

複合材料の非線形解析のためのイメージベース節点積分有限要素法

Image-based nodal-integration finite element method for non-linear analyses of composite materials

車谷 麻緒*・寺田 賢二郎**

Mao KURUMATANI and Kenjiro TERADA

*正会員 博士(工学) 日本学術振興会 特別研究員 PD・東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻
(〒980-8579 仙台市 青葉区 荒巻字青葉 6-6-06)

**正会員 Ph.D. 准教授 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (同上)

We propose an integrated procedure for image-based non-linear analysis of composite materials with the nodal-integration finite element method (NI-FEM), which is named the "image-based NI-FEM". First, we introduce the NI-FEM based on node-based approximation in place of conventional element-based FEM, and explain the method of imposing the compatibility conditions at material interface. Secondly, the computational implementations of image-based NI-FEM are presented for realizing seamless modeling and analysis for composite materials by means of the level-set function and Delaunay triangulation. Finally, after carrying out several performance assessment of NI-FEM for the analysis of elastic-plastic composite materials, we demonstrate the capabilities of the proposed method to characterize the non-linear material behavior of composite materials in conjunction with the homogenization analysis.

Key Words : NI-FEM, CST-mesh, image-based modeling, level-set, Delaunay triangulation, elastoplasticity, homogenization method

1. はじめに

近年, 測定機器や実験装置の発達により, 材料の微視構造の詳細な画像データを採取することが可能となっており, また 3D-CAD などの利用により, 材料や構造のデジタルイメージを生成することも容易となっている。しかしながら, 有限要素法 (FEM) により微視構造をモデル化する際は, メッシュ生成の煩雑さがボトルネックになることから, 画像データなどのデジタルデータからメッシュ生成・数値解析までをシームレスに行える評価技術の確立が重要視されている。

また, 一般的な材料は, 巨視的 (マクロ) には均質な材料に見えても, 微視的 (ミクロ) には非均質な構造を有している場合が多く, 材料実験等で見られる巨視的な材料特性は, その微視的な非均質構造特性に起因することが指摘されている¹⁾。近年の材料開発・材料設計に関する計算力学の分野では, 微視構造の非均質な幾何性状やその力学特性をモデル化し, 巨視的な材料特性を評価するといったマルチスケール的な研究・開発が盛んに行われている。例として, 均質化法²⁾に基づくマルチスケール解析は, 材料のミクロ領域での力学挙動を反映したマクロ構造解析を可能とするものであり, これまで多くの研究成果が報告されている^{3),4)}。

ボクセル FEM⁵⁾ (イメージベース FEM) は, 画像データから有限要素解析をシームレスに行える最も有名な解析法である。この手法によれば, ピクセルやボクセルなどの数値データをそのまま正方形や立方体の有限要素と見なしてモデル化するため, 画像データから容易に数値解析へと移行できるが, 幾何形状を階段状にモデル化するため, 計算の大規模化や人工的な応力分布の発生などの問題点があり, 非線形問題や 3 次元問題への対応は困難なものとなっている^{6),7)}。他方, 産業

界における計算機支援工学 (CAE) の分野においても, CAD データや画像データからシームレスに数値解析を行う需要が高まってはいるが, 実際は, 煩雑なメッシュ生成は三角形・四面体要素による自動メッシュ分割機能に任せて, 解析精度は要素の高次化に委ねているのが現状である。

Dohrmann *et al.*⁸⁾ は, FEM における定ひずみ三角形要素・定ひずみ四面体要素 (CST 要素) の有限要素近似を, 従来の要素ベースから節点ベースに応用した節点積分有限要素法 (Nodal-Integration FEM; NI-FEM) を提案している。これによれば^{9),10)}, 節点ベースの近似によって, 低次近似にも関わらず要素ベースの CST 近似よりも近似精度が向上するばかりか, 三角形・四面体のメッシュをそのまま利用するので, FEM のプリプロセッサや Delaunay 分割法¹¹⁾ によるオートメッシュも利用可能である。さらに, CST 近似を利用するので, 自由度・計算負荷の観点から, ボクセルや高次要素による解析よりも優位である。すなわち, NI-FEM を応用すれば, FEM のボトルネックであるメッシュ生成・精度・自由度の問題を克服でき, さらに, Delaunay 分割法を組み合わせると, デジタルデータからシームレスな材料の解析手法へと拡張することができる。

そこで本研究では, NI-FEM が有する近似精度やオートメッシュの優位性に着目し, 材料の画像データからモデル化・数値解析までをシームレスに行える, 複合材料の非線形解析のためのイメージベース NI-FEM を開発する。はじめに, NI-FEM の近似概念や定式化, および複合材料 (異種材料界面) のモデル化について述べる。次に, NI-FEM を微視構造の解析に適用する際のインプリメンテーションを示す。具体的にここでは, 材料の微視構造を想定した画像データから, Level-set 関数による境界の抽出と Delaunay 分割法による自動メッ

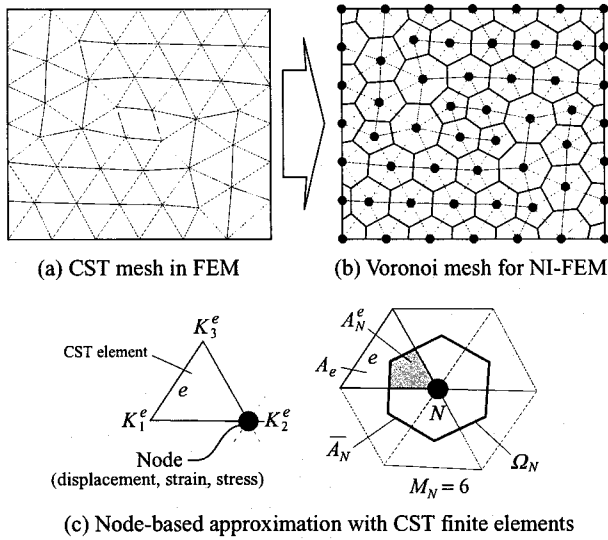


図-1 節点積分有限要素法 (NI-FEM) とそのメッシュ形態

シュ分割機能を組み合わせたシームレスなイメージベース統合化解析法へと拡張させる。最後に、提案するイメージベース NI-FEM の解析精度の検証、およびボクセル FEM との精度や計算コストに関する比較・考察を行った後、材料非線形性の典型として弾塑性体を選んで、マルチスケール解析によるマクロ材料挙動の評価例を紹介し、本手法の適用性・有効性を例示する。

2. 節点積分有限要素法 (NI-FEM)

本節では、節点積分有限要素法 (NI-FEM) の近似概念や定式化、および複合材料 (異種材料界面) のモデル化について述べる。

2.1 NI-FEM の概説

NI-FEM は、Dohrmann *et al.*⁸⁾ によって提案された節点ベースで積分近似を行う FEM である^{9),10)}。具体的には、FEM における定ひずみ三角形要素および定ひずみ四面体要素 (CST 要素) のメッシュを基礎として、各節点を構成する複数の定ひずみ要素の区分線形近似を利用して、節点ごとに物理量を平均的・連続的に近似する手法である。NI-FEM では、節点をベースに近似が構成されることから、そのメッシュ形態は図-1 に示されるように、三角形 (四面体) メッシュから節点をベースとする多角形メッシュとなる。また、変位のみならず応力・ひずみや剛性も多角形ごとに、すなわち節点ごとに付与されることになる。

