$ ならびに $\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の変位を表しており、 $\delta(\bullet)$ は $(\bullet)$ の変分を表している。

いま、隣接する2つの部分領域境界辺の数を N とすると、ハイブリッド型の仮想仕事式は次のように表すことができる。

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) \, dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS \right) - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) \, dS \right) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad (15)$$

ただし、左辺第3項の $\Gamma^{(e)}$ は Γ_σ において、境界条件式(6)を満たすものとする。

3. 要素毎に独立な変位場

(1) 剛体変位とひずみを未知数とする変位場

変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を部分領域内の任意点 $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p) \in \Omega^{(e)}$ についてテーラー展開し、2次の項までを表示すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(e)} = & \mathbf{u}^p + (x - x_p) \mathbf{u}_{x_p}^p + (y - y_p) \mathbf{u}_{y_p}^p \\ & + \frac{1}{2} (x - x_p)^2 \mathbf{u}_{xx}^p + \frac{1}{2} (y - y_p)^2 \mathbf{u}_{yy}^p \\ & + (x - x_p)(y - y_p) \mathbf{u}_{xy}^p + \cdots \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $(\bullet)^P$ は部分領域内の点 x_P における物理量の値を示しており、また、

$$\begin{aligned}(\bullet)_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\bullet), \quad (\bullet)_y = \frac{\partial}{\partial y}(\bullet), \quad (\bullet)_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\bullet) \\ (\bullet)_{xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bullet), \quad (\bullet)_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\bullet)\end{aligned}$$

一方、 x 方向変位を u 、 y 方向変位を v とすると、ひずみ-変位関係は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}u_x &= \varepsilon_x, \quad u_{xx} = (\varepsilon_x)_x, \quad u_{xy} = (\varepsilon_x)_y \\ v_y &= \varepsilon_y, \quad v_{yy} = (\varepsilon_y)_y, \quad v_{yx} = (\varepsilon_y)_x \\ (v_x - u_y) &= \theta, \quad \frac{1}{2}(u_y + v_x) = \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}(u_y + v_x)_x &= (\gamma_{xy})_x, \quad \frac{1}{2}(u_y + v_x)_y = (\gamma_{xy})_y\end{aligned}$$

これらの関係を用いることによって式(16)はマトリックス形式で次のように表すことができる。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} + \mathbf{N}_g^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{(e)} &= [u^P, v^P, \theta^P]^t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\varepsilon_x^P, \varepsilon_y^P, \gamma_{xy}^P]^t \\ \boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} &= [(\varepsilon_x^P)_x, (\varepsilon_y^P)_x, (\gamma_{xy}^P)_x, (\varepsilon_x^P)_y, (\varepsilon_y^P)_y, (\gamma_{xy}^P)_y]^t \\ \mathbf{N}_d^{(e)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y^{(e)} \\ 0 & 1 & X^{(e)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} &= \begin{bmatrix} X^{(e)} & 0 & Y^{(e)}/2 \\ 0 & Y^{(e)} & X^{(e)}/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_g^{(e)} &= \begin{bmatrix} (X^{(e)})^2/2 & -(Y^{(e)})^2/2 & 0 \\ 0 & X^{(e)}Y^{(e)} & (X^{(e)})^2/2 \\ X^{(e)}Y^{(e)} & 0 & (Y^{(e)})^2/2 \\ -(X^{(e)})^2/2 & (Y^{(e)})^2/2 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}X^{(e)} &= x - x_P \\ Y^{(e)} &= y - y_P\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

であり、 u^P, v^P, θ^P は点 x_P における x および y 方向の剛体変位と剛体回転角、 $(\varepsilon_x^P)_x, (\varepsilon_y^P)_x, (\gamma_{xy}^P)_x$ はひずみの x 方向の勾配、 $(\varepsilon_x^P)_y, (\varepsilon_y^P)_y, (\gamma_{xy}^P)_y$ は y 方向の勾配を表している。

一方、1次の変位場は、ひずみの勾配を無視することにより以下のように表すことができる。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (19)$$

