

BF-spline Ritz 法を用いた厚肉斜板の自由振動解析

Free vibration analysis of skew Mindlin plates by the BF-spline Ritz method

水澤 富作*・和田 裕明**・名木野 晴暢***

Tomisaku Mizusawa, Hiroaki Wada, and Harunobu Nagino

* 工博 大同工業大学教授 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

** 大同工業大学大学院 工学研究科都市環境デザイン学専攻 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

*** 博 (工) 大分工業高等専門学校助教 都市システム工学科 (〒870-0152 大分市大字牧 1666 番)

This paper presents a numerical method, the BF-spline Ritz method, for free vibration analysis of skew Mindlin plates with arbitrary boundary conditions. The proposed method utilizes admissible functions comprising the B-spline functions multiplied by a boundary function to define the trial function for the transverse displacement and rotations of the Mindlin plates. The geometric boundary conditions of the plate at edges are automatically satisfied using boundary functions. To demonstrate the validity and accuracy of the BF-spline Ritz method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by other numerical methods. Excellent convergence and high accuracy are obtained by the present method regardless of boundary conditions. The effects of skew angles, thickness to width ratio, and aspect ratio on frequency parameters of skew Mindlin plates with clamped and free edges are shown in tabular forms to serve as benchmark data for future development of new numerical methods.

Key Words: BF-spline Ritz method, boundary function, free vibration, thick skew plate

1. まえがき

斜板は、斜スラブ、斜めデッキや翼などの構造要素として用いられており、その振動特性を知ることが、設計上重要な課題である。種々の境界条件を有する斜板問題では、関数の直交性が成り立たなくなり、また厳密な解を求めることが困難になるので、有限要素法やRitz法などの数値解析法が適用されているが、斜角の増大と共に、斜板の鈍角点近傍に応力集中が生じてくるので、解の収束が遅くなり、また解析結果に相違が見られる¹⁾。

これまでに、薄板理論に基づく斜板の振動解析は、多数報告されているが²⁾、横せん断変形や回転慣性を考慮した比較的板厚の大きな斜板の曲げ振動解析は、1990年代に入ってから本格的な研究が行われている。

RajuとHinton³⁾は、Mindlin板理論に基づく9節点ラグランジュ要素を用いて、種々の境界条件を持つ菱形厚板の振動解析を行っている。McGeeら^{4,5)}は、高次せん断変形理論に基づく9節点ラグランジュ要素を用いて、それぞれ固定辺と単純支持辺を持つ斜板と片持ち斜板の自由振動解析を行っている。また、Wooら⁶⁾は、Legendre多項式を仮定したハイアラーキ高次要素を用いて、種々の境界条件を有す

るMindlin斜板の振動解析を行っている。LeungとZhu⁷⁾は、Wooらのハイアラーキ高次要素の p 法に関する適用限界について検討している。

水澤と近藤⁸⁾は、ペナルティ法とspline要素法を用いて、一方向に任意の変断面性状を有する斜めMindlin板の振動解析を行っている。また、MalekzadehとKarami⁹⁾は、種々の重み係数を仮定したdifferential quadrature法を2方向に変厚を有する斜め厚板の支配方程式に適用して、自由振動解析を行っている。

エネルギー変分原理に基づくRitz法は、定式化の簡便さや比較的少ない級数項での解の収束性を有しているので、平板の振動解析法として、古くから多用されてきている。Ritz法で仮定される試験関数に対する許容条件は、少なくとも幾何学的境界条件を満たす必要があるが、その境界条件の導入方法として、級数の項毎に満たす方法と、級数とで表される全体関数に対して満足させる方法が挙げられる。幾何学的境界条件を級数の項毎に満たす全体関数の選定は限定されるが、級数とで表す関数では、境界関数を組み合わせれば、全体多項式や区分多項式を適用できる利点がある。以下に、全体多項式および区分的多項式の級数とで表す関数と境界関数を組み合わせた試験関数の適用例

について示す。

Bhat¹⁰⁾は、1985年に、幾何学的境界条件を自動的に満たす境界関数と直交多項式から成る全体許容関数の定式化法を提案している¹¹⁾。Liewら¹⁾は、幾何学的境界条件を満たすように境界関数と直交多項式を組み合わせた許容関数をRitz法(*pb*-Ritz法)に適用し、種々の境界条件を有する斜めMindlin板の振動解析を行っている。またZhouら¹²⁾は、Chebyshev多項式に境界関数を導入した全体許容関数をRitz法の変位関数に仮定し、斜め厚板の3次元自由振動解析を行っている。このような全体許容関数をRitz法の試験関数に適用すれば、解の収束が早くなるが、級数項の項数を増大すると多項式の次数が急増大してくるので、係数行列を求めるための数値積分に時間を要し、また計算誤差が入りやすくなる。

一方、局所基底で表されるB-spline関数などの区分的多項式関数が、Ritz法の試験関数に用いられている。 $(k-1)$ 次のB-spline関数は、 $(k-2)$ 次の導関数までの高次の連続性を有する任意の区分的多項式であるので、与えられた幾何学的境界条件を満たすためにペナルティ法²⁾やLagrange乗数法¹³⁾が用いられてきた。また、B-spline関数の局所性に着目して、境界点での幾何学的境界条件を数学的に満足させる修正spline関数の誘導に関する研究¹⁴⁾と比較して、区分的多項式へ境界関数を導入した試験関数に関する研究例は非常に少ないように思われる。幾何学的境界条件を数学的に満足させる修正spline関数は、spline次数に依存し、解式が複雑になり、4次までの修正spline関数しか誘導されていない。この境界条件の導入問題を改善するために、名木野ら¹⁴⁾は、初めて境界関数とB-spline関数を組み合わせた区分的許容関数をRitz法の試験関数に適用し、長方形Mindlin板の振動解析を行っている。

本論文では、任意のB-spline関数が幾何学的境界条件を自動的に満足するように、境界関数とB-spline関数を組み合わせた区分的許容関数をRitz法の試験関数に仮定したBF-spline Ritz法を厚肉斜板の振動解析へ適用し、解の収束性や解析精度について検討を行っている。また、固定辺と自由辺を持つ斜板の振動特性に与える斜角、板厚比、辺長比や境界条件などの影響についても明らかにしている。

2. BF-spline Ritz 法

幾何学的境界条件を自動的に満たす境界関数とB-spline関数で表した区分的許容関数を変位関数に仮定するRitz法を定式化する。図-1に示すように、定式化には次式の無次元斜交座標系 (ξ, η) を用いる⁸⁾。

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad w = W/h \quad (1)$$

ここで、 a, b, h は、それぞれ斜板の長さや幅、厚さであり、 $W(\xi, \eta)$ は面外たわみである。

2.1 B-spline 関数

局所的な基底関数で表されるB-spline関数は、切断ベキ関数の k 階差分商で定義され、直交性を有する区分的多項式である。また $(k-2)$ 階までの導関数の連続性が保証された滑らかな関数である。この関数の代数的特性についてはBoorの論文¹⁵⁾で詳述されているので、ここでは基本式について簡単に述べる。

今、すべての i について、 $x_i \leq x_{i+1}$ なる関係を満たす実変数 x_i に対して、次の切断ベキ関数を定義する。

$$g_k(s; x) = (s - x)_+^{k-1} = \begin{cases} (s - x)^{k-1} & s \geq x \\ 0 & s < x \end{cases} \quad (2)$$

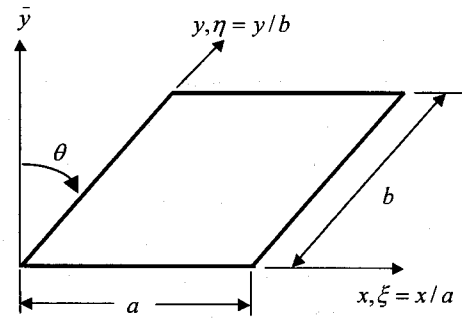


図-1 斜板と斜交座標系

この関数の k 次差分商として、B-spline関数 $M_{i,k}(x)$ は、次式のように定義される。

$$\begin{aligned} M_{i,k}(x) &= g_k(x_i, \dots, x_{i+k}; x) \\ &= \{g_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}; x) \\ &\quad - \{g_k(x_i, \dots, x_{i+k-1}; x)\} / (x_{i+k} - x_i) \end{aligned} \quad (3)$$