この手法の大きな特徴は、節点ベースの近似によって、低次近似にも関わらず要素ベースの CST 近似よりも近似精度が向上するばかりか、低次の三角形 (四面体) のメッシュをそのまま利用するので、数値積分が不要であり、またメッシュ生成も自動化できることである。以下では、従来の要素ベースの有限要素近似を参照しながら、NI-FEM における節点ベースの近似の方法を簡単に述べる。

2.2 ひずみの節点近似

まず、一般的な 2 次元 CST 要素 e のひずみ ε_e の定義式を与えておく。

$$\varepsilon_e = \sum_{a=1}^3 \mathbf{B}_{K_a^e} \mathbf{d}_{K_a^e} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{B}_{K_a^e}$ と $\mathbf{d}_{K_a^e}$ はそれぞれ定ひずみ要素 e の変位-ひずみマトリックス (\mathbf{B} マトリックス) と変位ベクトルであり、 K_a^e は図-1 に示したような要素 e を構成する要素節点番号 a に対応する全体節点番号である。

NI-FEM では、定ひずみ有限要素近似を利用して、各々の節点周りでひずみを平均的かつ連続的に近似することによって、従来の要素ベースの近似よりも精度の向上を図ることができる^{8),12)}。

$$\bar{\varepsilon}_N = \frac{1}{A_N} \sum_{e=1}^{M_N} \left(\alpha_e^N A_e \sum_{a=1}^3 \mathbf{B}_{K_a^e} \mathbf{d}_{K_a^e} \right) \quad (2)$$

ここで、 $\bar{\varepsilon}_N$ は NI-FEM における節点 N の平均ひずみ、 M_N は節点 N に関わる要素数、 A_e は要素 e の面積、 α_e^N は A_e における節点 N を含む部分面積の割合であり、面積に関しては次式を満足する必要がある。

$$\bar{A}_N = \sum_{e=1}^{M_N} A_e^N = \sum_{e=1}^{M_N} \alpha_e^N A_e \quad (3)$$

ただし、 α_e^N は要素 e において、次の関係を満足するように定めなければならない。

$$\sum_{n=1}^3 \alpha_e^{K_n^e} = 1 \quad (4)$$

要素 e の外接円の中心点から α_e^N を求めれば、正確なポロノイ多角形となるが、本研究ではすべての要素に対して、最も単純な次の値を採用する。

$$\alpha_e^{K_1^e} = \alpha_e^{K_2^e} = \alpha_e^{K_3^e} = \frac{1}{3} \quad (5)$$

なお、 α_e^N の相違が近似性能に与える影響は、軽微であることが示されている⁸⁾。

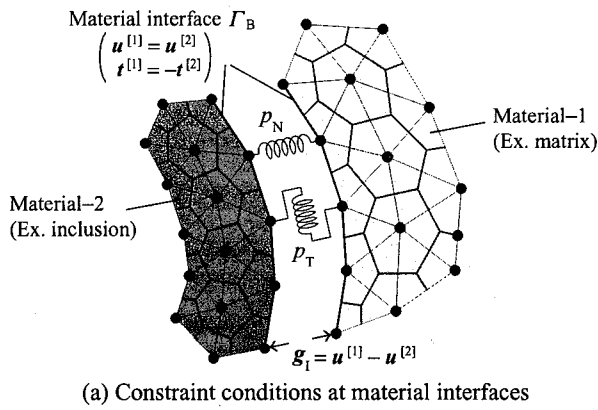
NI-FEM では、全体系の弱形式のつり合い方程式は通常の FEM と同様である。ただし、離散化は、節点を単位とする (ポロノイ) 多角形領域ごとに行われ、最終的な節点 N の接線剛性行列 \mathbf{K}_N は次式で表される。

$$\mathbf{K}_N = \int_{\Omega_N} \mathbf{B}_N^T \mathbf{D}_N \mathbf{B}_N d\Omega = (\mathbf{B}_N^T \mathbf{D}_N \mathbf{B}_N) \bar{A}_N h_N \quad (6)$$

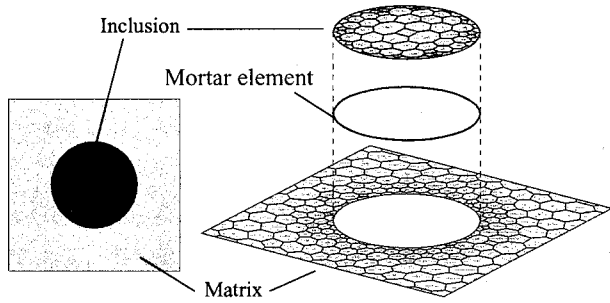
ここで、 Ω_N は節点 N の多角形領域、 \mathbf{D}_N は節点の構成材料の接線係数マトリックス、 \mathbf{B}_N は式 (2) の $\bar{\varepsilon}_N$ を与える節点の \mathbf{B} マトリックス、 h_N は厚さである。

以上のような定義のもとで、通常の FEM と同様の手順にしたがい、全節点についての全体剛性行列を組み立て、連立 1 次方程式を解くことにより、変位のみならずひずみ・応力も、すべて各節点ごとに求められる。また、NI-FEM では要素 e における線形近似や節点で形状関数が 1 となるデルタ条件が成立するので、表面力や変位の境界条件の計算方法は通常の FEM と同様である。

付録 I において、NI-FEM と従来の CST 要素による FEM の近似精度に関する簡単な検証例を示しておく。



(a) Constraint conditions at material interfaces



(b) Modeling material interface in NI-FEM

図-2 NI-FEMにおける異種材料界面の近似

2.3 複合構造における異種材料界面のモデル化

NI-FEMの節点 N における近似は、節点 N を構成する同一材料の要素のみから定義される。したがって、図-2に示されるように、複合構造・複合材料の解析に際しては、異種材料界面において節点を重複させて配置する必要があり、界面における次の連続（拘束）条件を付帯条件として付与することになる。

$$\mathbf{u}_N^{[1]} = \mathbf{u}_N^{[2]} \quad \text{and} \quad \mathbf{t}^{[1]} = -\mathbf{t}^{[2]} \quad \text{on } \Gamma_B \quad (7)$$

ここで、 \mathbf{u}_N は変位、 \mathbf{t} は表面力、 Γ_B は材料界面、[1]と[2]は材料の種別である。

界面での連続条件に関する付帯条件式(7)は、Lagrange未定乗数 λ に基づく界面要素を用いることにより考慮することができ¹³⁾、弱形式のつり合い方程式は次式で表される。

$$\int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u}_N : \boldsymbol{\sigma}_N d\Omega + \int_{\Gamma_B} (\delta \mathbf{u}_N^{[1]} - \delta \mathbf{u}_N^{[2]}) \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma = R_N \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma_B} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u}_N^{[1]} - \mathbf{u}_N^{[2]}) d\Gamma = 0 \quad (9)$$

ここで、 $\delta \mathbf{u}_N$ は仮想変位、 Ω は解析対象領域、 $\boldsymbol{\sigma}_N$ は応力、 R_N は弱形式の右辺項である。

このような有限要素の界面接合に関する既往の研究¹⁴⁾において、ペナルティ法を適用することにより、十分な精度が確かめられていることから、本研究ではペナルティ法を採用する。ペナルティ法は、式(8),(9)を解くための最も簡便な手法であり、Lagrange未定乗数を強いバネで置換近似する。

$$\boldsymbol{\lambda} = \bar{p} (\mathbf{u}_N^{[1]} - \mathbf{u}_N^{[2]}) \quad (10)$$