(2) 剛体変位と応力を未知数とする変位場

いま、部分領域 $\Omega^{(e)}$ における構成行列を $\mathbf{D}^{(e)}$ とすると、応力-ひずみ関係は以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = [\sigma_x^P, \sigma_y^P, \tau_{xy}^P]^t$$

ただし、 $\mathbf{D}^{(e)}$ は部分領域内で一定とする。式(20)は、

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{C}^{(e)} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \quad (21)$$

と表すこともできる。ここで、 $\mathbf{C}^{(e)}$ は $\mathbf{D}^{(e)}$ の逆行列である。式(21)の関係を式(19)に代入すれば、応力を未知数とする1次の変位場を定義することができる。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\sigma^{(e)} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \quad (22)$$

ここで、 $\mathbf{N}_\sigma^{(e)}$ は、以下のとおりである。

$$\mathbf{N}_\sigma^{(e)} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \mathbf{C}^{(e)} \quad (23)$$

同様に、式(17)に代入するなら、応力を未知数とする2次の変位場が次のように定義される。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\sigma^{(e)} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \mathbf{N}_{\sigma_x}^{(e)} \boldsymbol{\sigma}_x^{(e)} \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_x^{(e)} = [(\sigma_x^P)_x, (\sigma_y^P)_x, (\tau_{xy}^P)_x, (\sigma_x^P)_y, (\sigma_y^P)_y, (\tau_{xy}^P)_y]^t$$

ここで、 $\mathbf{N}_{\sigma_x}^{(e)}$ は、以下のとおりである。

$$\mathbf{N}_{\sigma_x}^{(e)} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{N}_g^{(e)} \mathbf{C}^{(e)} \quad (25)$$

4. 離散化方程式

式(14)で導入したLagrangeの未定乗数は、物理的には表面力を意味している。いま、境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力 $\lambda_{<ab>}$ と相対変位の関係を以下のように表す。

$$\lambda_{<ab>} = \mathbf{k} \delta_{<ab>} \quad (26)$$

ここで、 $\delta_{<ab>}$ は部分領域境界面 $\Gamma_{<ab>}$ 上の相対変位を表しており、 $\mathbf{k}$ はばね定数に対応する係数行列である。ハイブリッド型の仮想仕事式では、近似的に部分領域境界面上で変位の連続性を確保するため、極めて固いばねを設ける必要がある。そこで本手法では、ばね定数をペナルティ関数 p と考え以下のように仮定する。

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} \quad (27)$$

応力を未知数とする変位場を用いた離散化方程式は、式(15)に対して、式(22)もしくは式(24)で示す関係を代入することによって得られる。ただし、仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ についても変位場と同じ関係を用いて次式のように表す。

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}_d \delta \mathbf{d} + \mathbf{N}_\sigma \delta \boldsymbol{\sigma} \quad (1\text{次変位場}) \quad (28)$$

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}_d \delta \mathbf{d} + \mathbf{N}_\sigma \delta \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{N}_{\sigma_x} \delta \boldsymbol{\sigma}_x \quad (2\text{次変位場}) \quad (29)$$

いま、2次の変位場について

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)}, \quad \delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{U}^{(e)} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} N^{(e)} &= [N_d^{(e)}, N_\sigma^{(e)}, N_{\sigma_x}^{(e)}] \\ U^{(e)} &= [d^{(e)}, \sigma^{(e)}, \sigma_x^{(e)}]^t \\ \delta U^{(e)} &= [\delta d^{(e)}, \delta \sigma^{(e)}, \delta \sigma_x^{(e)}]^t \end{aligned}$$

とすれば,

$$Lu^{(e)} = LN^{(e)}U^{(e)} = B^{(e)}U^{(e)} \quad (31)$$

$$\text{ただし, 2次元の場合, } L^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

ここで, L は微分作用素である.