また、正規化されたB-spline関数は次式で表される。

$$N_{i,k}(x) = (x_{i+k} - x_i) M_{i,k}(x) \quad (4)$$

したがって、この関数を組み合わせて、次式のような任意の関数を作り出すことができる。

$$f(x) = \sum_i C_i N_{i,k}(x) \quad (5)$$

ここで、 C_i は未定係数である。

式(5)に示す関数の x に関する j 階微分は、式(7)のような漸化式で計算される。

$$\frac{d^j f(x)}{dx^j} = \sum_i C_i N_{i,k}^{(j)}(x) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} N_{i,k}^{(j)}(x) &= (k-1) \{N_{i,k-1}^{(j-1)}(x) / (x_{i+k-1} - x_i) \\ &\quad - N_{i+1,k-1}^{(j-1)}(x) / (x_{i+k} - x_{i+1})\} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、

$$N_{i,k}^{(0)}(x) = N_{i,k}(x) \quad (8)$$

である。

2.2 境界関数および許容関数

($k-1$) 次の区分的多項式で定義される B-spline 関数は、与えられた幾何学的境界条件を満足しない任意の関数である。ここでは、領域 $[0, 1]$ で幾何学的境界条件を自動的に満足させるための境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を定義する。

表-1 に示す $F_x(\xi)$, $F_y(\xi)$, $F_w(\xi)$ は、それぞれ斜交座標での η 軸に平行な境界辺 ($\xi=0, \xi=1$) で与えられる幾何学的境界条件を満たす境界関数であり、また $G_x(\eta)$, $G_y(\eta)$, $G_w(\eta)$ は、それぞれ ξ 軸に平行な境界辺 ($\eta=0, \eta=1$) で与えられる境界関数である。ただし、表中の S, C, F は、それぞれ単純支持、固定および自由の境界条件を示す。

Mindlin 板理論¹⁶⁾で仮定される独立した3つの変位関数(たわみ w と2つの回転角 ϕ_x, ϕ_y) は、表-1 に示す境界関数と B-spline 関数を掛け合わせて、それぞれ次式で仮定する。

$$\begin{aligned}\phi_x(\xi, \eta) &= F_x(\xi)G_x(\eta) \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta), \\ \phi_y(\xi, \eta) &= F_y(\xi)G_y(\eta) \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta), \\ w(\xi, \eta) &= F_w(\xi)G_w(\eta) \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \quad (9)\end{aligned}$$

ただし、 $N_{m,k}(\xi)$, $N_{n,k}(\eta)$ は、($k-1$) 次の正規化された B-spline であり、 A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} はそれぞれ未定係数である。 $i_x = k-2 + M_x$, $i_y = k-2 + M_y$, ($k-1$) は B-spline 関数の次数、 M_x と M_y はそれぞれ ξ 方向と η 方向に設けた区分点の数である。

2.3 BF-spline Ritz 法による固有方程式の定式化

等質かつ等方性である斜め Mindlin 板のひずみエネルギー U は、次式で与えられる¹⁷⁾。

$$\begin{aligned}U &= \frac{D}{2} \left(\frac{b}{a} \right) \cos \theta \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \sec^2 \theta \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} - \left(\frac{a}{b} \right) \sin \theta \frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \theta \frac{\partial \phi_y}{\partial \xi} + \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - (1-\nu) \left(\frac{a}{b} \right) \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \eta} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \xi} \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left[\left(\frac{h}{a} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \cos \theta \phi_x \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\phi_y - \sin \theta \phi_x - \left(\frac{h}{a} \right) \tan \theta \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \sec \theta \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \right]^2 \right\} d\eta d\xi \\ &= \frac{D}{2} \left(\frac{b}{a} \right) \cos \theta \{ \Delta \}_{mn}^T [K]_{mnr} \{ \Delta \}_{rs} \quad (10)\end{aligned}$$

表-1 種々の幾何学的境界条件に対応した境界関数

B. C.	$\xi=0, 1$			$\eta=0, 1$		
	$F_x(\xi)$	$F_y(\xi)$	$F_w(\xi)$	$G_x(\eta)$	$G_y(\eta)$	$G_w(\eta)$
S-S	1	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\eta-\eta^2)$	1	$4(\eta-\eta^2)$
S-F	1	ξ	ξ	η	1	η
F-S	1	$1-\xi$	$1-\xi$	$1-\eta$	1	$1-\eta$
S-C	$4(\xi-\xi^2)$	ξ	$4(\xi-\xi^2)$	η	$4(\eta-\eta^2)$	$4(\eta-\eta^2)$
C-S	ξ	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\eta-\eta^2)$	η	$4(\eta-\eta^2)$
C-C	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\xi-\xi^2)$	$4(\eta-\eta^2)$	$4(\eta-\eta^2)$	$4(\eta-\eta^2)$
C-F	ξ	ξ	ξ	η	η	η
F-C	$1-\xi$	$1-\xi$	$1-\xi$	$1-\eta$	$1-\eta$	$1-\eta$
F-F	1	1	1	1	1	1

ここで、 $\{\Delta\}$ は未定係数ベクトルであり、 θ は斜角、 $[K]_{mnr}$ は剛性マトリックス、 D は板の曲げ剛性である。また、 κ と ν は、それぞれ、せん断修正係数とポアソン比である。

また、この Mindlin 板の運動エネルギー T は、調和振動を仮定すれば、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \rho h \omega^2 a b h^2 \cos \theta \int_0^1 \int_0^1 \left\{ w^2 + \frac{1}{12} (\phi_x^2 + \phi_y^2) \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta (\phi_x \phi_y + \phi_y \phi_x) \right\} d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \{ \Delta \}_{mn}^T [M]_{mnr} \{ \Delta \}_{rs} \quad (11)\end{aligned}$$

ここで、

$$\{ \Delta \}_{rs} = \{ \{ \delta_A \} \quad \{ \delta_B \} \quad \{ \delta_C \} \}^T \quad (12-a)$$

$$\begin{aligned}\{ \delta_A \} &= \{ A_{11} \quad A_{12} \quad \cdots \quad A_{i_x i_y} \}^T, \\ \{ \delta_B \} &= \{ B_{11} \quad B_{12} \quad \cdots \quad B_{i_x i_y} \}^T, \\ \{ \delta_C \} &= \{ C_{11} \quad C_{12} \quad \cdots \quad C_{i_x i_y} \}^T\end{aligned} \quad (12-b)$$

であり、 $[M]_{mnr}$ は質量マトリックス、また、 ρ は密度、 ω は円振動数 (rad/sec) である。

斜め Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー Π は式(10)および式(11)を用いて、次式で与えられる。

$$\Pi = U - T \quad (13)$$

ここで、 U と T はそれぞれ、ひずみエネルギーと運動エネルギーである。

したがって、式(13)に式(9)を代入し、Ritz 法を適用して、 Π を未定係数ベクトルで極値化すれば、次の線形代数方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{ \Delta \}_{mn}^T = \left([K]_{mnr} - n^* [M]_{mnr} \right) \{ \Delta \}_{rs} = 0 ; \quad m, r=1, 2, \dots, i_x, \quad n, s=1, 2, \dots, i_y \quad (14)$$

ここで、 n^* は振動数パラメータであり、次式で定義する。

$$n^* = \frac{\omega b^2}{\pi^2} \sqrt{\rho h / D} \quad (15)$$

式(10)と式(11)に示す剛性マトリックス $[K]_{mnr}$ および質量マトリックス $[M]_{mnr}$ は、それぞれ式(16)と式(17)で示すサブマトリックスで表される。