ここで、 \bar{p} はペナルティ係数であり、通常は非常に大きな実数が設定される。これにより、弱形式はペナルティ係数による剛性が加わった次式で与えられる。

$$\int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u}_N : \boldsymbol{\sigma}_N d\Omega + \int_{\Gamma_B} \bar{p} (\delta \mathbf{u}_N^{[1]} - \delta \mathbf{u}_N^{[2]}) \cdot (\mathbf{u}_N^{[1]} - \mathbf{u}_N^{[2]}) d\Gamma = R_N \quad (11)$$

なお、付録IIに、均質化法に基づくマルチスケール境界値問題の定式化をまとめておく。

3. NI-FEMによるマイクロ構造解析

本節では、NI-FEMによるユニットセルのモデル化と数値解析に関するインプリメンテーションを示す。はじめに、画像データからメッシュ生成・数値解析までをシームレスに行える、イメージベースNI-FEMについて述べた後、NI-FEMにおける周期境界条件に関する補足事項について述べる。

3.1 イメージベース節点積分有限要素法

NI-FEMは、従来のFEMにおける低次の三角形あるいは四面体メッシュをそのまま用いるので、汎用プリプロセッサやDelaunay分割法を利用することができ、FEMにおけるプリプロセス（メッシュ生成）の大幅な軽減が期待される。以下では、2次元問題におけるNI-FEMとDelaunay三角分割法を応用することにより、図-3に示されるような、材料の画像データからユニットセルのモデル化・数値解析までをシームレスに行うためのイメージベースNI-FEMについて説明する。

(1) Delaunay三角分割法

本研究では、Delaunay三角分割法による自動メッシュ分割機能を、NI-FEMのプリプロセス過程に組み込むことにする。このDelaunay三角分割法を実行するためには、マイクロ構造に関する次の情報が必要になる¹¹⁾。

- 幾何形状の座標データ
- 幾何形状の（反）時計回りのコネクティビティ
- 有限要素メッシュを構成する節点数

具体的に、非均質なユニットセルを対象とする際は、異種材料界面の座標とその結合情報、各領域のメッシュ分割に用いる節点数が必要となる。本研究では、上記の3つの情報を収集するために、デジタル画像（ピクセルあるいはボクセル）データとLevel-set関数を利用する。

(2) デジタル画像とLevel-set関数による界面の捕捉

例として、図-3(a)のような単純な2相複合材料を考え、同図(b)のような2種類の定型メッシュを準備する。ひとつは、画像をピクセルやボクセルなどの数値データに変換した詳細なピクセルメッシュ、もうひとつは形状を離散的に定義するための形状メッシュである。ここで、形状メッシュは最終的な有限要素（三角形）メッシュの原型となるので、それを見越してピクセルメッシュよりも幾分粗めに設定する。

そして、図-3(c)に示されるように、これらのメッシュを重ね合わせて座標系を定義した後に、形状メッシュの格子点において Level-set 関数 F_L を算出する。ここで、Level-set 関数は次式で与えられる符号付き最短距離であり、 x は定型メッシュ格子点位置、 x_p は数値画像データ P_X が変化する境界 Γ_p 上での位置、 $n(x_p)$ は x_p での外向き単位法線ベクトルである。

$$F_L(x) = \min_{x_p \in \Gamma_p} \|x - x_p\| \text{sign}\{n(x_p) \cdot (x - x_p)\} \quad (12)$$

形状メッシュの各格子点での F_L を算出すれば、 $F_L = 0$ の境界が属する要素とその境界位置が求められ、材料界面（界面要素）の情報を容易に特定することができる。ここでは、容易性と利便性を考慮して、材料界面と形状メッシュの交点を算出し、その ID と座標値を幾何情報として保存する。

(3) 定型メッシュを利用した節点の配置と分割数

次に、図-3(d)に示されるように、格子メッシュの規則的な並びを利用して、上で定義した形状メッシュ边上での幾何情報（材料界面を定義する点の集合）を時計回りに並び替える。具体的には、形状メッシュのどの要素のどの辺に交点があるかを知らせる配列 $m(i, j, k)$ と、直交配列として定型メッシュを見た際の4つの要素辺とその各辺に隣接する要素位置との関係を示す配列 $lk(k), lj(k), li(k)$ を用意しておけば、同図(d)のように幾何形状を時計回りに並び替えることができる。ここで、 i と j は形状メッシュの2次元な要素位置、 k は各要素の辺番号（1~4）である。 $lk(k)$ は、辺番号を入力すれば相対する要素の辺番号が出力される配列、 $lj(k)$ と $li(k)$ は、辺番号を入力すれば相対する要素の i, j 方向の位置が出力される配列である。また、内部境界については、外部境界と区別して反時計回りに定義する。

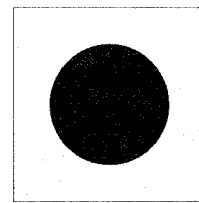
さらに、材料界面（境界）を定義する点の並び替えと同時に境界の長さを求めておき、後の Delaunay 三角分割を精度良く行うことを意図して、(反) 時計回りの座標データを等間隔に再定義しておく。ユニットセルの最外縁の分割には、形状メッシュの間隔をそのまま利用するなどして、最終的に構成材料の異なる物理領域の総数分に対して同様の工程を繰り返す。

各領域を取り囲む (反) 時計回りの結合情報が得られれば、各領域の面積を容易に求めることができる。本研究では、ここで得られる各領域の面積を形状メッシュの分解能で除すことにより、各領域内部のおおよその節点数を定義することにする。

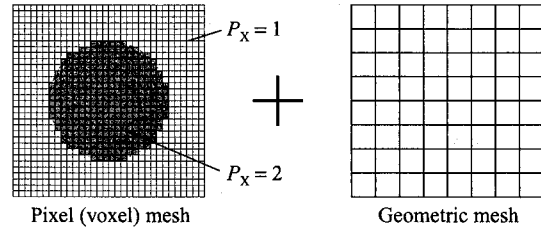
以上のプロセスにより、Delaunay 三角分割法に必要な3つの情報を収集でき、実際に Delaunay 三角分割アルゴリズム¹¹⁾を適用することによって、最終的に図-3(e)に示されるような三角形メッシュおよび NI-FEM のためのポロノイメッシュを作成することができる。また、本手法では、各領域の数だけ境界を定義して Delaunay 分割を行うので、前節で述べた異種材料界面を近似するための2重節点は自動的に配置されることになる。

(4) 適用例

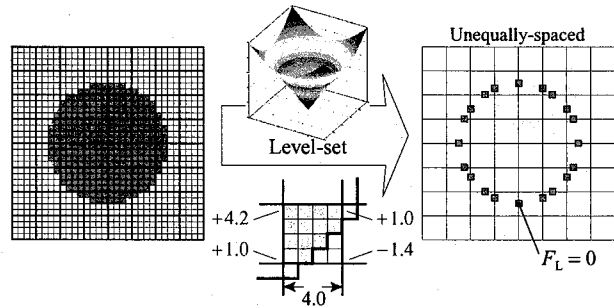
本研究で開発したイメージベース NI-FEM のモデル化に対する適用例を図-4に示す。対象となる画像は、