以上の関係を式(15)に代入すると, 次の式が得られる.

$$\delta U^t \left(\sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{<s>} \right) U - \delta U^t \left(\sum_{e=1}^M P^{(e)} \right) = 0 \quad (32)$$

ここで,

$$K^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (B^{(e)})^t D^{(e)} B^{(e)} dV \mathcal{A}^{(e)} \quad (33)$$

$$K_{<s>} = \mathcal{M}_{<s>}^t \int_{\Gamma_{<s>}} B_{<s>}^t k B_{<s>} dS \mathcal{M}_{<s>} \quad (34)$$

$$P^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \left(\int_{\Omega^{(e)}} (N^{(e)})^t f dV + \int_{\Gamma_e} (N^{(e)})^t T dS \right) \quad (35)$$

ここで, $\mathcal{A}^{(e)}$ は, 全部分領域における自由度と着目部分領域における自由度を関係付ける行列である. $\mathcal{M}_{<ab>}$ は, 全部分領域における自由度と着目部分領域境界面に関係する自由度を関係付ける行列である. また,

$$B_{<ab>} = [R_{<ab>}^{(a)} N^{(a)}, R_{<ab>}^{(b)} N^{(b)}] \quad (36)$$

であり, $R_{<ab>}^{(a)}$, $R_{<ab>}^{(b)}$ は部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ に対するそれぞれの部分領域境界から見た座標変換行列である.

以上より, 最終的に以下の離散化方程式が得られる.

$$KU = P \quad (37)$$

ただし, K および P は以下のとおりである.

$$K = \sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{<s>} \quad (38)$$

$$P = \sum_{e=1}^M P^{(e)} \quad (39)$$

このように, 本モデルの離散化方程式は, 剛体変位と部分領域内の応力を未知パラメータとする連立1次方程式(37)に帰着し, 左辺の係数行列 K は, 各部分領域の剛性と部分領域境界面に関する付帯条件の関係を組み合わせることによって得られる.

5. 材料非線形解析法

(1) 部分領域境界のすべりや引張破壊の取り扱い

HPM では, 部分領域境界边上の相対変位を用いて式(26)より部分領域境界の表面力を求めている. 部分領域境界上のすべりや引張破壊は, この相対変位と表面力の関係を用いて表現される. 相対変位は, 未知パラメータがひずみや応力のいずれであっても, それらの変位場から計算された部分領域境界上の変位そのものの値を用いて求められる. したがって, 一旦相対変位が求まれば, その後のすべりや引張破壊の処理に変位場は関係しないことになり, 従来の HPM による手法⁹⁾をそのまま適用できることになる.

例えば, 部分領域境界の降伏関数 f と塑性ポテンシャル Q が

$$f(\lambda) = 0, \quad Q(\lambda) = 0 \quad (40)$$

で与えられる場合, 塑性化後のペナルティ行列を

$$\Delta \lambda = \left(k^e - \frac{k^e \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} k^e}{\frac{\partial f}{\partial \lambda} k^e \frac{\partial Q}{\partial \lambda}} \right) \Delta \delta \quad (41)$$

とすれば, 部分領域境界上のすべりを表現することができる. ここで, Δ は増分量であることを, k^e は塑性化前のペナルティ行列を表している. なお, 式(41)において $f \equiv Q$ であれば, 関連流れ則に従うことになる.

部分領域境界の表面力が降伏曲面上の値になった後, 式(26)の代わりに式(41)の関係をを用いると表面力は降伏曲面上を移動する.

一方, 引張クラックの場合には, 該当するペナルティ行列を 0 にすればよい.

(2) 部分領域内における降伏の取り扱い

部分領域内の降伏関数 g および塑性ポテンシャル Φ を

$$g(\sigma) = 0, \quad \Phi(\sigma) = 0 \quad (42)$$

とすれば, 通常の塑性流れ即にしたがい, 増分応力と増分ひずみの関係が以下のように求められる.

$$\Delta \sigma = \left(D^e - \frac{D^e \frac{\partial g}{\partial \sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} D^e}{\frac{\partial g}{\partial \sigma} D^e \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}} \right) \Delta \epsilon \quad (43)$$

降伏後にこの関係を用いれば, 応力は降伏曲面上を移動することになる.