表-2 周辺固定された斜板の振動数パラメータ n^* の収束性に与える spline 次数($k-1$)と区分点の数 $M_x=M_y$ の影響。
 $\theta=45^\circ$, $a/b=1$, $b/h=10$, CC-CC

k-1	Mx=My	Modes									
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
4	11	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.990	19.058	19.269	20.072
	15	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.989	19.058	19.269	20.070
	19	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.989	19.058	19.269	20.070
	23	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.989	19.058	19.269	20.070
	27	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.989	19.058	19.269	20.070
	31	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.989	19.058	19.269	20.070
3	35	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.989	19.058	19.269	20.070
	11	5.6040	8.4777	11.205	11.786	14.108	15.875	16.998	19.062	19.279	20.096
	15	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.990	19.058	19.270	20.072
	19	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.989	19.058	19.269	20.070
	23	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.989	19.058	19.269	20.070
	27	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.989	19.058	19.269	20.070
2	31	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.989	19.058	19.269	20.070
	35	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.989	19.058	19.269	20.070
	11	5.6051	8.4845	11.231	11.795	14.184	15.926	17.158	19.120	19.429	20.444
	15	5.6042	8.4793	11.210	11.788	14.122	15.884	17.026	19.071	19.303	20.147
	19	5.6040	8.4782	11.206	11.786	14.111	15.877	17.001	19.062	19.280	20.095
	23	5.6039	8.4779	11.205	11.786	14.107	15.874	16.994	19.060	19.273	20.080
1	27	5.6039	8.4778	11.204	11.785	14.106	15.874	16.992	19.059	19.271	20.075
	31	5.6039	8.4777	11.204	11.785	14.106	15.873	16.991	19.058	19.270	20.072
	35	5.6038	8.4777	11.204	11.785	14.105	15.873	16.990	19.058	19.269	20.071
	Liew ¹⁾	5.6040	8.4777	11.204	11.786	14.105	15.873	16.990	19.059	-	-

$$[K]_{mnrs} = \begin{bmatrix} [K_{\phi_x\phi_x}] & [K_{\phi_x\phi_y}] & [K_{\phi_xw}] \\ [K_{\phi_y\phi_x}] & [K_{\phi_y\phi_y}] & [K_{\phi_yw}] \\ [K_{w\phi_x}] & [K_{w\phi_y}] & [K_{ww}] \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[M]_{mnrs} = \begin{bmatrix} [M_{\phi_x\phi_x}] & [0] & [0] \\ [0] & [M_{\phi_y\phi_y}] & [0] \\ [0] & [0] & [M_{ww}] \end{bmatrix} \quad (17)$$

付録には、サブ剛性マトリックス $[K_{ij}]$ およびサブ質量マトリックス $[M_{ij}]$ が示してある。ここで、 $[K]_{mnrs}$ の大きさは $3(k-2+M_x)(k-2+M_y)$ で表され、対称な非密行列になる。 $[K]_{mnrs}$ と $[M]_{mnrs}$ のサブマトリックスは、Gauss-Legendreの数値積分公式により求めている。なお、式(14)の固有値計算には Householder-QR 法を用いており、固有ベクトルは逆反復法により求めている。

3. 数値計算例および考察

ここでは、固定辺と自由辺を持つ Mindlin 斜板の自由振動解析への本手法(BF-spline Ritz 法)の適用について検討するために、本手法の解の収束性と精度比較について示す。また、斜め Mindlin 板の振動数に与える斜角 θ 、幅厚比 b/h 、辺長比 a/b や境界条件の影響についても示す。

ここで、斜板の4辺で与えられる境界条件は、例えば、CC-FSのように表し、それぞれ ξ 軸に垂直な2つ境界辺($\xi=0, 1$)で固定面(C)であり、 η 軸に垂直な2つの境界辺($\eta=0, 1$)で、それぞれ自由面(F)、単純支持面(S)に相当している。また、ポアソン比 ν は0.3に、せん断修正係数 κ は、Liewらが用いた $20(1+\nu)/(24+25\nu+\nu^2)=0.8233$ に仮定する¹⁾。

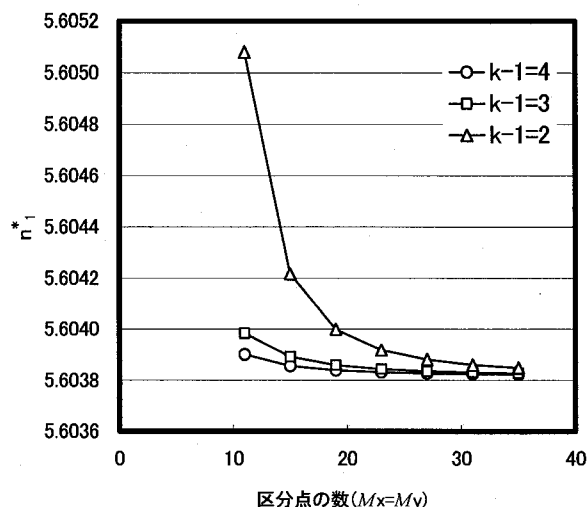


図-2 基本振動数パラメータ n^*_1 の収束性に与える($k-1$)の影響。
 $a/b=1$, $\theta=45^\circ$, $b/h=10$, CC-CC

3.1 本手法の解の収束性

表-2には、周辺固定された Mindlin 斜板(CC-CC, $a/b=1$)の振動数パラメータ $n^*=\omega b^2(\rho h/D)^{1/2}/\pi^2$ の収束性に与える spline 次数($k-1$)と区分点の数 $M_x \times M_y$ の影響が示してある。ここで、斜角 θ は 45° 、幅厚比 b/h は10に仮定し、また区分点の数 $M_x=M_y$ は11から35まで変化させ、spline 次数($k-1$)は2, 3, 4次に仮定している。比較のために、変位関数に直交多項式を仮定した Ritz 法による Liew らの数値解¹⁾も示してある。この表より、spline 次数($k-1$)を高めると、少ない区分点の数で低次から高次の振動数パラメータの値が収束している。また、得られた収束値は、Liewらの数値解¹⁾と良く一致した結果が得られている。同様に、図-2には、この斜板の基本振動数パラメータ n^*_1 の収束性に与える spline 次数($k-1$)の影響が示してある。

表-3 片持ち斜板の振動数パラメータ n^* の収束性に与える区分点の数 $M_x=M_y$ の影響: $\theta=45^\circ$, $a/b=1$, $k=5$, FF-CF, $\nu=0.3$

b/h	$M_x=M_y$	Modes									
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
5	11	0.4222	0.9646	2.105	2.387	3.679	4.097	5.217	5.298	6.665	6.939
	15	0.4220	0.9644	2.104	2.387	3.679	4.096	5.216	5.298	6.665	6.938
	19	0.4219	0.9644	2.104	2.387	3.679	4.096	5.216	5.297	6.665	6.938
	23	0.4219	0.9643	2.104	2.387	3.679	4.096	5.216	5.297	6.665	6.938
	27	0.4218	0.9643	2.104	2.387	3.679	4.096	5.216	5.297	6.665	6.938
	31	0.4218	0.9643	2.104	2.387	3.679	4.096	5.216	5.297	6.665	6.938
10	35	0.4218	0.9643	2.104	2.387	3.679	4.096	5.216	5.297	6.665	6.938
	11	0.4439	1.067	2.508	2.862	4.554	5.222	6.709	7.283	9.059	9.551
	15	0.4437	1.067	2.508	2.862	4.554	5.222	6.708	7.282	9.058	9.551
	19	0.4435	1.067	2.507	2.862	4.554	5.221	6.708	7.281	9.058	9.550
	23	0.4435	1.067	2.507	2.862	4.554	5.221	6.708	7.281	9.058	9.550
	27	0.4434	1.067	2.507	2.862	4.554	5.221	6.708	7.281	9.058	9.550
1000	31	0.4434	1.067	2.507	2.862	4.554	5.221	6.708	7.281	9.058	9.550
	35	0.4434	1.067	2.507	2.862	4.554	5.221	6.708	7.281	9.058	9.550
	11	0.4572	1.141	2.735	3.197	5.139	5.988	7.827	8.948	11.06	11.78
	15	0.4570	1.140	2.734	3.194	5.138	5.986	7.823	8.936	11.05	11.77
	19	0.4568	1.140	2.733	3.193	5.138	5.986	7.822	8.932	11.05	11.77
	23	0.4568	1.140	2.733	3.193	5.138	5.985	7.821	8.931	11.05	11.76
	27	0.4567	1.140	2.733	3.192	5.138	5.985	7.821	8.930	11.05	11.76
	31	0.4566	1.140	2.733	3.192	5.138	5.985	7.821	8.929	11.05	11.76
	35	0.4566	1.140	2.732	3.192	5.138	5.985	7.821	8.929	11.05	11.76

表-4 種々の斜角を有する片持ち斜板の振動数パラメータ n^* の収束性に与える区分点の数 $M_x=M_y$ の影響: $b/h=10$, $a/b=1$, $k=5$, FF-CF