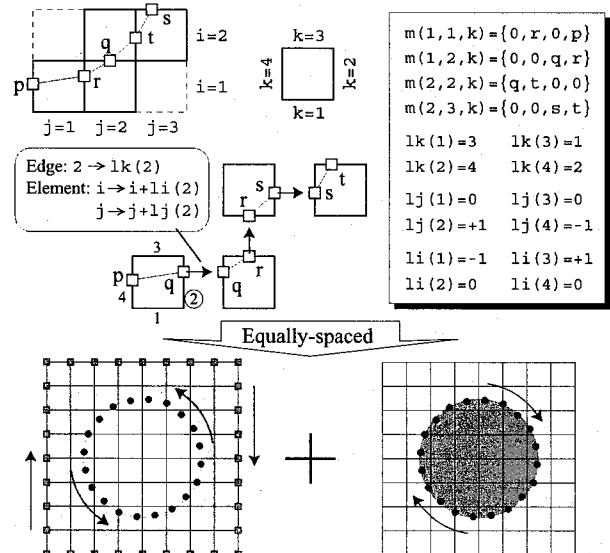
(a) Digital image of micro-structure



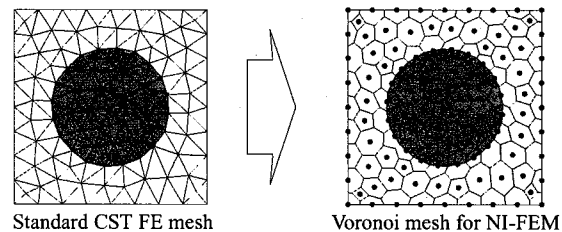
(b) Two regular meshes for image-base modeling



(c) Boundary capturing with the help of level-sets



(d) Specification of (anti-) clockwise geometric data



(e) Mesh generation by the Delaunay triangulation

図-3 NI-FEM・Delaunay 三角分割法・Level-set 関数を利用した非均質材料のイメージベースモデリング

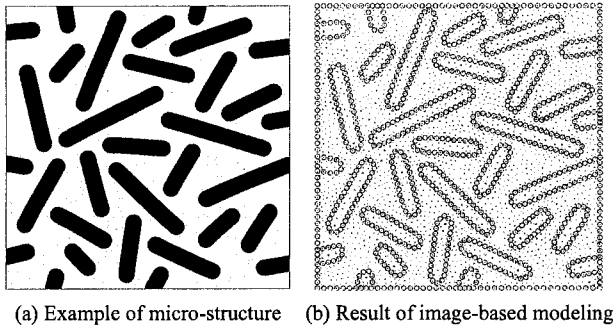


図-4 イメージベースモデリングの適用例

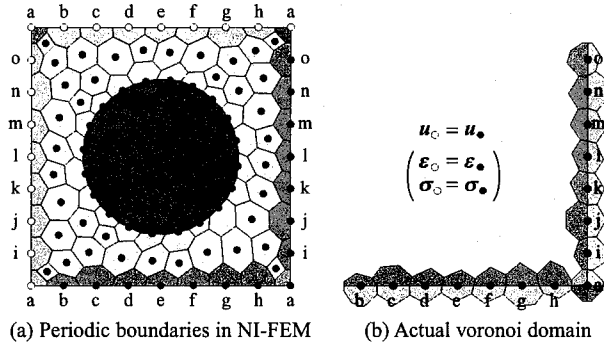


図-5 NI-FEM における周期境界

同図 (a) のような非常に複雑な幾何性状を有する 2 相複合材料である。本例題では、これを 800×800 のピクセルメッシュに変換し、 40×40 の形状メッシュを与えたところ、同図 (b) のように適切に情報が得られたことが分かる。

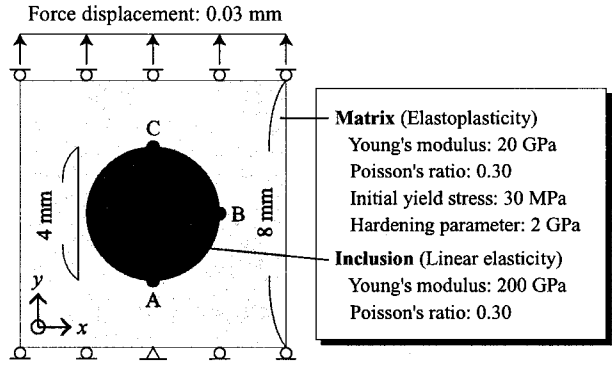
3.2 NI-FEM における周期境界条件

ここでは、NI-FEM をユニットセルの解析に適用する際のインプリメンテーションを述べる。NI-FEM では、各節点周りの CST 要素で構成される多角形領域で近似を行うことになるので、図-5 に示されるように、周期境界条件が課される境界では、周期性を満足するようなボロノイ多角形を考慮しなければならない。また、NI-FEM における応力・ひずみは各節点で近似されるので、周期境界条件が課される境界では応力・ひずみも周期的となる。したがって、ユニットセルにおける平均応力や内力の計算をする際は、周期境界条件が課される節点集合を除いて評価する必要がある。

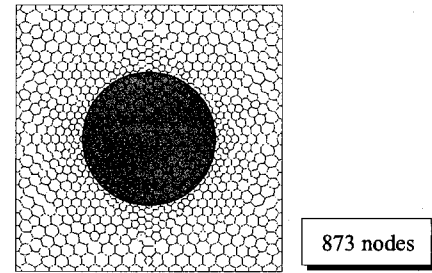
既往の FEM を用いた均質化法に基づくマルチスケール解析と同様に、ユニットセルの剛体変位を抑制するために、ミクروسケールの弱形式に次式で与えられるペナルティ項を追加する²⁾。

$$\int_Y \nabla_y \eta^1 : \sigma dy + \int_Y \frac{1}{\bar{p}} \eta^1 \cdot u dy + \int_{\Gamma_B} \bar{p} (\eta_{[1]}^1 - \eta_{[2]}^1) \cdot (u_{[1]} - u_{[2]}) d\Gamma = 0 \quad (13)$$

ここで、 η^1 はマイクロ仮想変位であり、 Γ_B に関する第 3 項は、式 (11) で与えたペナルティ項と同様である。NI-

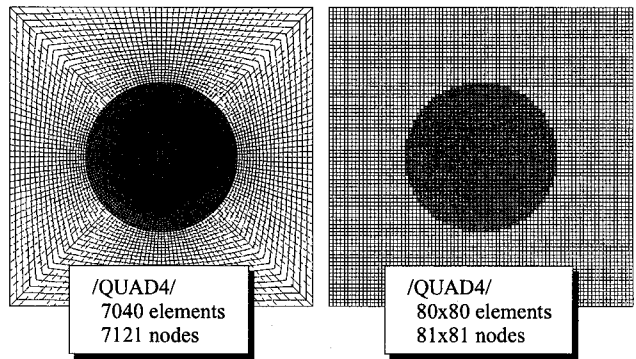


(a) Two-phase composite and material properties of constituents



(b) Polygonal mesh for NI-FEM

図-6 2 相複合構造に対する解析精度の検証例題



(a) Standard finite element mesh (b) Voxel finite element mesh

図-7 参照解に用いる有限要素モデル

FEM では、三角形要素における線形補間が成立するので、三角形要素の形状関数を用いて剛体変位に関するペナルティ項を計算することとする。

4. 数値解析例

本節では、材料非線形問題の典型である弾塑性問題を取り上げ、提案するイメージベース NI-FEM の数値解析例を示す。はじめに、一般的な単一スケールの境界値問題を対象に、複合構造の弾塑性解析における NI-FEM の解析精度を検証するとともに、ボクセル FEM との比較を通して、精度や計算コストについて考察する。そして最後に、弾塑性複合材料のマルチスケール解析を行い、提案手法の適用性を例示する。なお、本節では、ペナルティ係数 \bar{p} を 10^8 と設定する。