いま, $()$ 内を D^{ep} とし,

$$C^{ep} = (D^{ep})^{-1} \quad (44)$$

とすれば, 式(22), 式(24)に対応する塑性化した部分領域

の変位場は、例えば1次の場合、次のようになる。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + (\mathbf{N}_\sigma^{(e)})^T \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \quad (45)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{N}_\sigma^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{N}_\epsilon \mathbf{C}^{ep}$$

しかし、本論文では部分領域内が降伏した場合、塑性流れ則に従って応力値が変化するものと仮定しており、式(45)の表現では、変位場が確定できない。そこで、降伏後の部分領域に関しては、式(17)あるいは(19)による線形変位場を維持し、未知パラメータを応力からひずみに戻して解析を行う。

(3) 非線形解析法

非線形解析法については、荷重増分法の一つである $r_{\min}$ 法を応力解放がともなう問題に拡張した方法¹²⁾を適用する。いま、表面力の降伏関数を f 、部分領域内応力の降伏関数を g 、現在の表面力と部分領域内応力を、それぞれ、 λ, σ とし、増分表面力、増分部分領域内応力を $\Delta\lambda, \Delta\sigma$ とするとき、次式を満たす r が存在する。

$$f(\lambda + r \cdot \Delta\lambda) \leq 0 \quad (46)$$

$$g(\sigma + r \cdot \Delta\sigma) \leq 0 \quad (47)$$

ここで r は荷重増分率で、これを考えている様々な破壊条件に基づき求める。このようにして求めた増分率のうち、最小のものを今回の荷重増分率とする。このとき、現在の値と増分後の値を、それぞれ n と $n+1$ をつけて表すと、

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + r \cdot \Delta\lambda \quad (48)$$

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + r \cdot \Delta\sigma \quad (49)$$

として増分後の値が求まる。この結果、増分後の表面力、部分領域内応力は、降伏曲面を越えることはなく、降伏曲面上もしくはその内側に必ずあることになる。

非線形解析にあたり、荷重 P を幾つかの増分荷重 ΔP に分割する。このとき、ある荷重増分段階における現在の荷重を $\Delta P^{(i)}$ とし、荷重増分率を r_i とすれば、残りの荷重 $\Delta P^{(i+1)}$ は次式によって与えられる。

$$\Delta P^{(i+1)} = \prod (1 - r_i) \Delta P \quad (r_o = 0) \quad (50)$$

いま、 $(k-1)$ 回目、ある境界に引張破壊が発生した場合、その境界におけるペナルティの値を 0 として力の伝達を遮断し、その境界において所有していた表面力を解放力 $\Delta F^{(k-1)}$ として、関連部分領域に分配する。分配された解放力は、次式のように、残りの荷重に加え、次のステップにおける増分計算を行う。

$$\Delta P^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - r_i) \Delta P + \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{i=k}^{n-1} (1 - r_i) \Delta F^{(k-1)} \right\} \quad (51)$$

このようにして、初めに与えた荷重と解放力をすべて使い切るまで繰り返し計算を行う。このとき、荷重増分率の合計 r_{total} を

$$r_{total} = \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{i=k}^{n-1} (1 - r_i) \right\} \quad (52)$$

とし、 $r_{total}=1$ で収束したものと考えることができる。

以上示したように、本アルゴリズムは、解放力を与えること以外は従来の荷重増分法における $r_{\min}$ 法と同様なアルゴリズムとなっており、部分領域内降伏も容易に取り扱うことができる。

6. 数値計算例

(1) 弾性解析の精度

弾性解析の例として、円孔を有する平板の引っ張り問題を取り上げた。図12に解析モデルを示す。解析は上下左右の対称性を利用し1/4モデルで行った。図中に領域分割を示す。上が三角形分割、下は四角形分割であるが、応力集中部分を細分割するため不整合メッシュを用いている。本モデルは、有限要素法でいうところの要素頂点に自由度はもっておらず、部分領域毎に変位場が独立であるため、このような領域分割を行うことも可能である。