$\theta(^{\circ})$	$M_x=M_y$	Modes									
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
30°	11	0.3907	0.8987	2.354	2.459	3.753	4.584	6.255	6.429	7.495	8.199
	15	0.3906	0.8987	2.353	2.459	3.753	4.584	6.254	6.429	7.495	8.199
	19	0.3906	0.8987	2.353	2.459	3.753	4.584	6.254	6.429	7.495	8.199
	23	0.3906	0.8987	2.353	2.459	3.753	4.584	6.254	6.429	7.495	8.199
	27	0.3905	0.8987	2.353	2.459	3.753	4.584	6.254	6.429	7.495	8.199
	31	0.3905	0.8987	2.353	2.459	3.753	4.584	6.254	6.429	7.495	8.199
60°	35	0.3905	0.8987	2.353	2.459	3.753	4.584	6.254	6.429	7.495	8.199
	11	0.5100	1.507	2.739	3.879	5.207	6.812	8.174	9.602	10.21	12.18
	15	0.5094	1.505	2.737	3.878	5.205	6.810	8.171	9.601	10.21	12.18
	19	0.5091	1.505	2.736	3.878	5.205	6.810	8.170	9.601	10.21	12.18
	23	0.5088	1.504	2.736	3.877	5.204	6.809	8.169	9.600	10.21	12.18
	27	0.5087	1.504	2.735	3.877	5.204	6.809	8.168	9.600	10.21	12.18
	31	0.5086	1.504	2.735	3.877	5.204	6.809	8.168	9.600	10.21	12.18
	35	0.5085	1.504	2.735	3.877	5.204	6.808	8.168	9.600	10.21	12.18

図-2 より, 幾何学的境界条件を自動的に満足させた BF-spline Ritz 法の解は, 振動次数に係わらず, 区分点の数を増大させると, 一定値への安定した収束状態を示し, また, spline 次数($k-1$)を高めると, 少ない区分点の数で速く収束値が得られている。

表-3 は, 片持ち斜板(FF-CF, $a/b=1$)の振動数パラメータの収束性に与える区分点の数の影響を示している。ここで, ($k-1$) は 5 次に, 斜角 θ を 45° に仮定する。幅厚比 b/h は 5, 10, 1000 にとり, また区分点の数 $M_x=M_y$ を 11 から 35 に変化させている。これより, 幅厚比の値に関わらず, 区分点の数を増大させると, 一定値に収束する結果が得られているが, 幅厚比が小さいほど, 少ない区分点の数で解が収束している。同様に, 片持ち斜板(FF-CF, $a/b=1$)の振動数パラメータの収束性に与える斜角 θ の大きさの影響が表-4 に示してある。ただし, ($k-1$) は 5 次に, b/h は 10

に仮定し, θ を 30° と 60° としている。これより, 斜角が増大すると, 基本振動数パラメータの収束がやや遅くなるが, 区分点の数を 27 にとれば, 10 次までの振動数パラメータの収束値が得られている。以後の数値計算例では, spline 次数 ($k-1$) を 5 次に, また区分点の数 $M_x=M_y$ は, 27 に仮定する。

3.2 本手法の解の精度比較

ここでは, 片持ち斜板と交差する 2 辺がそれぞれ固定と自由な斜板 (CF-CF) の振動数パラメータの精度比較について検討する。

表-5 は, 斜角 45° の片持ち斜板 (FF-CF, $a/b=1$) を対象にして, 本手法(BF-spline Ritz method)の精度比較を示している。ここで, b/h は 5, 10 と 1000 に仮定する。比較のために, 直交多項式を変位関数に仮定した Ritz 法による Liew

表-5 片持ち斜板の振動数パラメータ n^* の精度比較: $\theta=45^\circ$, $a/b=1$, $k=5$, $M_x=M_y=27$, FF-CF

b/h	methods	Modes									
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
5	BF-spline Ritz method	0.42177	0.96426	2.1038	2.3866	3.6789	4.0959	5.2160	5.2971	6.6651	6.9378
	Ritz method ¹⁾	0.4226	0.9650	2.1059	2.3869	3.6789	-	-	-	-	-
	FEM ⁶⁾	0.4225	0.9644	2.1001	2.3855	3.6684	-	-	-	-	-
	FEM(a) ⁷⁾	0.4246	0.9676	2.1160	2.3915	3.6922	-	-	-	-	-
	FEM(b) ⁷⁾	0.4241	0.9671	2.1136	2.3911	3.6870	-	-	-	-	-
	PDQM ⁹⁾	0.4218	0.9641	2.1033	2.3866	3.6789	4.0953	5.2159	-	-	-
	HDQM ⁹⁾	0.4217	0.9640	2.1032	2.3866	3.6789	4.0952	5.2159	-	-	-
10	BF-spline Ritz method	0.44335	1.0673	2.5069	2.8615	4.5543	5.2210	6.7082	7.2807	9.0579	9.5501
	Ritz method ¹⁾	0.4445	1.0678	2.5095	2.8633	4.5547	5.2238	6.7096	-	-	-
	PDQM ⁹⁾	0.4432	1.0666	2.5059	2.8612	4.5545	5.2202	6.7082	-	-	-
	HDQM ⁹⁾	0.4432	1.0666	2.5059	2.8612	4.5545	5.2202	6.7082	-	-	-
1000	BF-spline Ritz method	0.45660	1.1395	2.7325	3.1921	5.1375	5.9846	7.8205	8.9286	11.048	11.763
	Ritz method ¹⁾	0.4571	1.1404	2.7357	3.1982	5.1385	5.9863	7.8248	8.9504	-	-
	FEM ⁶⁾	0.4572	1.1478	2.7411	3.2162	5.1364	-	-	-	-	-

FEM(a)⁷⁾: Legendre 直交多項式を仮定した板要素, FEM(b)⁷⁾: ハイラーキ板要素, PDQM⁹⁾: 重み係数に Lagrange 多項式を仮定した DQ 法, HDQM⁹⁾: 調和関数を重み係数に仮定した DQ 法

表-6 2 隣辺が固定と自由である斜板の振動数パラメータ n^* の精度比較: $\theta=45^\circ$, $a/b=1$, $k=5$, $M_x=M_y=27$, CF-CF

b/h	Modes									
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
100	0.6273	2.601	3.454	5.619	8.361	8.619	11.95	12.69	14.34	16.57
3-D Ritz ¹²⁾	0.6274	2.602	3.455	5.622	8.365	8.620	11.95	12.70	-	-
相対誤差(%)	0.02	0.04	0.02	0.05	0.05	0.02	0.01	0.06	-	-
5	0.5519	2.029	2.296	3.890	4.907	5.262	6.883	7.185	7.208	8.671
3-D Ritz ¹²⁾	0.5553	2.050	2.316	3.947	4.964	5.340	6.998	7.297	-	-
相対誤差(%)	0.62	1.04	0.87	1.45	1.15	1.45	1.64	1.53	-	-

ら¹⁾の解, Woo⁹⁾の有限要素解(FEM)および Leung⁷⁾の有限要素解(FEM(a), FEM(b))および Malerkzadeh⁹⁾の differential quadrature 法による数値解(PDQM, HDQM)が示してある。これより, 本手法の解は, 強形式の定式化に基づく differential quadrature 法の数値解よりやや大きめの値を示しているが, Liew らの Ritz 法の解や有限要素解と比較して, やや小さ目の値を示しているため, 本手法の解は, より精度の高い上界値を示しているといえる。

表-6 には, 交差する 2 辺がそれぞれ固定と自由な斜板 (CF-CF, $a/b=1$) の振動数パラメータの精度比較が示してある。ここで, θ は 45° に, b/h は 5 と 100 に仮定している。また, このような境界条件を有する斜板の Mindlin 板理論に基づく研究例が見当たらないので, 比較のために 3 次元弾性論に基づく Ritz 法で求めた Zhou らの弾性解¹²⁾に対する相対誤差(%)が示してある。これより, Mindlin 板理論に基づく本手法の解は, Zhou らの弾性解と比較して, やや小さ目の値を示しているが, 2% 以内の精度で一致した結果が得られている。

3.3 固定辺と自由辺を有する斜板の振動数パラメータ

ここでは, 固定辺と自由辺を有する 4 種類の境界条件を持つ斜板の振動解析について示す。3.1 および 3.2 で検討したように, 本手法の解析精度は, 区分点の数と spline 次数に関係することを明らかにしたが, 以下に示す計算例では, $k=5$ 次, $M_x=M_y=27$ を用いる。

表-7 と表-8 には, 平行な 2 辺がそれぞれ固定と自由である斜板(CC-FF)と 2 隣辺固定で他の 2 辺が自由な斜板(CF-CF)の振動数パラメータ n^* に与える幅厚比 b/h , 辺長比 a/b と斜角 θ の影響が示してある。ここで, b/h は, 100, 10, 5 に仮定し, θ を 0° から 60° まで変化させている。また a/b は, 1 と 2 にとっている。これらの表より, 幅厚比が増大すると, 2 隣辺固定で他の 2 辺が自由な斜板(CF-CF)の振動数パラメータを除いて, 斜角や辺長比の値に関わらず, 横せん断変形の影響により, 振動数パラメータの値が減少する。なお, 2 隣辺固定で他の 2 辺が自由な斜板(CF-CF)の振動特性に与える斜角の影響については, 後で説明する。