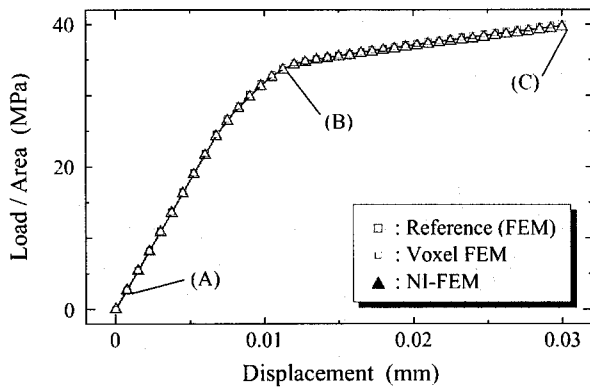


図-8 2相複合構造に対する荷重-変位関係の比較

表-1 ボクセル FEM と NI-FEM における計算コストの比較

| | Memory (MBite) | CPU-Time (s) |
|-----------|----------------|--------------|
| Voxel-FEM | 24.76 | 891 (14:51) |
| NI-FEM | 2.68 | 65 (1:05) |

4.1 弾塑性複合構造に対する NI-FEM の精度検証

図-6 に示される 2 相複合構造を対象として、単一スケールの一般的な境界値問題を通して、複合構造の弾塑性解析における NI-FEM の解析精度を検証する。構成材料は、母材を弾塑性体、介在物を線形弾性体と仮定する。材料パラメータや NI-FEM に対するボロノイメッシュは同図に示す通りとし、平面ひずみ状態で y 方向に強制変位を与える。なお、本例題では、図-7(a) に示される詳細な四辺形メッシュによる有限要素解を参照解として、NI-FEM の解析精度を検証する。また、図-7(b) に示されるような、イメージベース解析の従来法であるボクセル FEM との比較を通して、NI-FEM の精度や計算コストについても検証する。

モデル上端面での荷重-変位関係を図-8 に示す。この図から分かるように、まず上端面での見かけの全体的な応答について、NI-FEM の解は、従来法と比較して十分な精度が得られている。次に、図-8 における (A) ~ (C) の荷重ステップにおける、von-Mises 相当応力分布および相当塑性ひずみ分布を比較したものを図-9 に示す。弾性域 (A) における NI-FEM の応力、および塑性域 (B), (C) における NI-FEM のひずみは、ともに参照解とほぼ同様の分布性状となっており、節点において連続的かつ平均的に評価される応力・ひずみが、適切な近似であることが分かる。一方、ボクセル FEM では、材料界面付近の応力の分布性状が特異となっており、階段状のモデル化による弊害が明瞭に現れている。また、本研究における NI-FEM では、異種材料界面に 2 重節点を配置し、簡易なペナルティ法により連続条件を近似しているが、解析結果によると、連続性の近似は良好であることが分かる。

さらに詳しく比較するために、図-6 に示した材料界面 A→B 上に沿った母材側での von-Mises 相当応力分布および相当塑性ひずみ分布を図-10 と図-11 にそれぞれ示す。ここで、図-10 は図-8 の (A) を、図-11 は図

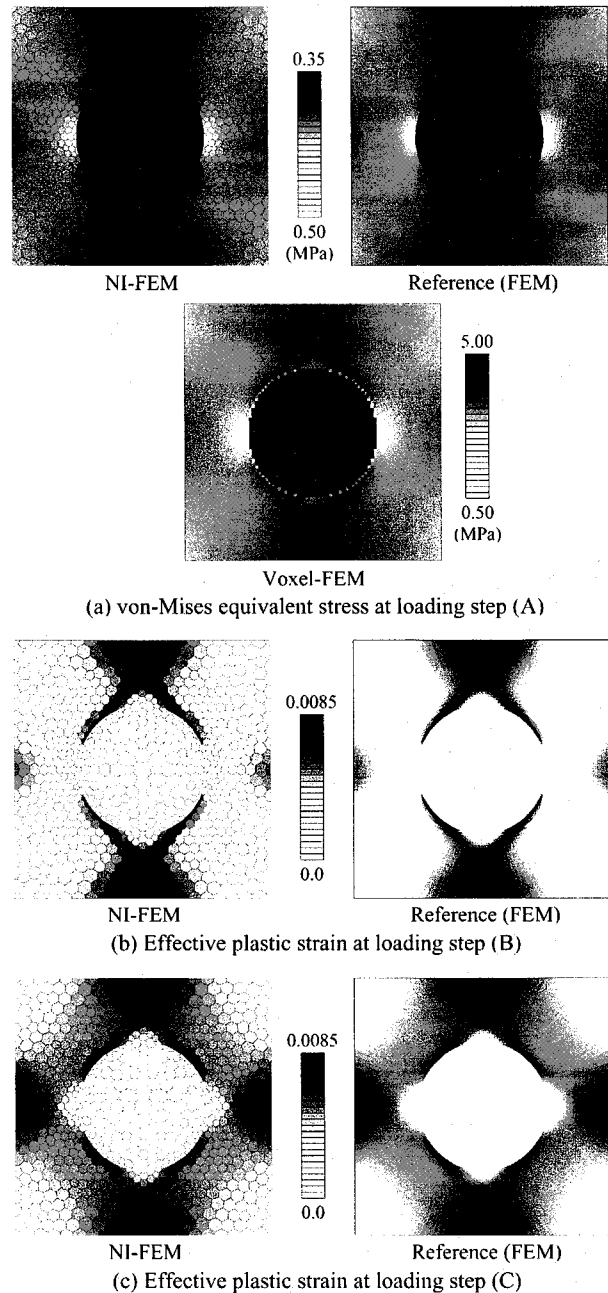


図-9 2相複合構造に対する応力・ひずみ分布の比較

図-8 の (C) を参照している。これらの図に示されるように、ボクセル FEM では、幾何形状を階段状に近似するので、凸凹の人工的かつ低精度な応力・ひずみ分布となっているのに対して、NI-FEM の節点上での応力・ひずみ分布は、参照解と同様であり、適切に近似されていることが分かる。

次に、ボクセル FEM と NI-FEM における計算コストの比較を表-1 に示す。ここで、本解析で使用する計算機の CPU は、Intel(R) Xeon(TM) CPU 3.00GHz であり、数値解析において実数は倍精度 (8 バイト) とし、Linux OS 上の FORTRAN77 の intel コンパイラを用いた。なお、メッシュ生成に要する時間は、NI-FEM・ボクセル FEM とともにほぼ同等である。

NI-FEM は、低次近似に加えて、積分点も 1 つである

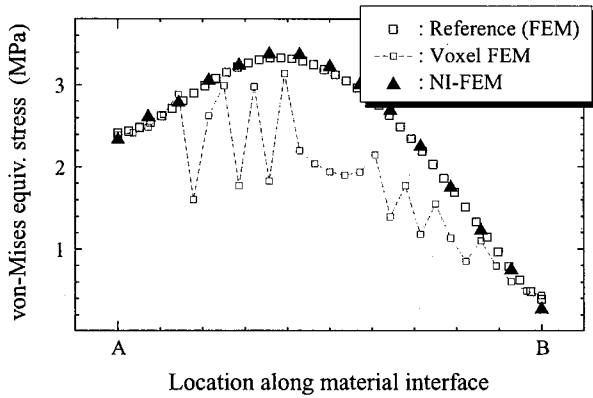


図-10 材料界面における von-Mises 相当応力分布の比較

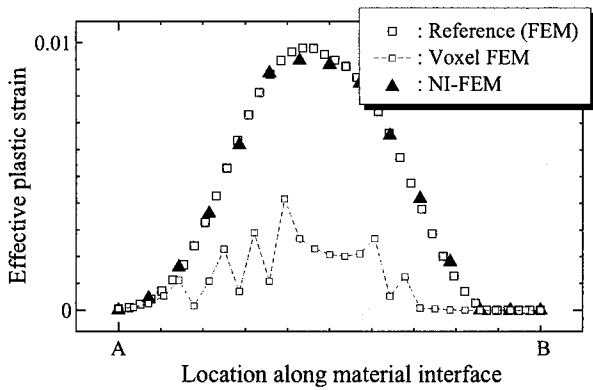


図-11 材料界面における相当塑性ひずみ分布の比較

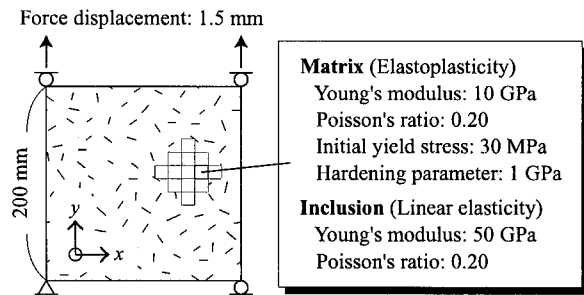
ことから、ボクセル FEM と比較して、使用メモリー・計算時間ともに格段に小さくて済み、大規模な非線形解析に対する優位性が認められる。