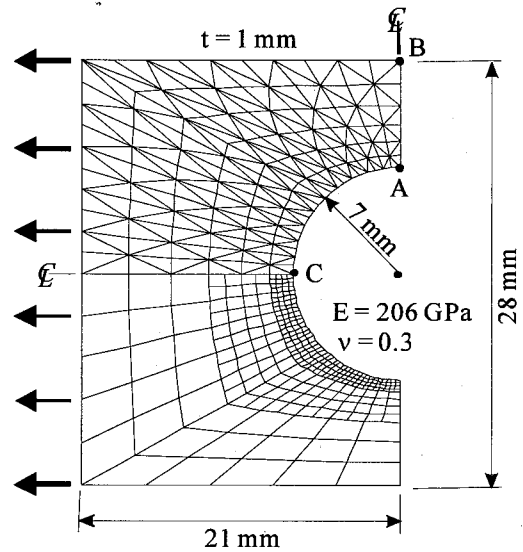


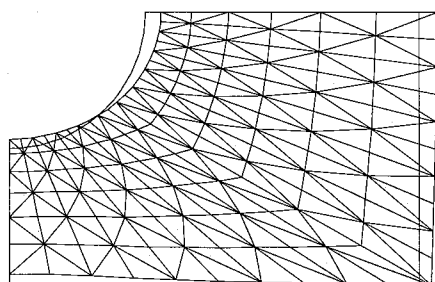
図-3 円孔有する平板の解析例

表-1は図-3に示すA点の鉛直変位とC点の水平変位をFEMによる解析結果と比較したものである。解析には2次の変位場を用いている。()内はひずみを未知パラメータとした場合の結果で、応力を未知パラメータとした場合の方が大きめの変位となっている。

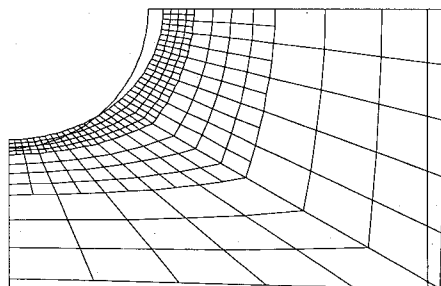
図-4は三角形分割と四角形分割の変位モードを示した図である、モード的にも両者の間に顕著な差は見られない。

表-1 変位の比較 (mm)

解析法	分割方法	A 点	C 点
HPM	三角形	0.0951 (0.0895)	0.159 (0.153)
	四角形	0.0857 (0.0815)	0.151 (0.147)
FEM	三角形	0.0895	0.153



(a) 三角形分割



(b) 四角形分割

図-4 変位モード

表-2 に応力集中係数を比較した結果を示す。四角形領域の方が三角形領域より大きな値になっているが、文献[13]によれば、FEM で 2.32, BEM で 2.31 となっており、本手法の方が解析解に近い値となっている。

表-2 応力集中係数

解析法	分割方法	応力集中係数
HPM	三角形	2.07 (2.32)
	四角形	2.24 (2.17)
FEM	三角形	2.31
	四角形	2.29
解析解 (Howland)		2.16

図-5 は三角形分割と四角形分割の場合の vonMises の応力分布状況を示した図である。両者の間で同様な分布状況を示している。

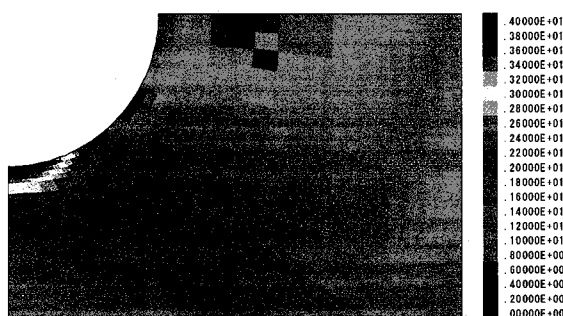
(2) 部分領域境界のすべり解析

すべり解析の例として、図-6 に示すポンチの押し込み問題の解析を行った。要素分割は図に示すとおりで、極限荷重を効率よく求めることを主眼として、比較的粗い要素で分割した。なお、実際の解析では、左右対称性