また, 表-9 と表-10 には, それぞれ 3 辺固定され, 他の 1 辺が自由である斜板と片持ち斜板の振動数パラメータに与える幅厚比 b/h , 辺長比 a/b と斜角 θ の影響が示してある。これらの表より, 固定辺と自由辺を持つ斜板の振動数パラメータの値は, 斜角, 境界条件, 幅厚比や辺長比に大きく依存し, 幅厚比が増大すると, 斜角や辺長比の値に関わらず, 横せん断変形の影響により, 振動数パラメータの値が減少する。また斜角を増大すると, 斜板の振動数パラメータは大きくなる。

図-3 には, 2 隣辺固定で他の 2 辺が自由な斜板(CF-CF)の基本振動数パラメータ n^*1 と 3 次の振動数パラメータ n^*3 に与える斜角と幅厚比の影響が示してある。これより, 振動数パラメータは, 振動次数に応じて, 特定の斜角で最

表-7 平行な 2 辺がそれぞれ固定と自由な斜板の振動数パラメータ n^* に与える斜角と幅厚比の影響：
CC-FF, $k=1=5$, $M_x=M_y=27$, $\nu=0.3$

a/b	$\theta(^{\circ})$	b/h	Modes									
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
1	0	100	2.243	2.669	4.403	6.185	6.786	8.060	8.839	12.13	12.55	12.79
		10	2.088	2.432	3.902	5.331	5.772	6.929	7.292	9.604	9.982	10.03
		5	1.773	2.010	3.159	4.028	4.333	5.370	5.378	6.691	6.971	7.167
	15	100	2.362	2.762	4.527	6.518	7.104	7.999	9.539	12.03	12.92	13.40
		10	2.188	2.504	4.007	5.570	5.983	6.832	7.857	9.682	10.11	10.39
		5	1.844	2.060	3.239	4.170	4.461	5.199	5.850	6.878	7.075	7.175
	30	100	2.770	3.085	4.997	7.462	8.157	8.607	11.41	12.13	15.06	15.14
		10	2.523	2.754	4.394	6.250	6.681	7.212	9.220	9.748	11.43	11.44
		5	2.077	2.234	3.520	4.596	4.892	5.372	6.711	6.986	7.731	7.831
	45	100	3.675	3.832	6.226	8.746	10.28	11.47	13.80	14.91	17.52	18.85
		10	3.239	3.322	5.350	7.187	8.121	8.979	10.68	11.53	13.12	13.75
		5	2.565	2.624	4.142	5.259	5.819	6.234	7.465	8.008	8.975	9.092
	60	100	5.732	5.796	9.738	11.64	14.58	19.47	19.68	19.88	25.09	27.58
		10	4.705	4.832	7.709	9.059	11.11	13.42	13.79	14.35	17.45	18.25
		5	3.555	3.617	5.501	6.439	7.748	8.472	9.045	9.627	11.28	11.46
2	0	100	0.5578	0.9085	1.538	2.081	2.767	3.022	3.658	4.014	5.002	5.689
		10	0.5464	0.8642	1.473	1.948	2.602	2.811	3.339	3.642	4.497	5.034
		5	0.5184	0.7835	1.323	1.699	2.295	2.388	2.779	3.048	3.617	3.993
	15	100	0.5795	0.9309	1.610	2.082	2.956	3.186	3.538	4.338	5.274	5.320
		10	0.5666	0.8840	1.535	1.951	2.767	2.944	3.246	3.904	4.704	4.745
		5	0.5359	0.7999	1.370	1.706	2.418	2.487	2.725	3.227	3.751	3.819
	30	100	0.6516	1.012	1.846	2.153	3.510	3.528	3.769	5.087	5.240	6.064
		10	0.6333	0.9552	1.737	2.015	3.240	3.241	3.430	4.523	4.685	5.295
		5	0.5927	0.8591	1.519	1.761	2.711	2.729	2.909	3.671	3.782	4.144
	45	100	0.7997	1.207	2.324	2.421	3.825	4.497	5.072	5.848	6.623	6.943
		10	0.7676	1.125	2.129	2.246	3.487	3.991	4.580	5.149	5.758	5.999
		5	0.7040	1.000	1.798	1.944	2.909	3.190	3.783	4.132	4.490	4.691
	60	100	1.083	1.703	3.198	3.268	4.791	6.205	6.859	8.354	9.978	10.23
		10	1.015	1.549	2.847	2.900	4.267	5.283	5.826	7.088	8.277	8.502
		5	0.8994	1.340	2.269	2.445	3.470	4.019	4.511	5.386	5.953	6.451

表-8 2 隣辺が固定と自由である斜板の振動数パラメータ n^* に与える斜角と幅厚比の影響：CF-CF, $k=1=5$, $M_x=M_y=27$, $\nu=0.3$

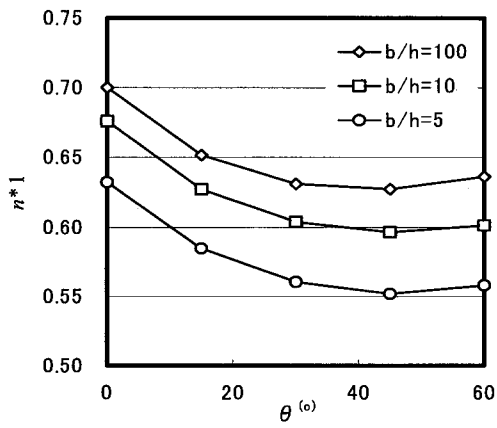
a/b	$\theta(^{\circ})$	b/h	Modes									
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
1	0	100	0.7000	2.417	2.689	4.811	6.339	6.626	8.647	8.917	12.25	12.53
		10	0.6759	2.242	2.503	4.251	5.557	5.812	7.230	7.495	9.948	10.15
		5	0.6322	1.919	2.146	3.414	4.336	4.542	5.413	5.638	7.126	7.276
	15	100	0.6517	2.507	2.551	4.798	6.495	6.910	8.298	9.605	12.30	12.90
		10	0.6271	2.332	2.340	4.243	5.648	5.976	7.043	7.899	9.923	10.29
		5	0.5847	1.959	2.017	3.415	4.362	4.623	5.351	5.824	7.164	7.269
	30	100	0.6310	2.502	2.864	4.986	7.200	7.611	8.923	11.26	11.98	14.78
		10	0.6038	2.325	2.553	4.412	6.099	6.443	7.473	9.062	9.687	11.32
		5	0.5604	1.994	2.081	3.542	4.575	4.920	5.604	6.482	7.005	7.752
	45	100	0.6273	2.601	3.454	5.619	8.361	8.619	11.95	12.69	14.34	16.57
		10	0.5963	2.388	2.958	4.931	6.935	6.978	9.562	10.05	10.93	12.65
		5	0.5519	2.029	2.296	3.890	4.907	5.262	6.883	7.185	7.208	8.671
	60	100	0.6361	2.727	4.674	6.438	10.81	11.44	14.61	19.44	19.47	21.21
		10	0.6012	2.470	3.712	5.521	8.345	8.735	11.22	13.03	14.23	15.28
		5	0.5580	2.092	2.593	4.289	5.055	6.307	7.025	7.842	9.082	9.537
2	0	100	0.4333	0.9200	1.857	2.300	2.912	3.329	4.017	5.278	5.543	6.283
		10	0.4251	0.8848	1.761	2.166	2.689	3.091	3.632	4.757	4.906	5.547
		5	0.4086	0.8181	1.574	1.880	2.286	2.639	3.003	3.863	3.937	4.354
	15	100	0.4185	0.9001	1.855	2.345	3.009	3.307	4.170	5.127	5.863	6.587
		10	0.4098	0.8623	1.756	2.193	2.765	3.068	3.748	4.614	5.170	5.750
		5	0.3933	0.7939	1.565	1.887	2.335	2.618	3.079	3.753	4.116	4.468
	30	100	0.4334	0.9355	1.924	2.593	3.369	3.537	4.804	5.142	6.581	7.047
		10	0.4227	0.8900	1.812	2.377	3.107	3.213	4.260	4.612	5.704	6.123
		5	0.4039	0.8136	1.606	1.992	2.630	2.664	3.437	3.739	4.429	4.757
	45	100	0.4763	1.074	2.095	2.996	3.717	4.876	5.561	6.186	7.601	7.860
		10	0.4617	1.012	1.955	2.666	3.353	4.340	4.902	5.352	6.494	6.600
		5	0.4376	0.9173	1.714	2.160	2.769	3.452	3.897	4.148	4.871	5.024
	60	100	0.5413	1.538	2.493	3.553	4.806	5.995	7.928	9.357	10.41	10.69
		10	0.5195	1.432	2.284	3.088	4.051	5.196	6.674	7.578	8.288	8.520
		5	0.4866	1.272	1.964	2.409	3.098	4.105	4.772	5.313	5.624	6.171