4.2 弾塑性複合材料のマルチスケール数値解析例

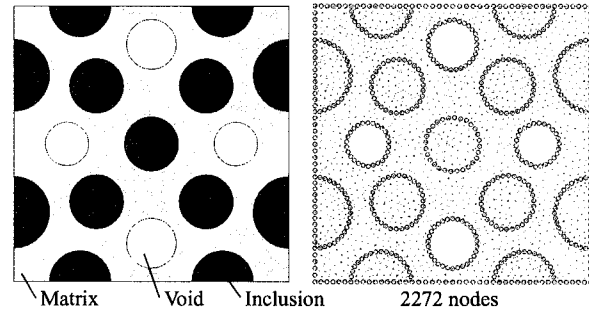
図-12 に示されるような、平面ひずみ状態下におけるマクロスケールの一軸引張り問題を設定する。マクロ構造は、単一の双 1 次四辺形要素でモデル化する。ミクロ構造は、同図 (b) に示されるように、母材・介在物・空隙で構成される弾塑性複合材料であり、本論文で提案するイメージベース NI-FEM を適用する。ミクロ構造の材料パラメータは同図に示される通りであり、50 ステップで変位制御型の弾塑性ミクロ・マクロ連成解析を行う。

数値解析結果として、マクロ応力-ひずみ曲線を図-13 に、また図-13 中の (A)~(C) の各状態におけるミクロ領域での相当塑性ひずみ分布を図-14 に示す。変形が進むにしたがって、ミクロスケールにおいて、ボイドから塑性ひずみが発生し、高応力状態となる介在物と介在物を繋ぐ領域に塑性ひずみが進展していくといった、物理的に妥当な結果が得られている。

このように、本研究で開発したイメージベース NI-FEM は、ミクロ構造の画像から Level-set 関数や Delaunay 分割法を用いて、シームレスにモデル化が可能であり、またその解析精度は、従来の要素ベースの FEM



(a) Macro-structure and material properties



(b) Micro-structure and result of image-based modeling

図-12 2 相複合材料に対する弾塑性マルチスケール問題

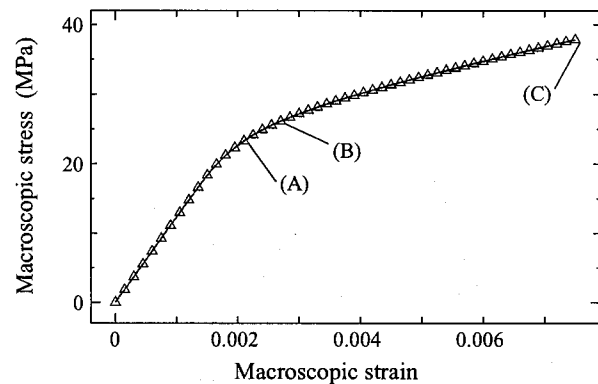


図-13 マクロ応力-ひずみ曲線

と同程度である。さらに、本解析手法は、従来のボクセル FEM やイメージベース FEM と比較して、計算コストが小さく、複合材料の解析・大規模解析・非線形解析にも適していると言える。

5. おわりに

本論文では、NI-FEM が有する近似性能やオートメッシュとの親和性、および計算コスト面での優位性に着目し、微視構造のデジタル画像からシームレスにモデル化・数値解析が行えるイメージベース統合化解析法を構築した。具体的には、デジタル画像の直交配列のデータをベースに、Level-set 関数と Delaunay 三角分割法を応用することにより、新たなイメージベースモデリングに基づく解析手法である、イメージベース NI-FEM を開発した。

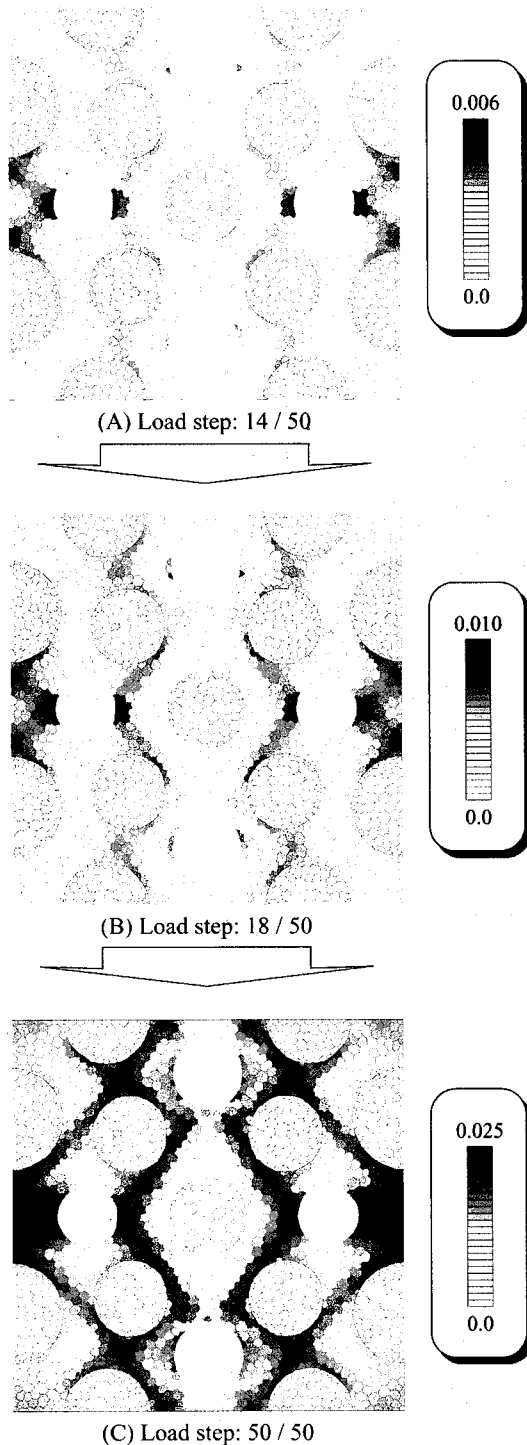


図-14 ミクロスケールにおける相当塑性ひずみの進展

本解析手法の最大の特徴は、ミクロ構造の画像からシームレスにモデル化・マルチスケール解析を行えることに加えて、従来の要素ベースのFEMやボクセル解析法よりも解析精度・計算コスト・大規模解析・複合材料の解析・非線形解析に対して優位な点である。