を考慮し、1/2 の領域で行っている。境界条件として、対称面では、水平方向固定、鉛直方向自由とした。寸法は $2h=0.05\text{m}$, $2b=0.025\text{m}$ であり、このときの解析解による極限荷重は、 $p_m/2c = 1.22$ である。ここで、 p_m は、載荷面上の単位面積あたりの極限荷重で、 c はせん断強さである。材料定数は表-3 に示すとおりである。ただし、自重は無視している。また、載荷は下部載荷面を鉛直方



(a) 三角形分割



(b) 四角形分割

図-5 vonMises の応力分布

向固定とし、上部載荷面に載荷板を設けて行った。

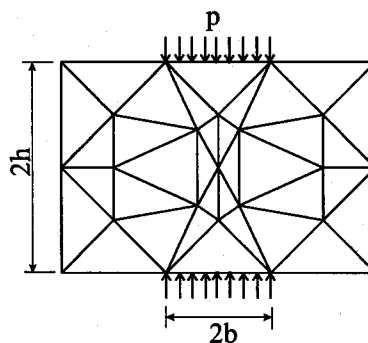


図-6 計算モデルと領域分割

表-3 材料定数

弾性係数 (E)	210 GN/m ²
ポアソン比 (ν)	0.3
せん断強さ (c)	3 MN/m ²
内部摩擦角 (φ)	0°

図-7 は、本手法と RBSM による離散化極限解析の荷重

一変位曲線を示した図である。横軸は、載荷板の変位・を載荷幅で除した値、縦軸は、単位面積あたりの載荷重をせん断強さで除した値である。実線が本手法による結果、破線がRBSMによる結果で、1点破線は解析解を示している。本手法とRBSMの極限荷重は、1.23で同じ値となっている。ただし、RBSMの要素分割は図-6と全く同じ分割を行っている。しかし、要素のひずみを考慮している本手法と、要素境界辺のばねに剛性を持たせたRBSMとでは、極限荷重に至る変位量は異なっている。

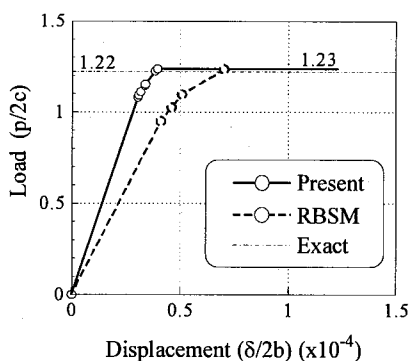


図-7 荷重-変位曲線

図-8は変形モードに破壊線を重ねて表した図である。破壊は載荷部から発生し、次第に進展してメカニズムを形成する。崩壊時のすべり線はRBSMと同一であり、したがって、崩壊機構を形成した段階では、破壊境界辺で消散されるエネルギーが同一となるため、極限荷重については、両者の解が一致したものと考えられる。

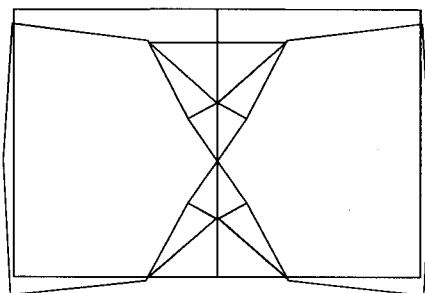


図-8 すべり線

(3) 部分領域内部の降伏を考慮した解析

図-9は開き角90度のVノッチのある薄板引張解析のモデルに対する部分領域分割図(節点数:877, 部分領域数:1664)である。本研究に用いたモデルはノッチの深さは幅に対して1対2の比率となっている。解析では、対称性を考慮して1/4領域を解析対象とする。境界条件に関しては、底部を鉛直方向、左端を水平方向に拘束とし、載荷方法としては右端に荷重を与える。荷重Pは供試体半分の幅あたりの荷重である。解析に用いた材料定数は、弾性係数 $E = 196.2 \text{ kN/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、降伏応力 $\sigma_Y = 294.3 \text{ kN/mm}^2$ で、降伏条件として von Mises