表-9 3辺が固定で他の1辺が自由である斜板の振動数パラメータ n^* に与える斜角と幅厚比の影響：
CC-CF, $k=5, M_x=M_y=27, \nu=0.3$

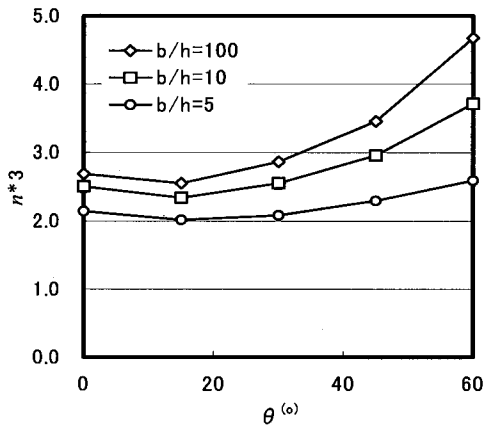
a/b	$\theta^{(o)}$	b/h	Modes									
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
1	0	100	2.420	4.043	6.391	7.751	8.138	11.77	12.34	13.57	14.15	17.42
		10	2.236	3.606	5.485	6.604	6.789	9.399	9.745	10.82	10.94	13.17
		5	1.884	2.908	4.136	5.015	5.023	6.719	6.784	7.543	7.652	8.973
	15	100	2.534	4.214	6.740	7.694	8.949	11.61	13.05	14.44	15.35	16.53
		10	2.330	3.746	5.729	6.526	7.409	9.314	10.17	11.27	11.78	12.56
		5	1.949	3.008	4.281	4.908	5.464	6.661	7.022	7.796	8.141	8.589
	30	100	2.919	4.838	7.745	8.457	11.05	12.09	15.08	16.85	17.13	19.22
		10	2.639	4.252	6.430	7.034	8.883	9.621	11.38	12.71	12.82	14.17
		5	2.165	3.357	4.716	5.178	6.357	6.818	7.729	8.600	8.652	9.488
	45	100	3.762	6.388	9.378	11.32	14.02	15.76	17.93	21.02	23.28	23.67
		10	3.294	5.448	7.560	8.861	10.77	11.90	13.17	14.84	16.21	16.52
		5	2.615	4.126	5.454	6.158	7.438	8.040	8.842	9.649	10.44	10.72
	60	100	5.771	10.38	13.67	18.75	19.72	24.22	28.36	30.22	33.38	36.60
		10	4.783	8.151	10.32	13.34	13.69	16.48	18.50	19.54	20.97	22.65
		5	3.617	5.720	7.065	8.531	9.024	10.51	11.48	12.21	12.85	13.85
2	0	100	0.7870	1.775	2.615	3.260	3.642	5.174	5.240	6.565	7.182	7.511
		10	0.7616	1.683	2.436	3.011	3.310	4.588	4.685	5.764	6.191	6.469
		5	0.7092	1.493	2.086	2.536	2.744	3.669	3.748	4.496	4.767	4.961
	15	100	0.8200	1.825	2.791	3.274	3.912	5.019	5.737	6.931	7.128	7.987
		10	0.7921	1.727	2.589	3.020	3.534	4.486	5.049	6.033	6.182	6.825
		5	0.7357	1.527	2.200	2.541	2.903	3.606	3.981	4.672	4.765	5.187
	30	100	0.9355	2.001	3.408	3.475	4.696	5.221	6.677	7.262	8.643	9.070
		10	0.8988	1.879	3.116	3.184	4.167	4.647	5.755	6.265	7.331	7.620
		5	0.8282	1.645	2.586	2.657	3.342	3.712	4.439	4.810	5.493	5.687
	45	100	1.210	2.402	4.016	4.929	5.990	6.389	8.072	8.767	10.32	11.64
		10	1.151	2.221	3.618	4.372	5.231	5.485	6.821	7.291	8.462	9.373
		5	1.045	1.905	2.958	3.453	4.088	4.217	5.128	5.421	6.174	6.725
	60	100	1.973	3.387	5.336	7.607	9.523	10.16	11.42	12.87	14.34	15.75
		10	1.843	3.038	4.633	6.408	7.759	8.258	9.036	10.05	11.02	11.88
		5	1.621	2.515	3.652	4.847	5.516	5.952	6.403	6.999	7.660	8.087

表-10 片持ち斜板の振動数パラメータ n^* に与える斜角と幅厚比の影響：FF-CF, $k=5, M_x=M_y=27, \nu=0.3$

a/b	$\theta^{(o)}$	b/h	Modes									
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
1	0	100	0.3516	0.8594	2.154	2.750	3.126	5.465	6.196	6.483	7.167	9.370
		10	0.3476	0.8163	2.034	2.583	2.860	4.811	5.477	5.772	6.231	7.908
		5	0.3382	0.7437	1.778	2.274	2.416	3.877	4.306	4.590	4.886	6.019
	15	100	0.3629	0.8786	2.249	2.663	3.419	5.255	6.507	6.770	7.866	8.721
		10	0.3582	0.8336	2.112	2.497	3.118	4.673	5.698	5.960	6.768	7.422
		5	0.3478	0.7587	1.830	2.189	2.631	3.797	4.432	4.695	5.249	5.681
	30	100	0.3975	0.9505	2.556	2.622	4.172	5.114	7.317	7.426	8.820	9.769
		10	0.3905	0.8987	2.353	2.459	3.753	4.584	6.254	6.429	7.495	8.199
		5	0.3766	0.8160	1.977	2.163	3.097	3.750	4.750	5.006	5.676	6.191
	45	100	0.4555	1.136	2.725	3.180	5.118	5.961	7.791	8.873	10.99	11.71
		10	0.4434	1.067	2.507	2.862	4.554	5.221	6.708	7.281	9.058	9.550
		5	0.4218	0.9643	2.104	2.387	3.679	4.096	5.216	5.297	6.665	6.938
	60	100	0.5298	1.616	3.064	4.560	5.958	8.122	10.41	11.73	13.31	15.61
		10	0.5087	1.504	2.735	3.877	5.204	6.809	8.168	9.600	10.21	12.18
		5	0.4760	1.332	2.231	2.939	4.158	4.757	5.660	6.513	7.155	7.634
2	0	100	0.3538	0.5414	1.030	1.930	2.211	2.496	3.176	3.443	4.352	5.332
		10	0.3503	0.5258	0.9871	1.831	2.089	2.335	2.920	3.209	3.918	4.853
		5	0.3413	0.4979	0.9112	1.647	1.820	2.019	2.476	2.774	3.234	4.012
	15	100	0.3683	0.5599	1.052	1.950	2.313	2.627	3.271	3.498	4.557	5.202
		10	0.3640	0.5435	1.008	1.851	2.170	2.451	3.016	3.234	4.096	4.716
		5	0.3538	0.5137	0.9298	1.665	1.871	2.107	2.561	2.770	3.373	3.886
	30	100	0.4106	0.6326	1.137	2.032	2.594	3.064	3.489	3.973	5.011	5.364
		10	0.4034	0.6128	1.086	1.928	2.377	2.848	3.214	3.606	4.497	4.811
		5	0.3889	0.5766	0.9979	1.731	1.992	2.425	2.723	2.998	3.667	3.929
	45	100	0.4723	0.8387	1.350	2.249	2.996	3.575	4.710	4.863	5.993	6.204
		10	0.4590	0.8082	1.281	2.120	2.675	3.273	4.223	4.359	5.243	5.474
		5	0.4360	0.7528	1.166	1.881	2.170	2.765	3.379	3.549	4.097	4.365
	60	100	0.5409	1.445	1.942	2.778	3.673	4.729	5.703	7.023	8.775	9.283
		10	0.5191	1.365	1.824	2.547	3.230	4.074	5.003	6.101	7.320	7.614
		5	0.4862	1.227	1.616	2.169	2.524	3.205	4.017	4.685	5.026	5.462



a) n^*1 と斜角の関係



b) n^*3 と斜角の関係

図-3 2隣辺固定で他の2辺が自由な斜板の基本振動数パラメータ n^*1 と3次の振動数パラメータ n^*3 に与える斜角と幅厚比の影響: CF-CF, $a/b=1$