謝辞

本研究は、第一著者が日本学術振興会特別研究員であった期間に行われ、特別研究員奨励費の援助により

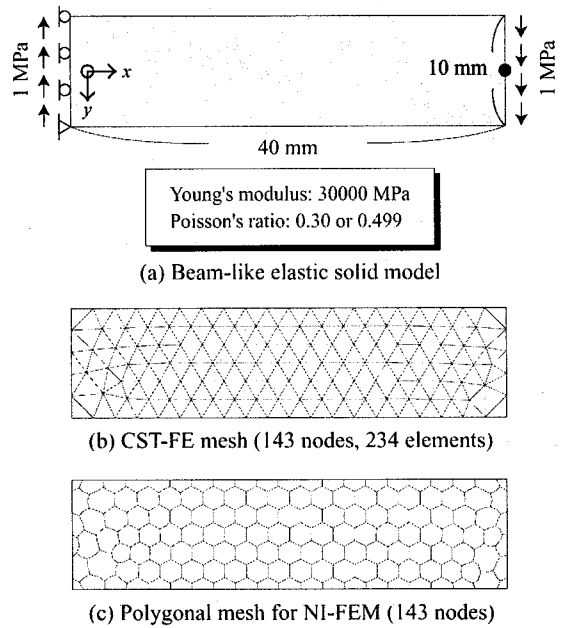


図-15 弾性梁のせん断曲げ問題と解析メッシュ

表-2 y 方向変位とその誤差の比較

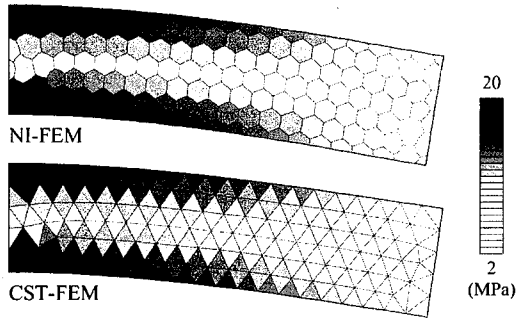
| $\nu = 0.3$ | Displacement (mm) | Error (%) |
|---------------|-------------------|-----------|
| Reference | 8.9500E-02 | — |
| CST-FEM | 8.3598E-02 | 6.59 |
| NI-FEM | 9.3857E-02 | 4.87 |
| $\nu = 0.499$ | Displacement (mm) | Error (%) |
| Reference | 6.7500E-02 | — |
| CST-FEM | 1.8771E-02 | 72.2 |
| NI-FEM | 7.0911E-02 | 5.05 |

行われました。また、本研究を進めるに当たり、中央大学の榎山和男 教授・(株) 計算力学研究センターの高瀬慎介 氏には、Delaunay 三角分割法に関する多大なご協力をいただきました。ここに記して感謝いたします。

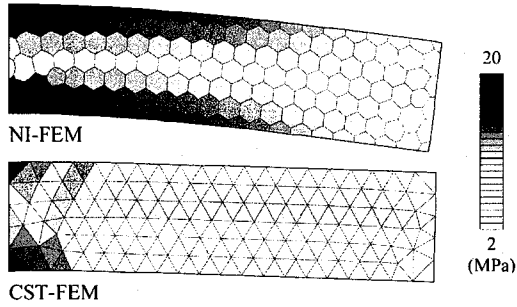
I. NI-FEM の変形・近似性能

節点積分有限要素法 (NI-FEM) の基本的な変形性能・近似性能を調査する¹²⁾。解析対象は、図-15(a)に示されるような梁構造であり、Poisson 比 $\nu = 0.3$ とする平面応力状態および Poisson 比 $\nu = 0.499$ とする平面ひずみ擬似非圧縮状態に対する 2 ケースのせん断曲げ問題を設定する。ここでは、図-15(b) の CST メッシュによる通常の FEM と、この CST メッシュをベースに作られる同図 (c) のボロノイメッシュによる NI-FEM の数値解を比較・考察する。

それぞれ 2 ケースに対する y 方向変位と参照解との誤差を比較したものを表-2 に示す。ここで、平面応力における参照解はせん断変形を考慮した古典梁理論より算出し、平面ひずみ擬似非圧縮における参照解は十分に細かいメッシュによる 2 次の有限要素解とした。こ

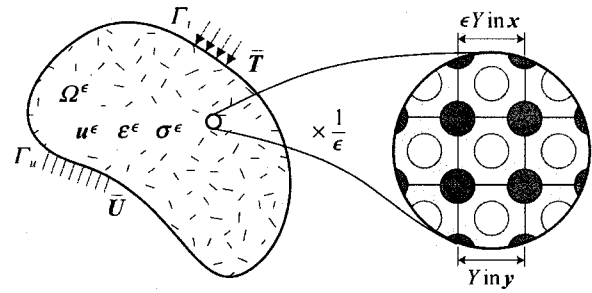


(a) Comparative study in the case of plane stress ($\nu = 0.300$)

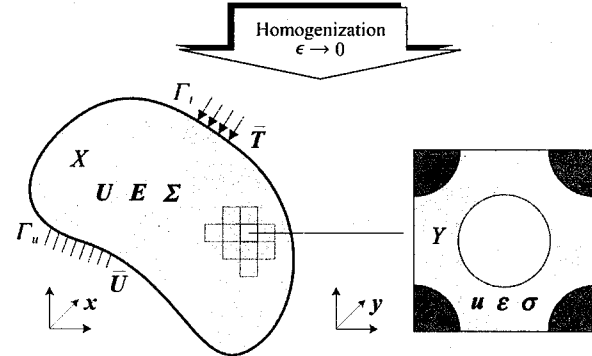


(b) Comparative study in the case of plane strain ($\nu = 0.499$)

図-16 梁の変形図 (×50) と von-Mises 相当応力分布



(a) Heterogeneous body with periodic micro-structure



(b) Macro-structure (Equiv. homogenized body)

(c) Micro-structure (Unit-cell)

図-17 均質化法の概念図

の表に示されるように、NI-FEM では節点ベースの連続的近似により、低次の近似にも関わらず、従来の要素ベースの近似よりもせん断変形の精度が向上していることが分かる。特に、平面ひずみ擬似非圧縮状態に対して、従来の CST 要素では体積ロッキングの影響が強く現れているが、NI-FEM ではその影響はなく、高精度に近似できている。これは、NI-FEM の節点近似が、「要素」という概念をなくしたことにより、「要素近似」による弊害である体積ロッキングを回避できたものと考えられる。

次に、各ケースにおける von-Mises 相当応力の分布を図-16 に示す。これらの比較からも分かるように、NI-FEM の応力分布は梁構造に対して妥当な結果を与えており、平面ひずみ擬似非圧縮状態に対しても CST 近似とは異なり、適切な応力分布となっている。

II. 均質化法に基づく弾塑性マルチスケール境界値問題

II.1 ミクロスケールとマクロスケールの導入

図-17 に示されるような複数の弾塑性材料で構成される非均質体を考える。この構造体の領域 Ω^ϵ における非均質性は、代表長さ ϵ で関連付けられる基本周期構造 (ユニットセル) 内での幾何形状および構成材料の物性によって定義されている。

一般的な均質化法の手順²⁾にしたがって、等価な均質体と見なせるマクロ座標系 x (マクロスケール) と、幾何学的な非均質性が定義されるミクロ座標系 y (ミクロスケール) を定義する。そして、この2つのスケールは、ミクロ構造の大きさを表すパラメータ ϵ によつ

て、 $y = x/\epsilon$ と関連付けられている。このような設定のもとで、変位や応力などの場の変数は、2つの空間変数を用いて $\bullet(x, y)$ のように表現され、ミクロスケール y については「 Y -周期的」とであると仮定する。