の条件を用いた。

図-10は塑性領域の進展を示した図である。(a)は応力をパラメータとする6.88kN時、(b)はひずみを未知パラメータとする6.87kN時、(c)は山田ら¹⁴⁾によるFEMの6.88kN時の結果である。図中の網掛け部が塑性域に達した領域を表している。どの手法もノッチ付近から進展はじめ、底部境界面に向かって斜めに塑性域の進展が見られた。

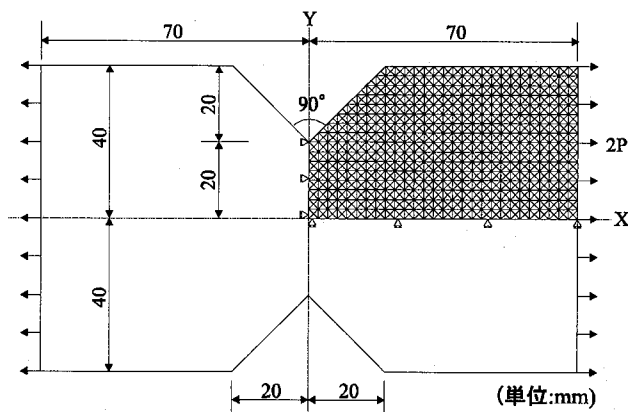


図-9 解析モデルと部分領域分割

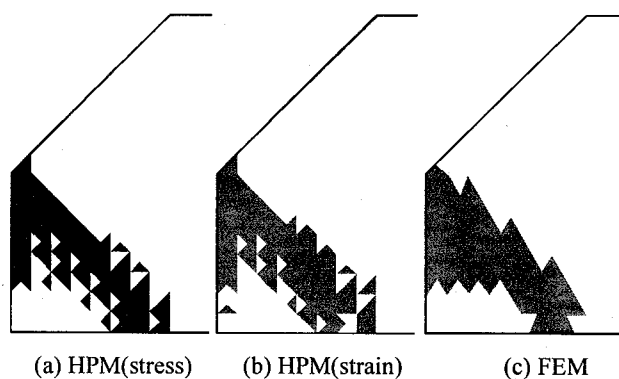


図-10 塑性領域の進展(6.88kN付近)

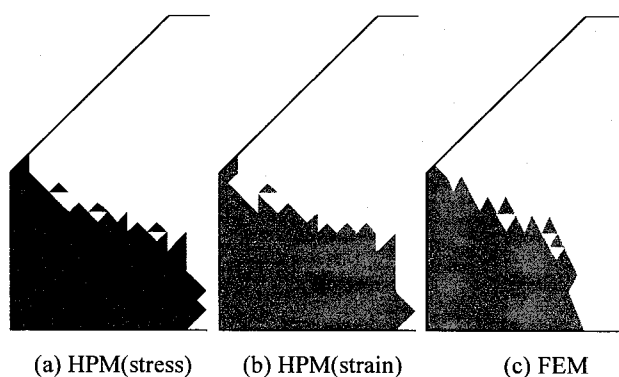


図-11 破壊時における塑性領域分布

図-11は崩壊荷重時におけるHPM, FEMの塑性域の進展図を表した図である。(a)が応力未知パラメータと

したとき、(b)がひずみを未知パラメータとしたと記の結果で、それぞれの崩壊荷重値は(a)が 7.03kN、(b)が 7.00kN であり、FEM が 7.01kN であった。なお、Hill による崩壊荷重は 6.79kN である。塑性域の進展後の破壊形状を見てみると、ノッチ部から底部境界面方向に斜めに塑性域を形成した後、その周りを膨らむようにして塑性域が進展し、最終的に左端部と底部の境界部付近が塑性域に達して崩壊する傾向が見られた。この傾向は、両モデルとも同様であった。