小値を示すような性状が見られる。これは、自由辺で挟まれる3角形領域の変形モードが斜角に依存し、固定辺で挟まれる3角形領域の変位モードと比較して、特定の斜角で変形しやすいモード性状が現れるためと考えられる。なお、先に示した表の値は、より精度の高い上界値を示すので、他の数値解析法の解析精度を評価するためのベンチマークテストに適用できる。

4. あとがき

本論文では、幾何学的境界条件を自動的に満たした許容関数を求めるために、境界関数とB-spline関数を組み合わせた区分的許容関数を仮定したBF-spline Ritz法を定式化し、固定辺と自由辺を有する厚肉斜板の振動解析への適用について検討を行った。本手法の解の収束性や精度比較を行い、本手法の有用性について検討し、また、固定辺と自由辺を有する斜板の振動特性に与える斜角、幅厚比、辺長比の影響についても検討を行なっている。

本論文で得られた主な結果をまとめると、以下のとおりである。

- 1) BF-spline Ritz法を用いて求めた斜板の振動数パラメータは、spline次数を高めると少ない区分点の数で解の早い収束状態が得られており、またその収束値は、解析解や他の数値解析法による解と比較して、良く一致した結果が得られている。
- 2) 本手法で求めた解は、他のRitz法で得られた結果より小さめの値を示すので、斜板の振動数パラメータのより精度の高い上界値が得られている。
- 3) ベキ関数などの全体関数を仮定したRitz法の定式化では剛性行列が密行列になるが、本手法は、B-spline関数の高次の連続性と局所基底の性質を有しているので、得られる剛性行列は対称な非密行列になる。
- 4) 比較的 low 次 spline 次数を用いて、区分点の数を増大すれば解析精度が高められるので、ハイアラーキ高次要素に見られるような多項式の高次化に伴う数値誤差を低く抑えられる。

今後、本手法の斜めスラブ橋への適用について検討していきたい。なお、本論文で示した表の振動数パラメータ n^* の値を他の数値解析法のベンチマークテストに使って頂ければ幸いである。なお、本研究は大同工業大学研究奨励金の援助を受けて行ったものである。

付録

式(17)で与えられるサブ質量マトリックスは、次式で与えられる。

$$[M_{WW}] = I_{wwmr}^{0000} J_{wwns}^{0000}$$

$$[M_{\phi_x \phi_x}] = \frac{1}{12} \left(\frac{b}{h} \right)^2 I_{xxmr}^{0000} J_{xxns}^{0000}$$

$$[K_{\phi_y \phi_y}] = \frac{1}{12} \left(\frac{b}{h} \right)^2 I_{yymr}^{0000} J_{yyns}^{0000}$$

また、式(16)で与えられるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 [K_{\phi_x \phi_x}] = & \sec^2 \theta [I_{xxmr}^{1100} J_{xxns}^{0000} + I_{xxmr}^{1001} J_{xxns}^{0000} \\
 & - (a/b) \sin \theta (I_{xxmr}^{1000} J_{xxns}^{0100} + I_{xxmr}^{1000} J_{xxns}^{0001}) \\
 & + I_{xxmr}^{0110} J_{xxns}^{0000} + I_{xxmr}^{0011} J_{xxns}^{0000} \\
 & - (a/b) \sin \theta (I_{xxmr}^{0010} J_{xxns}^{0100} + I_{xxmr}^{0010} J_{xxns}^{0001}) \\
 & - (a/b) \sin \theta \{ I_{xxmr}^{0100} J_{xxns}^{1000} + I_{xxmr}^{0001} J_{xxns}^{1000} \} \\
 & - (a/b) \sin \theta (I_{xxmr}^{0000} J_{xxns}^{1100} + I_{xxmr}^{0000} J_{xxns}^{1001}) \\
 & - (a/b) \sin \theta \{ I_{xxmr}^{0100} J_{xxns}^{0010} + I_{xxmr}^{0001} J_{xxns}^{0010} \\
 & - (a/b) \sin \theta (I_{xxmr}^{0000} J_{xxns}^{0110} + I_{xxmr}^{0000} J_{xxns}^{0011}) \}] \\
 & + \frac{1-\nu}{2} (a/b)^2 (I_{xxmr}^{0000} J_{xxns}^{1100} + I_{xxmr}^{0000} J_{xxns}^{1001} \\
 & + I_{xxmr}^{0000} J_{xxns}^{0110} + I_{xxmr}^{0000} J_{xxns}^{0011}) \\
 & + 6(1-\nu) \kappa (b/h)^2 (a/b)^2 (\cos^2 \theta I_{xxmr}^{0000} J_{xxns}^{0000} \\
 & + \sin^2 \theta I_{xxmr}^{0000} J_{xxns}^{0000})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\phi_x \phi_y}] = & \sec^2 \theta [-\sin \theta (I_{xymr}^{1100} J_{xyns}^{0000} + I_{xymr}^{1001} J_{xyns}^{0000}) \\
& + (a/b)(I_{xymr}^{1000} J_{xyns}^{0100} + I_{xymr}^{1000} J_{xyns}^{0001}) \\
& - \sin \theta (I_{xymr}^{0110} J_{xyns}^{0000} + I_{xymr}^{0011} J_{xyns}^{0000}) \\
& + (a/b)(I_{xymr}^{0010} J_{xyns}^{0100} + I_{xymr}^{0010} J_{xyns}^{0001}) \\
& - (a/b) \sin \theta \{-\sin \theta (I_{xymr}^{0100} J_{xyns}^{1000} + I_{xymr}^{0001} J_{xyns}^{1000}) \\
& + (a/b)(I_{xymr}^{0000} J_{xyns}^{1100} + I_{xymr}^{0000} J_{xyns}^{1001})\} \\
& - (a/b) \sin \theta \{-\sin \theta (I_{xymr}^{0100} J_{xyns}^{0010} + I_{xymr}^{0001} J_{xyns}^{0010}) \\
& + (a/b)(I_{xymr}^{0000} J_{xyns}^{0110} + I_{xymr}^{0000} J_{xyns}^{0011})\} \\
& - (1-\nu)(a/b)(I_{xymr}^{1000} J_{xyns}^{0100} + I_{xymr}^{1000} J_{xyns}^{0001}) \\
& + I_{xymr}^{0010} J_{xyns}^{0100} + I_{xymr}^{0010} J_{xyns}^{0001} \\
& + \frac{1-\nu}{2} (a/b)^2 (I_{xymr}^{0100} J_{xyns}^{1000} + I_{xymr}^{0001} J_{xyns}^{1000}) \\
& + I_{xymr}^{0100} J_{xyns}^{0010} + I_{xymr}^{0001} J_{xyns}^{0010} \\
& - 6(1-\nu)\kappa(a/b)^2(b/h)^2 \sin \theta I_{xymr}^{0000} J_{xyns}^{0000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\phi_x w}] = & 6(1-\nu)\kappa(a/b)^2(b/h)^2 \times \\
& [\cos \theta (h/a)(I_{xwmr}^{0100} J_{xwns}^{0000} + I_{xwmr}^{0001} J_{xwns}^{0000}) \\
& - \sin \theta \{- (b/a) \tan \theta (I_{xwmr}^{0100} J_{xwns}^{0000} + I_{xwmr}^{0001} J_{xwns}^{0000}) \\
& + \sec \theta (I_{xwmr}^{0000} J_{xwns}^{0100} + I_{xwmr}^{0000} J_{xwns}^{0001})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\phi_y \phi_y}] = & \sec \theta [-\sin \theta \{-\sin \theta (I_{yymr}^{1100} J_{yyys}^{0000} + I_{yymr}^{1001} J_{yyys}^{0000}) \\
& + (a/b)(I_{yymr}^{1000} J_{yyys}^{0100} + I_{yymr}^{1000} J_{yyys}^{0001})\} \\
& - \sin \theta \{-\sin \theta (I_{yymr}^{0110} J_{yyys}^{0000} + I_{yymr}^{0011} J_{yyys}^{0000}) \\
& + (a/b)(I_{yymr}^{0010} J_{yyys}^{0100} + I_{yymr}^{0010} J_{yyys}^{0001})\} \\
& + (a/b) \{-\sin \theta (I_{yymr}^{0100} J_{yyys}^{1000} + I_{yymr}^{0001} J_{yyys}^{1000}) \\
& + (a/b)(I_{yymr}^{0000} J_{yyys}^{1100} + I_{yymr}^{0000} J_{yyys}^{1001})\} \\
& + (a/b) \{-\sin \theta (I_{yymr}^{0100} J_{yyys}^{0010} + I_{yymr}^{0001} J_{yyys}^{0010}) \\
& + (a/b)(I_{yymr}^{0000} J_{yyys}^{0110} + I_{yymr}^{0000} J_{yyys}^{0011})\} \\
& + \frac{1-\nu}{2} (a/b)(I_{yymr}^{1100} J_{yyys}^{0000} + I_{yymr}^{1001} J_{yyys}^{0000}) \\
& + I_{yymr}^{0110} J_{yyys}^{0000} + I_{yymr}^{0011} J_{yyys}^{0000} \\
& + 6(1-\nu)\kappa(b/a)^2(b/h)^2 I_{yymr}^{0000} J_{yyys}^{0000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\phi_y w}] = & 6(1-\nu)\kappa(a/b)^2(b/h)^2 \times \\
& [-(b/a) \tan \theta (I_{ywmr}^{0100} J_{ywns}^{0000} + I_{ywmr}^{0001} J_{ywns}^{0000}) \\
& + \sec \theta (I_{ywmr}^{0000} J_{ywns}^{0100} + I_{ywmr}^{0000} J_{ywns}^{0001})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{w \phi_x}] = & 6(1-\nu)\kappa(a/b)^2(b/h)^2 \times \\
& [\cos \theta (h/a)(I_{xwmr}^{1000} J_{xwns}^{0000} + I_{xwmr}^{0010} J_{xwns}^{0000}) \\
& - \sin \theta \{- (b/a) \tan \theta (I_{xwmr}^{1000} J_{xwns}^{0000} + I_{xwmr}^{0010} J_{xwns}^{0000}) \\
& + \sec \theta (I_{xwmr}^{0000} J_{xwns}^{1000} + I_{xwmr}^{0000} J_{xwns}^{0010})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{w \phi_y}] = & 6(1-\nu)\kappa(a/b)^2(b/h)^2 \times \\
& [-(b/a) \tan \theta (I_{ywmr}^{1000} J_{ywns}^{0000} + I_{ywmr}^{0010} J_{ywns}^{0000}) \\
& + \sec \theta (I_{ywmr}^{0000} J_{ywns}^{1000} + I_{ywmr}^{0000} J_{ywns}^{0010})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{ww}] = & 6(1-\nu)\kappa(b/a)^2(b/h)^2 [(h/a)^2 \times \\
& (I_{wwmr}^{1100} J_{wwns}^{0000} + I_{wwmr}^{1001} J_{wwns}^{0000} + I_{wwmr}^{0110} J_{wwns}^{0000} \\
& + I_{wwmr}^{0011} J_{wwns}^{0000}) - (b/a) \tan \theta \{- (b/a) \tan \theta \times \\
& (I_{wwmr}^{1100} J_{wwns}^{0000} + I_{wwmr}^{1001} J_{wwns}^{0000}) \\
& + \sec \theta (I_{wwmr}^{1000} J_{wwns}^{0100} + I_{wwmr}^{1000} J_{wwns}^{0001})\} \\
& - (b/a) \tan \theta \{- (b/a) \tan \theta \times (I_{wwmr}^{0110} J_{wwns}^{0000} \\
& + I_{wwmr}^{0011} J_{wwns}^{0000}) + \sec \theta (I_{wwmr}^{0010} J_{wwns}^{0100} + I_{wwmr}^{0010} J_{wwns}^{0001})\} \\
& + \sec \theta \{- (b/a) \tan \theta (I_{wwmr}^{0100} J_{wwns}^{1000} \\
& + I_{wwmr}^{0001} J_{wwns}^{1000}) + \sec \theta (I_{wwmr}^{0000} J_{wwns}^{1100} \\
& + I_{wwmr}^{0000} J_{wwns}^{1001})\} + \sec \theta \{- (b/a) \tan \theta \times \\
& (I_{wwmr}^{0100} J_{wwns}^{0010} + I_{wwmr}^{0001} J_{wwns}^{0010}) \\
& + \sec \theta (I_{wwmr}^{0000} J_{wwns}^{0110} + I_{wwmr}^{0000} J_{wwns}^{0011})\}
\end{aligned}$$