均質化法²⁾では、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとることによりミクロとマクロの2変数境界値問題を導出する。均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析に対する定式化の詳細や数値解析アルゴリズムなどは文献^{15),16)}を参照することとし、ここでは Two-scale 収束論¹⁷⁾によって導出される境界値問題のみを与える。

II.2 ミクロ境界値問題

ミクロスケールにおいて満たすべき境界値問題は次のようになる。

$$\int_Y \nabla_y \eta^1 : \sigma \, dy = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \epsilon^e} \quad (\text{II.2})$$

$$\epsilon = \text{sym}(\nabla_x U + \nabla_y u) = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (\text{II.3})$$

ここで、 σ と ϵ はそれぞれミクロ応力とミクロひずみ、 W は弾性ひずみエネルギー関数、 ϵ^e は弾性ひずみ、 ϵ^p は塑性ひずみ、 η^1 はミクロ仮想変位である。また、 u は Y -周期的なミクロ変位であり、これとマクロ変位 U を用いて、ユニットセル内の変位 w は次のように与えられる。

$$w = \text{sym}(\nabla_x U(x)) + u(x, y) \quad (\text{II.4})$$

さらに、ミクロ構造における構成材料の弾塑性挙動が、古典的な線形硬化則に基づく J_2 塑性理論に従うものと

仮定すると、流れ則および硬化則・Kuhn-Tucker形式の
 載荷・除荷条件は以下のように表される。

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial \sigma} \quad (\text{II.5})$$

$$\dot{\alpha} = \gamma \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial q} \quad (\text{II.6})$$

$$f \leq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma f = 0 \quad (\text{II.7})$$

ここで、 $\dot{\varepsilon}^p$ は塑性ひずみ速度、 q は硬化パラメータ、 α は等方硬化に関する内部変数、 γ は塑性 consistency パラメータである。また、 f は Mises の降伏関数であり次式で与えられる。

$$f(\sigma, \alpha) := \|\text{dev}(\sigma)\| - \left(H\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \right) \quad (\text{II.8})$$

ここで、 σ_Y は初期降伏応力、 $\text{dev}(\sigma)$ は Cauchy 応力の
 偏差成分、 H は等方硬化係数である。

II.3 マクロ境界値問題

マクロ構造に関しては、平均化密度・マクロひずみ・
 マクロ応力が、次のようにそれぞれのミクロ変数の体積平均で与えられる。

$$\rho^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho(y) dy \quad (\text{II.9})$$

$$E(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \varepsilon(x, y) dy = \text{sym}(\nabla_x U(x)) \quad (\text{II.10})$$

$$\Sigma(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma(x, y) dy \quad (\text{II.11})$$

これらより、マクロ変位 U に関する弱形式のつり合い
 方程式は次のようになる。

$$\int_X \nabla_x \eta^0 : \Sigma dx = \int_X \eta^0 \cdot \rho^H \bar{b} dx + \int_{\Gamma_t} \eta^0 \cdot \bar{T} d\Gamma \quad (\text{II.12})$$

ここで、 X はマクロ構造の全領域、 \bar{b} は単位体積当
 りに作用する物体力、 \bar{T} は Neumann 境界 Γ_t 上に作用
 する分布外力である。

II.4 ミクロ・マクロ連成解析

非均質弾塑性体に対する均質化法に基づくマルチス
 ケール問題では、次式で示されるミクロ状態変数 χ^1 と
 マクロ状態変数 χ^0 を求めることになる。

$$\chi^1 := \{u, \varepsilon, \varepsilon^p, \sigma, \alpha, \gamma\} \quad (\text{II.13})$$

$$\chi^0 := \{U, E, \Sigma\} \quad (\text{II.14})$$

すなわち、式 (II.1)~式 (II.8) を満足するようにミク
 ロ状態変数 χ^1 を求め、ユニットセル内におけるこれらの
 平均量を含むマクロ状態変数 χ^0 が式 (II.12) を満足す
 るような解を求めるといふ、ミクロ・マクロの両スケ
 ールが連成した境界値問題となる。

参考文献

- 1) W.D. キャリスター (著), 入戸野 修 (監訳): 材料の科
 学と工学, [1] 材料の微細構造, 培風館, 2002.

- 2) 日本計算工学会 (編), 寺田 賢二郎, 菊池 昇 (著): 計
 算力学レクチャーシリーズ①, 均質化法入門, 丸善, 2003.
- 3) 松井和己, 寺田 賢二郎, 秋山雅義, 久保木 孝, 日下桂
 一, 及川謙司: 炭素鋼の微視構造が巨視的な降伏・加工硬
 化特性に与える影響, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.5,
 pp.175-183, 2002.
- 4) Terada, K., Miura, T. and Kikuchi, N.: Digital image-
 based modeling applied to the homogenization analysis of
 composite materials, *Comput. Mech.*, Vol.20, pp.331-346,
 1997.
- 5) Hollister, S.J. and Kikuchi, N.: Homogenization theory and
 digital imaging: a basis for studying the mechanics and de-
 sign principles of bone tissue, *Biotech. Bioengrg.*, Vol.43,
 pp.586-596, 1994.
- 6) 永井学志, 山田貴博, 和田 章: 階層型デジタル画像に
 基づく粗骨材-モルタル界面を考慮したコンクリート材
 料の非線形有限要素解析手法, 日本建築学会構造系論文
 集, Vol.528, pp.91-98, 2000.
- 7) 浅井光輝, 山岸道弘, 寺田 賢二郎, 永井学志: 非局所ボ
 クセル有限要素法の開発とその破壊挙動解析への適用,
 土木学会論文集, No.759/I-67, pp.233-245, 2004.
- 8) Dohrmann, C.R., Heinstein, M.W., Jung, J., Key, S.W. and
 Witkowski, W.R.: Node-based uniform strain elements for
 three-node triangular and four-node tetrahedral meshes, *Int.
 J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.47, pp.1549-1568, 2000.
- 9) Puso, M.A. and Solberg, J.: A stabilized nodally integrated
 tetrahedral, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.67, pp.841-
 867, 2006.
- 10) Bonet, J., Marriott, H. and Hassan, O.: An averaged
 nodal deformation gradient linear tetrahedral element for
 large strain explicit dynamic applications, *Commun. Numer.
 Meth. Engng.*, Vol.17, pp.551-561, 2001.
- 11) 谷口健男: FEM のための要素自動分割 —— デローニー
 三角分割法の利用, 森北出版, 2001.
- 12) 車谷麻緒, 小島隆嗣, 寺田 賢二郎: 節点積分有限要素法
 の変形・近似性能に関する基礎的検討, *Transactions of
 JSCES*, Vol.2007 (J-STAGE), 20070015, 2007.
- 13) 竹内則雄, 草深守人, 武田 洋, 佐藤一雄, 川井忠彦: ペナ
 ルティ法を用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限
 解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.46A, pp.261-270,
 2000.
- 14) 車谷麻緒, 寺田 賢二郎: 領域分割問題における有限要素
 メッシュ界面の接手法について, 土木学会論文集 A,
 Vol.62, No.2, pp.345-361, 2006.
- 15) 寺田 賢二郎, 菊池 昇: 非均質弾塑性体のマルチスケ
 ール解析のための一般化アルゴリズム, 土木学会論文集,
 No.633/I-49, pp.217-229, 1999.
- 16) Terada, K. and Kikuchi, N.: A class of general algo-
 rithms for multi-scale analyses of heterogeneous media,
Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.190, pp.5427-
 5464, 2001.
- 17) Allaire, G.: Homogenization and two-scale convergence,
SIAM J. Math. Anal., Vol.23, pp.1482-1518, 1992.

(2007年4月12日受付)