図-12 は、薄板右中央部の水平変位を横軸に、載荷中(P)を縦軸にとった荷重-変位曲線を示した図である。崩壊荷重は、極限解析解より 3.5% 高めの値となっている。

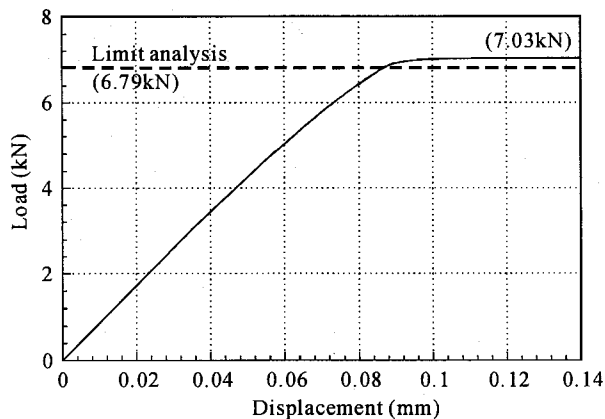


図-12 荷重-変位曲線

7. まとめ

本論文では、剛体変位と応力を未知数パラメータとするハイブリッド型ペナルティ法を提案した。簡単な数値解析より以下の結果が得られた

- (1) 弾性解析による変位解は、ひずみをパラメータとする場合より大きめの値となった。一方、応力集中係数はひずみをパラメータとする場合より小さめの値となった。
- (2) 部分領域境界面上のすべりを取り扱う離散化極限解析による崩壊荷重は剛体ばねモデルと同一の結果となり、解析解より大きい値、すなわち上界値を与えている。また、すべり線の状況はひずみをパラメータとする場合や RBSM の場合と同じ結果であった。
- (3) 部分領域内部の塑性領域の分布はひずみをパラメータとする場合とほぼ同等の結果であった。

本手法は応力を直接求めることができるという利点があり、離散化極限解析を効率よく行える。ただし、部分領域内が塑性化した場合の変位場の取り扱いに関する検討が今後必要である。

参考文献

- 1) Ngo, D. and Scordelis, A.C. : Finite element analysis of reinforced concrete beams, Journal of the American Concrete Institute, Vol.64, No.3, pp152-163, 1967.
- 2) Goodman, R.E., Taylor, R.L. and Brekke, T.L. : A model for the mechanics of jointed rock, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings of the ASCE, Vol.94, No.SM3, pp637-659, 1968.
- 3) Cundall, P.A. : A Computer model for simulating progressive, large scale movements in blocky rock systems, Proceedings of the Symposium of International Society of Rock Mechanics, Vol.1, Paper No.II-1, pp129-136, 1971.
- 4) Kawai, T. : New element models in discrete structural analysis, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, No.141, pp187-193, 1977.
- 5) Shi, G.H. and Goodman, R.E. : Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.13, pp359-380, 1989.
- 6) Jirasek, M. and Belytschko, T. : Computational solution of strong discontinuities, Proceedings of WCCM V, Vienna, Austria, July 7-12, Vol.1, p788, 2002.
- 7) Sukumar, N., Moes, N., Moran, B. and Belytschko, T. : Extended finite element method for three-dimensional crack modeling, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.48, pp.1549-1570, 2000.
- 8) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，日本鋼構造協会，培風館，1972。
- 9) 竹内則雄，大木裕久，上林厚志，草深守人：ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適応した離散化モデルによる材料非線形解析，日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20010002)，pp.53-62，2001。
- 10) 大木裕久，竹内則雄：ハイブリッド型ペナルティ法による上下界解析，日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20060020)，pp.1-10，2006。
- 11) 見原理一，竹内則雄，草深守人：2次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法の開発，土木学会構造工学論文集，Vol.51A，pp249-257，2005
- 12) 竹内則雄：地盤力学における離散化極限解析，培風館，1991。
- 13) 日本機会学会編：固体力学におけるコンピュータアナリシス，コロナ社，1986。
- 14) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T. : Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by finite element method, Int. J. Mechanical Science, Vol. 10, pp323-354, 1968.

(2007年4月12日 受付)