ただし, I_{efmr}^{ijpq} と J_{efmr}^{ijpq} は, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
I_{efmr}^{ijpq} = & \int \frac{\partial^i F_e(\xi)}{\partial \xi^i} \frac{\partial^j F_f(\xi)}{\partial \xi^j} \frac{\partial^p N_{m,k}(\xi)}{\partial \xi^p} \frac{\partial^q N_{r,k}(\xi)}{\partial \xi^q} d\xi \\
J_{efmr}^{ijpq} = & \int \frac{\partial^i G_e(\eta)}{\partial \eta^i} \frac{\partial^j G_f(\eta)}{\partial \eta^j} \frac{\partial^p N_{n,k}(\eta)}{\partial \eta^p} \frac{\partial^q N_{s,k}(\eta)}{\partial \eta^q} d\eta
\end{aligned}$$

ここで, i, j, p と q は, 導関数の次数である. また, e と f は, 与えられる境界条件に対応する境界関数の種類を指定するインデックスであり, 表-1に示すようにそれぞれ x, y, w に対応している.

参考文献

1. Liew, K.M., Xiang, Y., Kitipornchai, S. and Wang, C.M.: Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 168, pp.39-69, 1993.
2. Mizusawa, T., Kajita, T. and Naruoka, M.: Vibration of skew plates by using B-spline functions. *Journal of Sound and Vibration* Vol.62, pp.301-308, 1979.
3. Raju, K.K. and Hinton, E.: Natural frequencies and modes of rhombic Mindlin plates. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 8, pp.55-62, 1980.
4. McGee, O.C. and Butalia, T.S.: Natural vibrations of shear deformable cantilevered skew thick plates. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 176, pp.351-376, 1994.
5. McGee, O.C., Graves, W.D. and Butalia, T.S.: Natural frequencies of shear deformable rhombic plates with clamped and simply supported edges. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 36, pp.1133-1148, 1994.
6. Woo, K.S., Hong, C.H., Basu, P.K. and Seo, C.G.: Free vibration of skew Mindlin plates by p -version of FEM. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 268, pp.637-656, 2003.

7. Leung, A.Y.T. and Zhu, Bin: Comments on 'Free vibration of skew Mindlin plates by p -version of FEM'. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 278, pp.699-703, 2004.
8. Mizusawa, T. and Kondo, Y.: Application of the spline element method to analyze vibration of skew Mindlin plates with varying thickness in one direction. *Journal of Sound and Vibration* Vol.241, pp.484-501, 2001.
9. Malekzadeh, P. and Karami, G.: Polynomial and harmonic differential quadrature methods for free vibration of variable thickness thick skew plates. *Engineering Structures*, Vol.27, pp. 1563-1574, 2005.
10. Bhat, R.B.: Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration* Vol.102, pp.493-499, 1985.
11. Chakraverty, S., Bhat, R.B. and Stiharu, I.: Recent research on vibration of structures using boundary characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method. *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 31, pp. 187-194, 1999.
12. Zhou, D., Lo, S.H., Au, F.T.K., Cheung, Y.K. and Liu, W.Q.: 3-D vibration analysis of skew thick plates using Chebyshev-Ritz method. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 48, pp. 1481-1493, 2006.
13. Mizusawa, T. and Kajita, T: Analysis of skew plate problems with various constraints. *Journal of Sound and Vibration* Vol.73, pp.573-584, 1980.
14. 名木野晴暢, 水澤富作, 三上隆: BF-spline Ritz 法を用いた長方形 Mindlin 板の振動解析. 応用力学論文集, Vol. 9, pp. 341-352, 2006.
15. Boor, C. D.: On calculating with B-spline. *Journal of Approximation Theory*, Vol.6, pp.50-62, 1972.
16. Mindlin, R.D.: Influence of rotary inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol.18, pp.1031-1036, 1951.
17. Liew, K.M., Wang, C.M., Xiang, Y. and Kitipomchai, S.: *Vibration of Mindlin Plates – Programming the p -Version Ritz Method*, Elsevier Science, Oxford, 1998.

(2007年4月12日 受付)